Zur Darstellung des Deckungskapitals in der Lebensversicherung

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **71 (1971)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967169

B

Wissenschaftliche Mitteilungen[1])

Zur Darstellung des Deckungskapitals in der Lebensversicherung

Von Ernst Zwinggi †, Basel

1. Darstellung und Berechnung des Deckungskapitals in der Lebensversicherung – vorwiegend der gemischten Versicherung – haben in der Literatur eine sehr eingehende Behandlung erfahren. Dennoch ist es möglich, dem Problem neue Aspekte abzugewinnen. – Die folgenden Darlegungen hängen, obwohl sie sich stets um das Deckungskapital bewegen, nur lose zusammen.

2. Die Ansätze werden durchwegs in die Form einer Differenzengleichung gebracht. Es ist deshalb angezeigt, zuerst die allgemeine Auflösung einer Differenzengleichung festzuhalten. Die Differenzengleichung hat die Gestalt

$$y(t+1) = h(t)\, y(t) + r(t) \tag{1}$$

mit

$$u(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} h(\tau)\,; \tag{2}$$

[1]) Zusatz des Redaktors:

In diesem Heft wird die Reihe der Publikationen fortgesetzt, welche den verehrten Herren Jubilaren Wyss und Jecklin gewidmet sind. Bestandteil der «Festgabe Wyss», welche am 7. Oktober in einer gediegenen Feier überreicht worden ist, sind die wissenschaftlichen Arbeiten der Herren Zwinggi, Berghoff, Pankow, Frischknecht und Kupper. Beiträge zur «Festgabe Jecklin» sind die Publikationen der Herren Ammeter, Nolfi und Bühlmann. Die Festschrift Jecklin soll gleichzeitig mit dem Frühjahrsheft 1972 erscheinen, welches noch einige weitere Arbeiten aus dieser Festschrift unserem Leserkreis zugänglich machen wird.

Die Lösung von (1) lautet

$$y(t) = u(t)\left[y(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{r(\tau)}{u(\tau+1)}\right] \tag{3}$$

3. Man ist in der Darstellung des Deckungskapitals gewohnt, die beiden Elemente Zins und Sterblichkeit so zu verbinden, dass das Deckungskapital als Summe von Endwerten oder Barwerten, d.h. von aufgezinsten oder diskontierten Prämien und Auszahlungen, erscheint. Das Total der eingenommenen Prämien und der erzielten Zinsen ist nicht getrennt ersichtlich, sondern – wie bereits bemerkt – in die Form von aufgezinsten Prämien [oder diskontierten] gebracht, zusammen mit den Auszahlungen [Todesfall- und Erlebensfallsummen]. Es ist aber leicht möglich, das Prämientotal und das Zinsentotal getrennt auftreten zu lassen, d.h. von Auf- oder Abzinsung ganz abzusehen. Für die eigentliche Berechnung ist die neue Formel allerdings nicht geeignet, aber sie ist bedeutend leichter zu verstehen als die übliche Darstellung über die diskontierten Zahlen D_x, N_x, C_x, M_x, usw.

Löst man die bekannte Rekursionsformel (der gemischten Versicherung)

$$({}_tV_x + P_x)(1+i) - q_{x+t} - p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x = 0$$

nach ${}_{t+1}\mathrm{V}_x$ auf,

also
$$ {}_{t+1}V_x = \frac{{}_tV_x}{p_{x+t}} + \frac{P_x}{p_{x+t}} + i\,\frac{{}_tV_x + P_x}{p_{x+t}} - \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}\,, $$

so kann nach (1) und (2) geschrieben werden

$$h(t) = \frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\,, \tag{4}$$

$$r(t) = \frac{P_x + i\,({}_tV_x + P_x) - q_{x+t}}{p_{x+t}} \tag{5}$$

$$u(t) = \frac{l_x}{l_{x+t}} \tag{6}$$

$$\frac{u(t)}{u(\tau+1)} = \frac{l_{x+\tau+1}}{l_{x+t}}\,. \tag{7}$$

Weil $\qquad y(t) = {}_tV_x \qquad$ und $\qquad y(0) = {}_0V_x$,

folgt aus (3) mit (5), (6) und (7)

$$ {}_tV_x = \frac{l_x}{l_{x+t}}\,{}_0V_x + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} [P_x + i({}_\tau V_x + P_x) - q_{x+\tau}]\,. \tag{8} $$

Formel (8) ist retrospektiver Art; wir wollen sie in eine prospektive Form überführen. Bei $t = n$ ist ${}_nV_x = 1$. Aus (8) wird

$$ {}_nV_x = 1 = \frac{l_x}{l_{x+n}}\,{}_0V_x + \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+n}} [P_x + i({}_\tau V_x + P_x) - q_{x+\tau}]\,, $$

und nach Multiplikation mit $\dfrac{l_{x+n}}{l_{x+t}}$ folgt

$$ \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} = \frac{l_x}{l_{x+t}}\,{}_0V_x + \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} [P_x + i({}_\tau V_x + P_x) - q_{x+\tau}]\,. $$

Das Intervall 0 bis $n-1$ teilen wir ein in die Abschnitte 0 bis $t-1$ und t bis $n-1$. Es wird mit

$$ s(\tau) = P_x + i({}_\tau V_x + P_x) - q_{x+\tau} $$

$$ \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} = \frac{l_x}{l_{x+t}}\,{}_0V_x + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}}\, s(\tau) + \sum_{\tau=t}^{n-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}}\, s(\tau)\,, \tag{9} $$

Die ersten beiden Glieder rechts stellen das retrospektive Dekkungskapital dar, das identisch ist mit dem prospektiven Deckungskapital; also

$$ {}_tV_x = \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} - \sum_{\tau=t}^{n-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}}\, s(\tau) = $$

$$ = \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} + \sum_{\tau=t}^{n-1} \frac{l_{x+\tau} q_{x+\tau}}{l_{x+t}} - \sum_{\tau=t}^{n-1} \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}}\, P_x - \sum_{\tau=t}^{n-1} i \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} ({}_\tau V_x + P_x) \tag{10} $$

und schliesslich

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{\tau=t}^{n-1} l_{x+\tau} P_x - \frac{i}{l_{x+t}} \sum_{\tau=t}^{n-1} l_{x+\tau} ({}_\tau V_x + P_x) \,. \tag{11} $$

Das zweite Glied rechts in (11) bedeutet die Summe aller eingenommenen Prämien, das dritte Glied die Summe aller erzielten Zinsen. Auf- oder Abzinsung tritt nicht auf; das erstrebte Ziel ist erreicht. Für $t = 0$ erhalten wir mit ${}_0V_x = 0$ die Äquivalenzgleichung

$$ 1 = \frac{1}{l_x} \sum_{\tau=0}^{n-1} l_{x+\tau} P_x + \frac{i}{l_x} \sum_{\tau=0}^{n-1} l_{x+\tau} ({}_\tau V_x + P_x) \,. \tag{12} $$

4. Das Deckungskapital der gemischten Versicherung bei unterjähriger Prämienzahlung für einen ganzzahligen Zeitpunkt t kann mit den Annahmen

a) Auszahlung der Todesfallsumme Ende Sterbejahr.

b) die Näherungsformel $\quad \ddot{a}^{(k)}_{x\overline{n}|} = \ddot{a}_{x\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$

werde nicht verwendet,

c) die Sterbewahrscheinlichkeit verlaufe innerhalb des Jahres linear und

d) die Verzinsung erfolge unterjährig, wie folgt dargestellt werden. Die Rekursionsformel lautet für den Intervall t bis $t + 1$

$$ l_{\ +t} \cdot {}_tV^{(k)}_x (1 + i) + \frac{P^{(k)}_x}{k} \sum_{\tau=0}^{1-1/k} l_{x+t+\tau} (1 + i)^{1-\tau} - $$

$$ - l_{x+t}\, q_{x+t} - l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(k)}_x = 0 \,. \tag{13} $$

Weil wegen der Annahme c)

$$ l_{x+t+\tau} = l_{x+t}(1 - \tau\, q_{x+t}) $$

folgt aus (13)

$$ {}_tV_x^{(k)}\,(1+i) + \frac{P_x^{(k)}}{k} \sum_{\tau=0}^{1-1/k} (1-\tau\, q_{x+t})\,(1+i)^{1-\tau} - $$

$$ - q_{x+t} - p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x^{(k)} = 0\,, \qquad (14) $$

d.h.

$$ {}_tV_x^{(k)}\,(1+i) + \frac{P_x^{(k)}}{k} \left[\sum_{\tau=0}^{1-1/k} (1+i)^{1-\tau} - q_{x+t} \sum_{\tau=0}^{1-1/k} \tau\,(1+i)^{1-\tau} \right] - $$

$$ - q_{x+t} - p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x^{(k)} = 0 \qquad (15) $$

oder

$$ {}_tV_x^{(k)}(1+i) + P_x^{(k)} \left[\ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)} - \frac{q_{x+t}}{k} \sum_{\tau=0}^{1-1/k} \tau\,(1+i)^{1-\tau} - \frac{q_{x+t}}{k} \right] + $$

$$ + \frac{P_x^{(k)}}{k}\, q_{x+t} - q_{x+t} - p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x^{(k)} = 0 \qquad (16) $$

Nun ist

$$ \sum_{\tau=0}^{1-1/k} \tau\,(1+i)^{1-\tau} + 1 = (I^{(k)} s)_{\overline{1|}}^{(k)}\,; $$

damit folgt

$$ {}_tV_x^{(k)}(1+i) + P_x^{(k)} \left[\ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)} - q_{x+t} \left\{ \frac{1}{k} (I^{(k)} s)_{\overline{1|}}^{(k)} - \frac{1}{k} \right\} \right] - $$

$$ - q_{x+t} - p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x^{(k)} = 0\,. \qquad (17) $$

Sei

$$ \frac{1}{k} (I^{(k)} s)_{\overline{1|}}^{(k)} - \frac{1}{k} = Z_{\overline{1|}}^{(k)}\,; \qquad (18) $$

dann wird

$$ {}_{t+1}V_x^{(k)} = \frac{1+i}{p_{x+t}}\, {}_tV_x^{(k)} + \frac{1}{p_{x+t}}\, P_x^{(k)}\, \ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)} - \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}} \left[1 + P_x^{(k)} Z_{\overline{1|}}^{(k)} \right]. \qquad (19) $$

In der Differenzengleichung (3) ist

$$h(t) = \frac{1+i}{p_{x+t}},$$

$$u(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \frac{1+i}{p_{x+\tau}} = \frac{(1+i)^t l_x}{l_{x+t}},$$

$$r(\tau) = \frac{1}{p_{x+\tau}} P_x^{(k)} \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)} - \frac{q_{x+\tau}}{p_{x+\tau}} \left[1 + P_x^{(k)} Z_{\overline{1}|}^{(k)}\right] \tag{20}$$

und schliesslich

$$ {}_tV_x^{(k)} = \frac{D_x}{D_{x+t}}\, {}_0V_x^{(k)} + \frac{P_x^{(k)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)}}{D_{x+t}} (N_x - N_{x+t}) -$$

$$- \frac{1 + P_x^{(k)} Z_{\overline{1}|}^{(k)}}{D_{x+t}} (M_x - M_{x+t}) . \tag{21}$$

Im Grenzfall $k = 1$ ist $Z_{\overline{1}|}^{(k)} = 0$ und $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)} = 1$,

also $${}_tV_x = \frac{D_x}{D_{x+t}}\, {}_0V_x + P_x \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} .$$

5. Soll das Deckungskapital für einen gebrochenen Zeitpunkt $t + \frac{h}{k}$ bestimmt werden, mit unterjähriger Prämienzahlung, so kann gleich vorgegangen werden wie unter Ziffer 4. Die Voraussetzungen a) bis d) sollen auch hier gelten.

Die Rekursionsformel für das Intervall $t + \frac{h}{k}$ bis $t + \frac{h+1}{k}$ lautet

$$l_{x+t+\frac{h}{k}} \cdot {}_{t+\frac{h}{k}}V_x^{(k)} (1+i)^{\frac{1}{k}} + l_{x+t+\frac{h}{k}} \frac{P_x^{(k)}}{k} (1+i)^{\frac{1}{k}} -$$

$$-\left(l_{x+t+\frac{h}{k}} - l_{x+t+\frac{h+1}{k}}\right) v^{1-\frac{h+1}{k}} - l_{x+t+\frac{h+1}{k}} \cdot {}_{t+\frac{h+1}{k}}V_x^{(k)} = 0 . \tag{22}$$

Wegen des angenommenen linearen Verlaufs der Sterbewahrscheinlichkeit innerhalb des Jahres ist

$$l_{x+t+\frac{h}{k}} - l_{x+t+\frac{h+1}{k}} = \frac{1}{k} l_{x+t}\, q_{x+t} \,.$$

Wir schreiben für

$$_{t+\frac{h}{k}}V_x^{(h)} = V\left(\frac{h}{k}\right),$$

$$_{t+\frac{h+1}{k}}V_x^{(k)} = V\left(\frac{h+1}{k}\right)$$

und erhalten

$$\left(1 - \frac{h}{k} q_{x+t}\right) V\left(\frac{h}{k}\right)(1+i)^{\frac{1}{k}} + \left(1 - \frac{h}{k} q_{x+t}\right) \frac{P_x^{(k)}}{k} (1+i)^{\frac{1}{k}} -$$

$$- \frac{1}{k} q_{x+t}\, (1+i)^{\frac{h+1-k}{k}} - \left(1 - \frac{h+1}{k} q_{x+t}\right) V\left(\frac{h+1}{k}\right) = 0 \,. \qquad (23)$$

Daraus ist

$$V\left(\frac{h+1}{k}\right) = \frac{1 - \frac{h}{k} q_{x+t}}{1 - \frac{h+1}{k} q_{x+t}} V\left(\frac{h}{k}\right)(1+i)^{\frac{1}{k}} +$$

$$+ \frac{1 - \frac{h}{k} q_{x+t}}{1 - \frac{h+1}{k} q_{x+t}} \frac{P_x^{(k)}}{k} (1+i)^{\frac{1}{k}} - \frac{\frac{q_{x+t}}{k}}{1 - \frac{h+1}{k} q_{x+t}} (1+i)^{\frac{h+1-k}{k}} \,. \qquad (24)$$

Sodann ist

$$h(\tau) = \frac{1 - \frac{\tau}{k} q_{x+t}}{1 - \frac{\tau+1}{k} q_{x+t}} (1+i)^{\frac{1}{k}},$$

$$r(\tau) = \frac{1 - \frac{\tau}{k} q_{x+}}{1 - \frac{\tau+1}{k} q_{x+t}} \frac{P_x^{(k)}}{k} (1+i)^{\frac{1}{k}} -$$

$$- \frac{\frac{q_{x+t}}{k}}{1 - \frac{\tau+1}{k} q_{x+t}} (1+i)^{\frac{\tau+1-k}{k}}.$$

Die Differenzengleichung hat dann die Lösung

$$\begin{aligned} {}_{t+\frac{h}{k}}V_x^{(k)} &= \frac{l_{x+t}}{l_{x+t+\frac{h}{k}}} \, {}_tV_x^{(k)} (1+i)^{\frac{h}{k}} + \\ &+ \frac{1}{l_{x+t+\frac{h}{k}}} \frac{P_x^{(k)}}{k} \sum_{\tau=0}^{h-1} l_{x+t+\frac{\tau}{k}} (1+i)^{\frac{h-\tau}{k}} - \\ &- \frac{1}{l_{x+t+\frac{h}{k}}} \frac{h \, l_{x+t} \, q_{x+t}}{k} v^{1-\frac{h}{k}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Zusammenfassung

Die Arbeit umfasst drei Teile, die alle das Deckungskapital der gemischten Versicherung betreffen, aber nur lose zusammenhängen.

1. Für das Deckungskapital wird eine Darstellung gegeben, die nicht von auf- oder abgezinsten Beträgen ausgeht, sondern die Summe der eingegangenen Prämien und die Summe der eingenommenen Zinsen zeigt.

2. Sodann wird das Deckungskapital Ende Versicherungsjahr bei unterjähriger Prämienzahlung ermittelt, wobei bestimmte Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit über das Versicherungsjahr gelten und man ohne die übliche Formel für den Barwert der unterjährig zahlbaren Leibrente auskommt.

3. Mit den gleichen Annahmen wie unter 2 wird das Deckungskapital für einen unterjährigen Zeitpunkt ermittelt.

Summary

The paper is composed of three sections, each dealing with the mathematical reserves of the endowment insurance, but these sections are not closely connected.

1. An illustration is given for the mathematical reserves which is not based on capitalised or discounted amounts, but only shows the sum of premium and interest income.

2. Thereafter, the mathematical reserve at the end of the policy year is determined taking into account premium payment by instalments. For this purpose certain assumptions are made with respect to mortality during the policy year, and it has not been necessary to resort to the usual formula for the cash value of annuities payable by instalments.

3. Using the same assumptions as under 2, the mathematical reserves are established for an intermediate date during the year.

Résumé

Le présent travail comprend trois parties se rapportant toutes à la réserve mathématique de l'assurance mixte, mais sans liens étroits.

1. On établit une formule permettant de représenter la réserve mathématique en mettant en évidence la somme des primes encaissées et celle des intérêts perçus. On évite donc l'emploi de valeurs capitalisées.

2. On calcule ensuite la réserve mathématique à la fin de l'année d'assurance en supposant les primes fractionnées. Certaines hypothèses relatives au cours de la mortalité pendant l'année permettent d'éviter la formule usuelle de la valeur actuelle de la rente viagère fractionnée.

3. En conservant les hypothèses mentionnées sous 2°, on calcule la réserve en un point quelconque de l'année.

Riassunto

Il lavoro è composto di tre parti, unite tra loro vagamente, le quali si riferiscono alla riserva matematica dell'assicurazione mista.

1. Per la riserva matematica viene data una rappresentazione che non parte dagli importi con o senza interessi, ma mostra la somma dei premi riscossi e la somma degli interessi realizzati.

2. Dopo viene determinata la riserva matematica alla fine di un anno assicurativo con frazionamento del pagamento dei premi, tenuto conto che valgono determinate supposizioni in merito al decorso della mortalità nell'anno assicurativo e che ci si avvia senza considerare la formula abituale per il valore attuale delle rendite vitalizie a pagamento frazionato.

3. Con le stesse supposizioni come sotto il 2 viene determinata la riserva matematica in punto dell'anno.