Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 72 (1972)

Artikel: Ein Satz von Khintchin und die Varianz von unimodalen Verteilungen

Autor: Gerber, Hans U.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967086

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Satz von Khintchin und die Varianz von unimodalen Verteilungen

Hans U. Gerber, Universität von Michigan, Ann Arbor (USA)

1. Einführung und Zusammenfassung der Resultate

Die wichtigsten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind zweifellos ihr Erwartungswert und ihre Varianz (sofern sie existieren). Während es dem Theoretiker keine Mühe bereitet, diese Parameter auf Grund von unabhängigen und gleichwertigen Beobachtungen zu schätzen, mag es für den Praktiker oft unmöglich sein, dieses Rezept anzuwenden, da er vielfach nicht genügend viele (oder überhaupt keine!) unabhängige und gleichwertige Beobachtungen zur Verfügung hat. In solchen Situationen wird der Praktiker versuchen, wenigstens den Erwartungswert möglichst sinnvoll zu *schätzen* und hernach die Varianz unter gewissen Annahmen lediglich *abzuschätzen*. Ein Beispiel einer solchen Abschätzung findet man etwa in [1], Seite 33, wo angenommen wird, dass die Verteilungsfunktion eine steigende Ausfallrate (increasing failure rate) besitze.

Auf den folgenden Seiten werden Abschätzungen für die Varianz von unimodalen Verteilungen hergeleitet, wobei (nebst der Unimodalität) von Fall zu Fall noch zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden. Die Anwendung eines Satzes von Khintchin gestattet es, Resultate, die *Johnson & Rogers* [6] und *Jacobson* [5] bewiesen haben, auf einfachere Art herzuleiten und zu erweitern.

Definition 1. Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst *unimodal mit Modus bei m* (siehe [3], Seite 155), falls der Graph von $F(x)$ konvex ist in $(-\infty, m)$ und konkav in $(m, +\infty)$. Anschaulich heisst dies: Eine unimodale Verteilung darf im Modus eine Punktmasse haben; ansonsten besitzt sie aber eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die auf dem Intervall $(-\infty, m)$ nicht abnehmend, bzw. auf $(m, +\infty)$ nicht zunehmend ist. Ferner heisst dies, dass «der» Modus nicht immer eindeutig ist.

Definition 2. Eine diskrete Verteilung $\{p_k\}$ heisst *diskret unimodal mit Modus bei m* (m ganzzahlig), falls p_k nicht abnehmend ist für $k \leqslant m$ und nicht zunehmend für $k \geqslant m$.

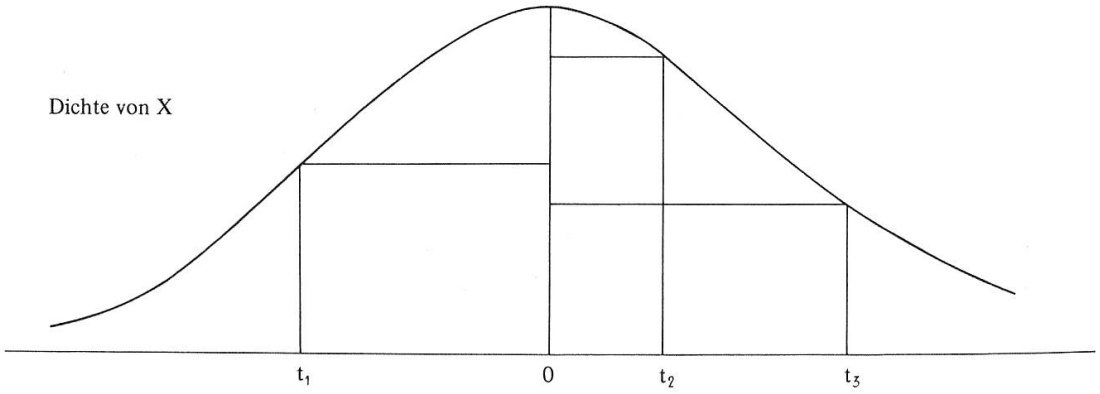
Unimodale Verteilungen sind sehr häufig anzutreffen. Von den zehn Verteilungen, die auf Seite 18/19 in [2] beschrieben werden, ist beispielsweise nur die Beta-Verteilung nicht für jede Wahl der Parameter unimodal. – Ein Irrtum, der keinem Geringeren als Kolmogorov im Zusammenhang mit der Faltung von unimodalen Verteilungen unterlaufen ist (siehe [4], Seite 254), verhalf den unimodalen Verteilungen zu zusätzlicher Popularität.

2. Instrumentarium

Der folgende Satz stammt von Khintchin ([3], Seite 155).

Satz 1. Eine Zufallsvariable X hat genau dann eine unimodale Verteilungsfunktion mit Modus bei Null, wenn sie das Produkt $X = UY$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen U, Y ist, wobei Y beliebig ist und U gleichförmig verteilt ist über (0,1).

Ein Beweis ergibt sich aus der Tatsache, dass die obige Produktformel gleichwertig ist zur Aussage, dass X aus der Familie $\{tU, -\infty < t < \infty\}$ durch Mischung erhalten werden kann, sowie aus einer geometrischen Interpretation dieser Aussage:



Für die Varianz eines Produktes $X = UY$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt allgemein:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(U)\,\mathrm{Var}(Y) + E(U)^2\,\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(U)\,E(Y)^2. \qquad (1)$$

Im Spezialfall, wo U gleichförmig über (0,1) verteilt ist[1]) (also $E(U) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(U) = \frac{1}{12}$), gilt

[1] Im folgenden bezeichnet U immer die über (0, 1) gleichverteilte Zufallsvariable.

$$\mathrm{Var}(X) = {}^1/_3\ \mathrm{Var}(Y) + {}^1/_{12}\ E(Y)^2 \tag{2}$$

und natürlich

$$E(X) = {}^1/_2\ E(Y). \tag{3}$$

Schliesslich benötigen wir das folgende wohlbekannte Lemma:

Lemma. Wenn die Zufallsvariable Y auf dem Intervall [0,1] konzentriert ist, dann gilt $\mathrm{Var}(Y) \leqslant E(Y)\,[1 - E(Y)]$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn Y Bernoulli-verteilt ist.

Der Vollständigkeit halber sei ein elementarer Beweis gegeben: Wir betrachten alle Y mit vorgegebenem Erwartungswert μ. Bezeichnen wir die Verteilungsfunktion von Y mit G(x), dann ergibt sich die Abschätzung aus der wörtlichen Definition der Varianz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \int_0^1 (x-\mu)^2\, dG(x) = \int_0^1 (x^2 - 2\mu x + \mu^2)\, dG(x) \\ &\leqslant \int_0^1 (x - 2\mu x + \mu^2)\, dG(x) = \mu(1-\mu).\end{aligned} \tag{4}$$

Gleichheit wird offenbar erreicht, falls Y auf der Menge der Punkte konzentriert ist, für die $x^2 = x$, d. h. falls Y Bernoulli-verteilt ist.
Falls Y auf einem endlichen Intervall [a, b] konzentriert ist, dann besagt obiges Lemma, dass

$$\mathrm{Var}(Y) \leqslant [E(Y) - a]\,[b - E(Y)]. \tag{5}$$

Diese Ungleichung wird verschärft werden unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass Y unimodal ist.

3. Schranken für die Varianz einer unimodalen Verteilung

Satz 2. (Johnson & Rogers)[2])
Falls X unimodal ist mit Erwartungswert μ und Modus m, dann ist $\mathrm{Var}(X) \geqslant {}^1/_3\,(m - \mu)^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn X gleichförmig verteilt ist.

[2] Auch das Momentenproblem, das von Johnson & Rogers behandelt wird, kann sehr einfach gelöst werden, wenn man Khintchins Satz anwendet.

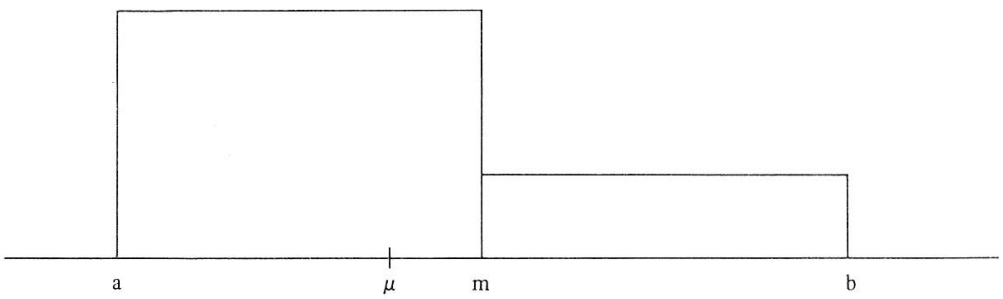
Der Beweis, für den man ohne Einschränkung an Allgemeinheit $m = 0$ voraussetzen darf, ergibt sich aus Satz 1 und den Formeln (2) und (3).
Obere Schranken erhält man, falls X beschränkt ist:

Satz 3. Falls X auf einem endlichen Intervall [a, b] konzentriert ist, und falls X unimodal ist mit Modus m und Erwartungswert μ, dann gilt

$$\mathrm{Var}(X) \leqslant {}^1/_3\,(2\mu - a - m)\,(b + m - 2\mu) + {}^1/_3\,(\mu - m)^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn X eine Mischung der beiden Zufallsvariablen $m + (b-m)U$ und $m-(m-a)U$ ist.

Gleichheit gilt also, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte von X folgendes Aussehen hat, wobei für «den» Modus m jener Wert genommen werden muss, der in der untenstehenden Zeichnung angegeben ist:



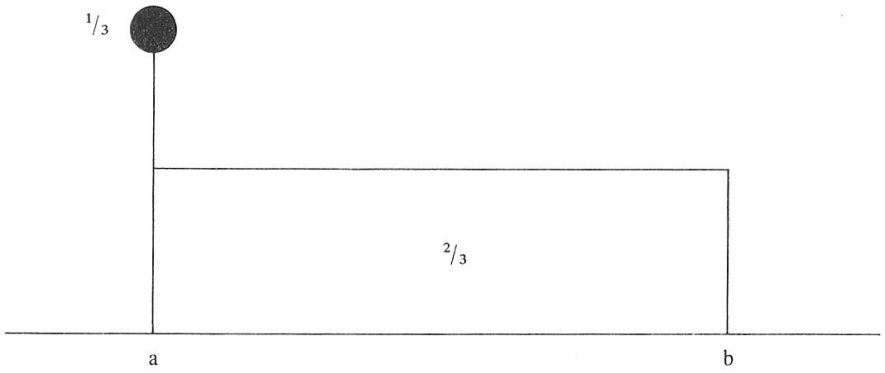
Für den Beweis dürfen wir $m = 0$ voraussetzen. Indem wir Satz 1 und (in dieser Reihenfolge) die Formeln (2), (5) und (3) anwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= {}^1/_3\,\mathrm{Var}(Y) + {}^1/_{12}\,E(Y)^2 \\ &\leqslant {}^1/_3\,[E(Y) - a]\,[b - E(Y)] + {}^1/_{12}\,E(Y)^2 \\ &= {}^1/_3\,(2\mu - a)\,(b - 2\mu) + {}^1/_3\,\mu^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Es wurde davon Gebrauch gemacht, dass auch Y auf dem Intervall [a, b] konzentriert ist, falls X diese Eigenschaft besitzt. Gleichheit gilt offenbar, wenn Y Bernoulli-verteilt ist, d.h. wenn X von der oben beschriebenen Form ist. Auf ähnliche Weise finden wir die maximale Varianz einer beschränkten unimodalen Verteilung:

Satz 4. (Jacobson)
Wenn X unimodal ist und auf einem endlichen Intervall [a, b] konzentriert ist, dann ist $\mathrm{Var}(X) \leqslant {}^1/_9\,(b-a)^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn X eine Mischung der Konstanten a (oder b) mit der Zufallsvariablen $a + (b-a)\,U$ ist, wobei die Gewichte $1/3$ und $2/3$ betragen.

Das Maximum wird also erreicht, falls die Wahrscheinlichkeitsmasse von X folgendermassen verteilt ist:



Für den Beweis nehmen wir wieder $m = 0$ an, so dass wir von Satz 1 Gebrauch machen können. Formel (2) zeigt, dass bei gegebener Länge $d = b - a$ des Intervalles und bei gegebenem $Y - a$ (d.h. bei gegebener «Gestalt» der Verteilung von Y) die Varianz von X genau dann maximal wird, wenn $E(Y)^2$ maximal ist, d. h. wenn $a = 0$ oder $b = 0$. Setzen wir also beispielsweise $a = 0$ und $b = d$. Indem wir (2) und (5) benützen, erhalten wir

$$\mathrm{Var}(X) \leqslant {}^1/_3\, E(Y)\,[d - E(Y)] + {}^1/_{12}\, E(Y)^2, \tag{7}$$

wobei Gleichheit gilt, falls Y Bernoulli-verteilt ist. Das Maximum der rechten Seite beträgt $^1/_9\, d^2$, und zwar wird es erreicht für $E(Y) = {}^2/_3\, d$. Dies heisst, dass das zugehörige Y Bernoulli-verteilt ist mit $P(Y = O) = {}^1/_3$ und $P(Y = d) = {}^2/_3$; das entsprechende X ist also eine Mischung der «Zufallsvariablen» 0 und dU, wobei die Gewichte $^1/_3$ und $^2/_3$ betragen.

4. Schranken für die Varianz einer diskret unimodalen Verteilung

Das diskrete Analogon von Satz 2 lautet:

Satz 5. Falls eine diskrete Zufallsvariable Z diskret unimodal ist mit Modus bei m und Erwartungswert μ, dann ist

$$\mathrm{Var}(Z) \geqslant {}^1/_3\,(|\mu - m| + {}^1/_2)^2 - {}^1/_{12}\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Z diskret gleichförmig verteilt ist.

Für den Beweis betrachten wir $X = U + Z$ (U, Z unabhängig). X ist unimodal im Sinne von Definition 1, wobei als Modus jede Zahl $m_X \in [m, m+1]$ genommen werden kann. Satz 2 ergibt

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(U) \geqslant {}^1/_3\,(m_X - \mu_X)^2 - {}^1/_{12}. \tag{8}$$

Die gesuchte Abschätzung ergibt sich jetzt aus $\mu_X = \mu + {}^1/_2$ und $m_X = m$ (im Falle $\mu \geqslant m$) oder $m_X = m + 1$ (im Falle $\mu < m$).
Das diskrete Analogon von Satz 3 ist etwas kompliziert, weshalb wir zum Analogon von Satz 4 übergehen:

Satz 6. Falls eine diskrete Zufallsvariable Z diskret unimodal ist und konzentriert auf $N \geqslant 2$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, dann ist $\mathrm{Var}(Z) \leqslant ({}^N/_3 - {}^1/_6)^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn die Verteilung von Z die Gestalt von $\{p_k\}$ hat, wobei

$$p_0 = {}^1/_3\,(1 + {}^1/_N)$$
$$p_1 = p_2 = \ldots = p_{N-1} = \frac{1}{N-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3N}\right).$$

$X = U + Z$ (U, Z unabhängig) ist unimodal im Sinne von Definition 1. Für den Beweis nehmen wir an, dass Null ein Modus von X sei. Für alle X, die diese Form haben, ist offenbar das Y in der Produktformel von Satz 1 diskret mit $P(Y = 0) = 0$ (und umgekehrt). Formel (2) zeigt, dass die maximale Varianz von Z erreicht wird, falls Y Bernoulli-verteilt ist, und zwar entweder über $\{1, N\}$ oder über $\{-1, N-1\}$. Wir untersuchen den ersten Fall und setzen $P(Y = 1) = 1 - p$, $P(Y = N) = p$. Anhand von Formel (2) erhält man

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(U) = {}^1/_3\,\mathrm{Var}(Y) + {}^1/_{12}\,E(Y)^2 - {}^1/_{12} \tag{9}$$
$$= ({}^N/_3 - {}^1/_6)^2 - [p(N-1)/2 - (N-1)/3 - {}^1/_6]^2.$$

Das Maximum beträgt also im ersten Fall $({}^N/_3 - {}^1/_6)^2$ und wird erreicht für $p = {}^2/_3 + \frac{1}{3(N-1)}$. Die entsprechende Verteilung von Z beträgt

$$p_0 = 1 - p + \frac{p}{N} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{N}\right) \tag{10}$$
$$p_1 = p_2 = \ldots = p_{N-1} = \frac{p}{N} = \frac{1}{N-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3N}\right)$$
$$p_k = 0 \text{ für } k \leqslant -1 \text{ und } k \geqslant N.$$

Im zweiten Fall erhält man für die maximale Varianz von Z denselben Wert, wobei die entsprechende Verteilung von Z aus (10) durch eine Verschiebung um —1 hervorgeht.

Referenzen

[1] *Barlow & Proschan:* Mathematical Theory of Reliability, Wiley, 1965.
[2] *Bühlmann:* Mathematical Methods in Risk Theory, Springer, 1970.
[3] *Feller:* An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 2, Wiley, 1966.
[4] *Gnedenko & Kolmogorov*, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley, 1954.
[5] *Jacobson* (1969): The maximum variance of restricted unimodal distributions. Ann. Math. Statist. *40*, 1746–1752.
[6] *Johnson & Rogers* (1951): The moment problem for unimodal distributions. Ann. Math. Statist. *22*, 433–439.

Zusammenfassung

Die Anwendung eines Satzes von Khintchin gestattet es, Resultate von Johnson & Rogers und Jacobson betreffend die Varianz von unimodalen Verteilungen auf einfache Weise herzuleiten und zu erweitern.

Summary

It is shown how a theorem of Khintchin can be used to derive and extend results regarding the variance of unimodal distributions that were previously obtained by Johnson & Rogers and Jacobson.

Résumé

L'usage d'un théorème de Khintchin permet de dériver d'une manière simple des résultats de Johnson & Rogers et Jacobson. Ces résultats peuvent être généralisés en appliquant la même méthode.

Riassunto

L'uso di un teorema di Khintchin permette di derivare in modo semplice i risultati di Johnson & Rogers e di Jacobson concernente la varianza delle distribuzioni unimodali. Questi risultati vengono generalizzati applicando lo stesso metodo.