Linearkombinationen von Verteilungsfunktionen und Stabilität

Autor(en): **Berghoff, Willi**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **71 (1971)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967170

Linearkombinationen von Verteilungsfunktionen und Stabilität

Von Willi Berghoff, Zürich

A. Einleitung

Viele Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik lassen sich eleganter oder überhaupt erst lösen, wenn charakteristische Funktionen und Laplace-Transformationen verwendet werden. Sie reduzieren transzendente Additionstheoreme, wie sie Faltungsoperationen darstellen, in ihrem Bildraum auf einfache Multiplikationen oder verwandeln gewisse Typen von Differentialgleichungen in gewöhnliche algebraische Ausdrücke.

Ein interessantes Beispiel der Verwendung solcher Abbildungen ist in der Arbeit des Russen *Ju. V. Linnik* über «identically distributed linear statistics» zu finden [1], werden doch zum Beweis ein und desselben Theorems beide Transformationsarten nacheinander herangezogen. Der Satz von Linnik lautet:

Gegeben sind

1. $X_1, X_2, \ldots, X_r$ unabhängige und identisch verteilte stochastische Variablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x)$,

2. zwei identisch verteilte Linearkombinationen

$$L_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_rX_r \qquad \text{und}$$

$$L_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_rX_r \qquad \text{mit}$$

$$\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_r|) \neq \max(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_r|),$$

3. eine ganze Funktion

$$\sigma(z) = |a_1|^z + |a_2|^z + \ldots + |a_r|^z - |b_1|^z - |b_2|^z - \ldots - |b_r|^z$$

der komplexen Variablen z,

4. γ die grösste reelle Nullstelle der ganzen Funktion $\sigma(z)$,

5. und von $F(x)$ existieren Momente bis zur Ordnung $2m$, wobei

$$m = \left[\frac{\gamma}{2} + 1\right].$$

6. Dann ist $F(x)$ eine Normalverteilung.

Der Beweis dieses sehr allgemeinen Theorems verdankt im Kern seine Lösung folgenden Ideen:

B. Skizzierung des Beweises von Linnik

Die beiden Linearformen L_1 und L_2 liefern den Gleichungsansatz

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_rX_r \cong b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_rX_r.$$

($\cong$ bedeutet identisch verteilt.)

Auf charakteristische Funktionen umgeschrieben, lautet diese Gleichung

$$f(a_1u)\, f(a_2u) \ldots f(a_ru) = f(b_1u)\, f(b_2u) \ldots f(b_ru)\,. \tag{1}$$

Werden die a_ν und b_ν normiert,
die Variablentransformation $u = e^t$ vorgenommen,
$a_\nu = e^{\alpha}_\nu$ und $b_\nu = e^{\beta}_\nu$ gesetzt
und die Gleichung logarithmiert,
so erhält sie die Form

$$\begin{aligned} \varnothing(t) + \varnothing(t+\alpha_2) + \ldots + \varnothing(t+\alpha_p) &= \varnothing(t+\beta_1) + \varnothing(t+\beta_2) \\ &+ \ldots + \varnothing(t+\beta_q)\,. \end{aligned}$$

Das ist ein spezieller Typ linearer Differentialgleichungen mit verschobenem Argument. Er enthält offenbar auch gewöhnliche periodische Funktionen

$$\varnothing(t) = \varnothing(t+\beta)\,,$$

weshalb Linnik bemerkt, es sei natürlich, Lösungen solcher Gleichungen verallgemeinerte periodische Funktionen zu nennen.

Die gestellte Aufgabe besteht nun darin, von allen stetigen Lösungen diejenigen zu lokalisieren, die Logarithmen von charakteristischen Funktionen stochastischer Variablen sind.

Gleichungen von der Form (1) lassen sich mit Vorteil mit Laplace-Transformationen behandeln. Unter Verwendung einer Beziehung von *Doetsch* [10] gelingt es Linnik, die *logarithmierte charakteristische Funktion von $F(x)$ als Laplace-Transformierte* in der Form

$$\chi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varnothing(t)\, dt = \frac{\sum_{\nu=2}^{p} e^{\alpha_\nu z} \int_0^{\alpha_\nu} e^{-zt} \varnothing(t)\, dt - \sum_{\nu=1}^{q} e^{\beta_\nu z} \int_0^{\beta_\nu} e^{-zt} \varnothing(t)\, dt}{1 + \sum_{\nu=2}^{p} e^{\alpha_\nu z} - \sum_{\nu=1}^{q} e^{\beta_\nu z}}$$

mit

$$\varnothing(t) = lg\, f(e^t) = lg\, f(u) = lg \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x)$$

darzustellen.

Die Darstellung von $\chi(z)$ zeichnet sich besonders durch die beiden folgenden Eigenschaften aus:

1. Kommen in ihr alle Faktoren

$$\alpha_\nu = lg\, a_\nu \quad \text{und} \quad \beta_\nu = lg\, b_\nu$$

vor, die die Form der Verteilung $F(x)$ bestimmen;

2. befriedigt der Nenner eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Wurzeln und sonstigen Eigenschaften vollständig bekannt sind. Diese Wurzeln sind die Pole von $\chi(z)$ und ermöglichen deshalb die Auswertung von $\chi(z)$ durch Residuenrechnung, ist doch

a) $\chi(z)$ als Laplace-Transformierte eine reguläre analytische Funktion und

b) sind die Residuen in den Nullstellen des Nenners bekannt.
Sie haben die Form

$$P_\nu(t)\, e^{t(\sigma_\nu + i\tau_\nu)} + \overline{P_\nu(t)}\, e^{t(\sigma_\nu - i\tau_\nu)} ,$$

wobei $P_{\nu}(t)$ ein Polynom darstellt, dessen genauere Bestimmung mit Hilfe des Operators

$$L_r(g) = \underbrace{\int_t^\infty dt \ldots \int_t^\infty}_{r \text{ mal}} g(t)\, dt$$

gelingt.

Die Konstruktion des Mehrfachintegrales

$$\chi(u, r) = \int_0^1 \frac{d\alpha_r}{\alpha_r} \int_0^1 \frac{d\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \ldots \int_0^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, u)$$

zur Abklärung des Einflusses der Existenz der Momente, d.h. der Ableitungen, und die Auswertung seiner Eigenschaften beschliessen den Beweis.

C. Verwendung stabiler Verteilungsfunktionen

Der Beweis von Linnik ist ausserordentlich umfangreich, erfordert bedeutende funktionentheoretische Kenntnisse und wird damit schwer zugänglich. Es wird deshalb im folgenden versucht, mit einfacheren und durchsichtigeren Mitteln in den Beweis und dessen Ergebnis einzudringen. Dabei ergibt sich, gleichsam als Nebenprodukt, der Nachweis, dass die Gleichung (1) tatsächlich Lösungen besitzt.

Wird Gleichung (1)

a) schrittweise aus charakteristischen Funktionen stabiler Verteilungen entwickelt und

b) entsprechend Abschnitt A, Ziffer 5 angenommen, dass von $F(x)$ mindestens die zweiten Momente existieren,

so kann gezeigt werden, dass $F(x)$ nur eine Normalverteilung sein kann.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich wie folgt:

1. In charakteristischen Funktionen angeschrieben, lautet der Gleichungsansatz von Linnik

$$f(a_1u)\,f(a_2u)\ldots f(a_pu) = f(b_1u)\,f(b_2u)\ldots f(b_qu) \qquad (1')$$

Nach § 4 des Beweises von *Linnik* [1] kann angenommen werden, alle Faktoren a_ν und b_ν seien grösser als Null. Ferner ist nach Lemma I $f(a_\nu u)$ *stets* $\neq 0$ und damit wegen $f(a_\nu u) \leqq 1$ längs der reellen Achse stets positiv. Die Gleichung kann deshalb in logarithmischer Form wie folgt angeschrieben werden:

$$\psi(a_1u) + \psi(a_2u) + \ldots + \psi(a_pu) = \psi(b_1u) + \psi(b_2u) + \ldots + \psi(b_qu) \qquad (2)$$

$$\text{mit } \psi(a_\nu u) = \log f(a_\nu u) .$$

2. Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst stabil, wenn zu jedem $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$ und zu jedem reellen c_1 und c_2 ein positives a und ein reelles c existiert, das die Gleichung

$$F\left(\frac{x-c_1}{a_1}\right) * F\left(\frac{x-c_2}{a_2}\right) = F\left(\frac{x-c}{a}\right)$$

erfüllt.

Auf charakteristische Funktionen umgeschrieben, lautet die Gleichung

$$f(a_1u)\,f(a_2u) = f(au)c^{i\gamma u} \qquad (3)$$

$$\text{mit } \gamma = c - c_1 - c_2 .$$

Sind ferner $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n positive, reelle Zahlen, so folgt aus Gleichung (3)

$$f(a_1u)\,f(a_2u)\ldots f(a_nu) = f(au)\,c^{i\gamma' u} .$$

Eine analoge Entwicklung der rechten Seite der Gleichung und die Bestimmung, dass $\gamma' = 0$ sein muss, ergibt den Ansatz von Gleichung (1′), die wiederum logarithmiert auf Gleichung (2) führt. Dass für den Fall $\gamma' = 0$ immer Lösungen existieren müssen, ergibt sich schon aus dem Hinweis, dass die obigen Gleichungen aus Verteilungsfunktionen aufgebaut werden können, die durchwegs den Mittelwert Null aufweisen.

3. Ein Theorem von *A. Ya. Khintchine* und *P. Lévy* [5] lautet: Damit die Verteilungsfunktion von $F(x)$ stabil ist, ist es notwendig,

dass der Logarithmus ihrer charakteristischen Funktion durch die Formel

$$\log f(t) = i\gamma t - c|t|^{\alpha} \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\} \tag{4}$$

dargestellt werden kann. Dabei müssen die Konstanten α, β, γ, c die Bedingungen

$$0 < \alpha \leqq 2,$$

$$|\beta| \leqq 1,$$

$$\gamma \text{ eine reelle Zahl}$$

$$\text{und } c \geqq 0$$

erfüllen.

Die Funktion $\omega(t, \alpha)$ ist gegeben durch

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} tg\,(\pi\alpha/2) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\log|t| & \text{wenn } \alpha = 1\,. \end{cases}$$

4. Ist anderseits die charakteristische Funktion einer Verteilung auf der reellen Achse mindestens in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes holomorph, so gilt die Taylor-Entwicklung für $u < r$

$$f(u) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{E_v}{v!} (iu)^v \tag{5}$$

mit den Momenten E_v und kann gegebenenfalls längs der reellen Achse analytisch fortgesetzt werden.

Sind die Momente nur bis zur Ordnung p vorhanden, so gilt nach *Paul Lévy* [4] Formel (5) in der abgeänderten Form

$$f(t) = \sum_{v=0}^{p} \frac{E_v}{v!} (it)^v + 0(|t|^p) \qquad (t \to 0), \tag{6}$$

$$\text{weil} \quad f^{(v)}(0) = i^v E_v \quad \text{und} \quad |f^{(v)}(t)| \leqq M\{|X|^v\}$$

$$\text{mit } v = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Für Verteilungen, bei denen mindestens das zweite Moment existiert, lautet der Logarithmus von (6)

$$\psi(t) = \log f(t) = \text{mit} - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + 0(t^2) \qquad (t \to 0), \tag{7}$$

wobei m den Mittelwert und σ^2 das Streuungsquadrat bedeuten.

5. Wird nun einerseits davon ausgegangen, dass die Gleichung (2) aus stabilen Funktionen entwickelt werden kann und anderseits dass mindestens deren zweite Momente existieren, so müssen die Formeln (4) und (7) wenigstens für eine gewisse Umgebung von $t = 0$ übereinstimmen. Diese Übereinstimmung wird erreicht, wenn in Formel (4)

$$\gamma = m$$

$$c = \frac{\sigma^2}{2}$$

und $$\alpha = 2\,, \quad \text{das bedeutet} \quad \omega\,(t, 2) = 0$$

gesetzt wird, womit für $\psi\,(t)$ eindeutig die Form

$$\psi\,(t) = \text{mit} - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

gefunden ist. Das ist jedoch die Formel des Logarithmus der charakteristischen Funktion der Normalverteilung.

6. Natürlich bringt der von Linnik erarbeitete Beweis, der von der allgemeinen Form einer Differentialgleichung ausgeht, für die Faktoren a_ν und b_ν vorerst irgendwelche Werte zulässt, dafür aber das Heranziehen umfangreicher und schwieriger funktionentheoretischer Mittel erfordert, tiefere Einblicke in die Struktur solcher Linearkombinationen, als dieser kurze indirekte Nachweis es vermag.

Literaturverzeichnis

[1] *Linnik, Ju. V.:* Linear forms and statistical criteria. Selected translations in mathematical statistics and probability, volume 3, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1962.

[2] *Lukacs, E.:* Characteristic functions, second edition, Charles Griffin & Company Ltd., London 1970.

[3] *Lukacs, E. and Laha, R.G.:* Applications of characteristic functions, No. 14 of Griffin's statistical monographs and courses, Charles Griffin & Company Ltd., London 1964.

[4] *Lévy, Paul:* Théorie de l'addition des variables aléatoires, Monographies des probabilités, fascicule I, Gauthier-Villars, Paris 1954.

[5] *Khintchine, A. Ya. und Lévy, P.:* Sur les lois stables, Compte rendu, Académie des sciences n° 202, Paris 1936.

[6] *Khintchine, A. Ya.:* Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, volume 6, Roma 1936.

[7] *Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N.*, übersetzt von *Chung, K.L.:* Limit Distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, USA, 1968.

[8] *Cramér, H.:* Random variables and probability distributions, Cambridge Tracts in Mathematics No. 36, Cambridge 1937.

[9] *van der Waerden, B.L.:* Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin 1957.

[10] *Doetsch, G.:* Handbuch der Laplace-Transformation, 3 Bände, Birkhäuser-Verlag, Basel 1956.

[11] *Titchmarsh, J.:* The theory of functions, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford 1939.

Zusammenfassung

Ju. V. Linnik gelang der Nachweis, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion zweier identisch verteilter Linearkombinationen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen nur eine Normalverteilung sein kann. Der Beweis ist sehr umfangreich, funktionentheoretisch anspruchsvoll und wird dadurch schwer zugänglich. Nach einer kurzen Skizzierung des Beweises wird deshalb versucht, mit einfacheren Mitteln, dafür unter einschränkenderen Voraussetzungen, den Beweis zu führen. Dies gelingt mit Hilfe stabiler Verteilungen.

Summary

Ju. V. Linnik has succeeded in proving that the common distribution function of two identically distributed linear forms will show only a normal distribution under very general conditions. The proof is very extensive, requires considerable knowledge of the theory of functions and is difficult. A brief outline of the proof is first given and then an attempt is made to derive the proof with simpler means but under restricted assumptions. This is possible with stable distributions.

Résumé

Ju. V. Linnik a prouvé que la fonction de distribution commune de deux combinaisons linéaires identiques dans des conditions très générales est exclusivement une distribution normale. La démonstration très longue, qui exige des connaissances de la théorie des fonctions approfondies, est difficilement accessible. Après une courte esquisse de cette démonstration, on a essayé avec des moyens plus simples, sous des conditions plus restreintes, de la retrouver. La réussite est assurée en employant des distributions stables.

Riassunto

Ju. V. Linnik ha dato la prova che la funzione di distribuzione comune di due combinazioni lineari identiche a premesse molto generali può essere unicamente una distribuzione normale. La prova è molto ampia, esigente sotto il profilo teorico funzionale, e quindi è di difficile accesso. Dopo un breve abbozzamento della prova, si è cercato con mezzi più semplici a condizioni limitate di reperirla. Ciò si ottenne con l'uso di distribuzioni stabili.