Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 73 (1973)

Artikel: Une forme dissimulée de l'escompte

Autor: Chuard, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555380

Une forme dissimulée de l'escompte

Par Philippe Chuard, Pully

1. Opérations de capitalisation

Soit un taux d'intérêt i et une durée de $N + f$ périodes (la période étant la durée de référence du taux i), où N est un nombre entier positif ($N \in \mathbf{N}$) et f, un nombre réel positif inférieur à 1 ($0 < f < 1$). Si l'on capitalise à intérêt composé le montant 1 au taux i pendant la durée $N + f$, on peut proposer deux résultats.

Le premier, $$r^N r^f, \qquad \text{où } r = 1 + i, \tag{1}$$

s'obtient en appliquant la formule fondamentale de la capitalisation à intérêt composé,

$$r^n,$$

à une durée n quelconque.

Le second, $$r^N \, (1+fi), \tag{2}$$

fait intervenir l'intérêt composé pendant le nombre entier de périodes et l'intérêt simple, selon la formule

$$1+ni,$$

pendant la fraction de période.

Le procédé (1) satisfait rigoureusement à la théorie généralisée de l'intérêt composé. Le procédé (2) correspond à la pratique habituelle des opérations de crédit.

Remarquons en passant qu'on obtient le résultat (2) en calculant (1) par interpolation linéaire de r^n entre r^N et r^{N+1}. En effet

$$r^{N+f} \text{ (interp. lin.)} = (1-f)\, r^N + f r^{N+1} = r^N \, (1+fi).$$

La valeur finale d'une rente de mn termes, égaux chacun à $\frac{1}{m}$ et payables à la fin de fractions de $\frac{1}{m}$ de période, peut être calculée

soit par la méthode rationnelle $\quad s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} s_{\overline{n}|} \quad$ où $i^{(m)} = m(r^{\frac{1}{m}} - 1)$,

soit par la méthode pratique $\quad s_{\overline{n}|}^{(m)} = (1 + \frac{m-1}{2m} i) s_{\overline{n}|}$.

La méthode rationnelle pour le calcul de $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ correspond à l'emploi du procédé de capitalisation (1). En effet la valeur finale des mn termes de $\frac{1}{m}$, calculée au moyen de ce procédé, s'exprime par

$$\frac{1}{m} \sum_{t=0}^{mn-1} r^{\frac{t}{m}}$$

et cette expression se transforme en $\quad \frac{i}{i^{(m)}} s_{\overline{n}|}$.

La méthode pratique pour le calcul de $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ correspond à l'emploi du procédé de capitalisation (2). En effet la valeur finale des mn termes de $\frac{1}{m}$, calculée au moyen de ce procédé, s'exprime par

$$\frac{1}{m} \sum_{t=0}^{mn-1} r^{\left[\frac{t}{m}\right]} \left\{ 1 + \left(\frac{t}{m} - \left[\frac{t}{m}\right] \right) i \right\}$$

où $\left[\frac{t}{m}\right]$ signifie: le plus grand entier compris dans $\frac{t}{m}$; après transformations l'expression ci-dessus devient

$$(1 + \frac{m-1}{2m} i) s_{\overline{n}|}.$$

Si l'on considère des termes de $\frac{1}{m}$ payables non pas à la fin mais au début de fractions de $\frac{1}{m}$ de période, on arrive, avec $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$, aux mêmes conclusions que celles qui ont été obtenues avec $s_{\overline{n}|}^{(m)}$. En effet les deux valeurs actuelles sont liées par la formule

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}(r^n - 1),$$

qui est indépendante de la méthode de calcul utilisée (rationnelle ou pratique).

2. Opérations d'escompte

Le «catalogue» des procédés communément disponibles pour escompter le montant 1 de n périodes au taux i comprend

v^n où $v = \frac{1}{r}$ (escompte à intérêt composé),

$1 - ni$ (escompte «en dehors»),

$\frac{1}{1 + ni}$ (escompte «en dedans»).

Considérons une durée de $N + f$ périodes, où N est un nombre entier positif ($N \in \mathbf{N}$) et f, un nombre réel positif inférieur à 1 ($0 < f < 1$). Si l'on étend à une durée n quelconque l'application de la formule d'escompte à intérêt composé, on calcule avec

$$v^N \, v^f \tag{3}$$

la valeur actuelle du montant 1 escompté de $N + f$ périodes au taux i. Le procédé d'escompte (3) intervient dans la formule

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \, a_{\overline{n}|}$$

qui permet de calculer, avec la méthode rationnelle, la valeur initiale d'une rente de mn termes égaux chacun à $\frac{1}{m}$ et payables à la fin de fractions de $\frac{1}{m}$ de période. En effet la valeur initiale des termes escomptés au moyen du procédé (3) s'exprime par

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}},$$

et cette somme se transforme en $\frac{i}{i^{(m)}} \, a_{\overline{n}|}$.

Par contre le «catalogue» des procédés d'escompte communément disponibles, cité précédemment, ne permet pas de préciser comment les termes sont escomptés par la formule pratique

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} \doteq \left(1 + \frac{m-1}{2m} \, i\right) a_{\overline{n}|}.$$

Dans cette formule se dissimule donc un type particulier d'escompte, qui ne figure pas au «catalogue».

3. Escompte technique

Proposons-nous d'escompter le montant 1 au taux i pendant une fraction f de période $(0 < f < 1)$

> en capitalisant à intérêt simple le montant 1 pendant la durée $1 - f$, puis en escomptant de une période la valeur trouvée.

On obtient
$$\left[1 + (1 - f)\, i\right] v,$$

résultat qui se transforme en
$$\boxed{1 - fd} \qquad \text{où} \qquad d = iv.$$

Dans la suite nous appellerons *escompte technique* ce procédé d'escompte à intérêt simple pendant une fraction de période.
Si, N étant un entier positif ($N \in \mathbf{N}$), on escompte le montant 1 de $N + f$ périodes au taux d'intérêt i en utilisant l'escompte à intérêt composé pour la durée N et l'escompte technique pour la durée f, on obtient

$$v^N (1 - fd). \tag{4}$$

Ce procédé d'escompte est celui que fait intervenir la formule pratique pour le calcul de $a_{\overline{n}|}^{(m)}$. En effet la valeur initiale des mn termes de $\frac{1}{m}$, calculée au moyen du procédé (4), s'exprime par

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{mn} v^{\left[\frac{t}{m}\right]} \left\{1 - \left(\frac{t}{m} - \left[\frac{t}{m}\right]\right) d\right\}$$

où $\left[\frac{t}{m}\right]$ signifie: le plus grand entier compris dans $\frac{t}{m}$; après transformations l'expression ci-dessus devient

$$\left(1 + \frac{m-1}{2m}\, i\right) a_{\overline{n}|} .$$

Les conclusions auxquelles on est parvenu en considérant $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ sont identiques à celles auxquelles on parviendrait en considérant $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$. En effet les deux valeurs initiales sont liées par la formule

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}(1 - v^n),$$

qui est indépendante de la méthode de calcul utilisée (rationnelle ou pratique).

4. Propriétés

Considérant un montant égal à B, on en calcule, au taux d'intérêt i,

la valeur A escomptée de $N + f$ périodes, et
la valeur C capitalisée de $M - N - f$ périodes,

N étant un nombre entier positif ($N \in \boldsymbol{N}$),
M étant un nombre entier positif autre que 0 ($M \in \boldsymbol{N}_0$),
f étant un nombre réel positif inférieur à 1 ($0 < f < 1$).

L'époque de calcul de C est postérieure de M périodes à celle de A. Désignons par A' la valeur de C escomptée de M périodes. Il est facile de montrer que si l'on utilise les procédés (1) de capitalisation et (3) d'escompte on obtient

$$A = A'.$$

Or on arrive au même résultat en utilisant le procédé (2) de capitalisation et le procédé (4) d'escompte, qui fait intervenir l'escompte technique. En effet, dans ce cas,

$$A = v^N (1 - fd) B \qquad C = r^{M-N-1}\left[1 + (1-f)\,i\right] B$$

$$A' = Cv^M = v^N (1 - fd) B = A.$$

Cette propriété explique pourquoi les relations

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = r^n a_{\overline{n}|}^{(m)} \qquad \text{et} \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = r^n \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$$

sont valables aussi bien avec l'emploi de la méthode rationnelle qu'avec celui de la méthode pratique.

Observons en outre, ce qui est une autre propriété de l'escompte technique, qu'on obtient le résultat (4) en calculant (3) par interpolation linéaire de v^n entre v^N et v^{N+1}. En effet

$$v^{N+f} \text{ (interp. lin.)} = (1 - f)\, v^N + f v^{N+1} = v^N (1 - fd).$$

5. Applications

L'escompte technique n'apparaît pas seulement dans l'expression de la valeur initiale, calculée avec la méthode pratique, de la rente temporaire à termes fractionnés. Citons, à titre d'exemples, les deux autres cas suivants.

a) La valeur actuelle d'une rente de k termes égaux chacun à 1, lorsque l'échéance du premier est postérieure d'une fraction f de période à l'époque de calcul, peut être calculée de deux manières différentes, mais équivalentes,

$$_{f|}\ddot{a}_{\overline{k|}} = v^f \ddot{a}_{\overline{k|}} = r^{1-f} a_{\overline{k|}},$$

si l'on utilise l'intérêt composé pour tenir compte de la fraction de période. Il en va de même lorsqu'on fait usage de l'escompte technique et de l'intérêt simple:

$$_{f|}\ddot{a}_{\overline{k|}} = (1 - fd)\, \ddot{a}_{\overline{k|}} = \left[1 + (1 - f)\, i\right] a_{\overline{k|}}.$$

b) Soit pour escompter un capital, soit pour déterminer la valeur initiale d'une rente différée, par exemple

$$_{n|}a_{\overline{k|}} = v^n a_{\overline{k|}},$$

on peut avoir besoin d'une valeur de v^n où $n = N + f$ (N et f étant définis comme précédemment). Selon que l'on utilise pour v^n

> une valeur calculée exactement, ou
> une valeur calculée par interpolation linéaire entre v^N et v^{N+1},

on applique

> le procédé d'escompte (3), ou
> le procédé d'escompte (4).

6. Comparaison avec l'escompte «en dedans»

Si, pour escompter le montant 1 de $N+f$ périodes (N et f étant définis comme précédemment), on utilise l'escompte à intérêt composé pour la durée N et l'escompte «en dedans» (voir chiffre 2 ci-dessus) pour la fraction f de période, on obtient

$$v^N \frac{1}{1+fi}. \tag{5}$$

Ce procédé n'a pas les propriétés de (4), qui fait intervenir l'escompte technique. Par contre, si B est la valeur capitalisée de A pendant $N+f$ périodes avec (2), il s'ensuit que A est la valeur escomptée de B pendant $N+f$ périodes avec le procédé (5), qui fait intervenir l'escompte «en dedans». En effet

$$B = r^N (1+fi)\, A \qquad \text{est équivalent à} \qquad A = v^N \frac{1}{1+fi}\, B.$$

Il n'en va pas de même si l'on fait intervenir l'escompte technique. Dans ce cas, si

$$B = r^N (1+fi)\, A$$

est la valeur de A capitalisée pendant $N+f$ périodes avec le procédé (2), on doit continuer la capitalisation pendant le complément de durée $1-f$ pour obtenir

$$B' = r^N (1+i)\, A = r^{N+1} A,$$

et c'est de B' que A est la valeur escomptée, la durée étant de $N+1$ périodes.

Zusammenfassung

Die in der Praxis übliche Methode zur Berechnung des Barwertes einer unterjährig zahlbaren Rente beruht auf einer besonderen Art von Diskontierung, die der Autor isoliert und analysiert.

Summary

The methods usually applied in practice to calculate the net value of an annuity payable in yearly fractions depend on a special method of discounting. This method is analyzed in the present paper.

Résumé

La méthode pratique pour calculer la valeur initiale d'une rente dont les termes sont payables par fractions fait intervenir un type particulier d'escompte que l'auteur isole et analyse.

Riassunto

Il metodo normalmente usato in pratica per il calcolo d'una rendita, i cui importi sono pagabili a rata, dipende d'una maniera particolare di scontare che l'autore isola e analizza.