

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 70 (1970)

**Artikel:** Zur Theorie der Invaliditätsversicherung

**Autor:** Türlér, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-967034>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

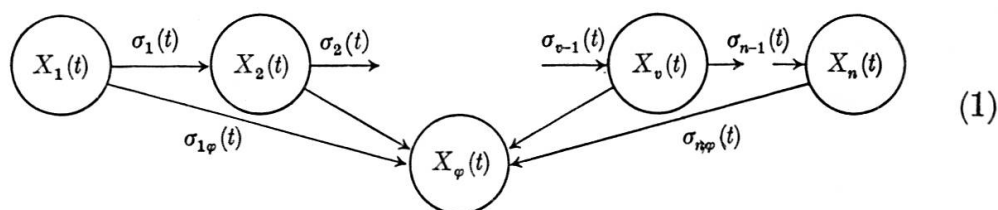
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Theorie der Invaliditätsversicherung

Von H. Türler, Bogotá

### Einleitung

Es sollen in der vorliegenden Untersuchung die wesentlichen Beziehungen der biometrischen Grössen der Invaliditätsversicherung, als Spezialfall eines allgemeinen Bestandessystemes, zur Darstellung gebracht werden. Ausgegangen werde allgemein von  $n$  Versichertenbeständen  $X_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), zwischen denen auf Grund stetiger Übergangintensitäten in der zeitlichen Folge Übergänge stattfinden. Betrachtet werden  $l_{t_0}$  Personen, die sich gemäss einer Anfangsbedingung über die verschiedenen Bestände verteilen. Für die folgenden Untersuchungen erweist sich das spezialisierte Bestandesmodell, in welchem jeder vorhandene Bestand nur aus dem vorhergehenden entstehen, kann als zweckmässig. Neben der Änderung des Zustandes  $X_v \rightarrow X_{v+1}$  soll des weitern das Ausscheiden  $X_v \rightarrow X_\varphi$  berücksichtigt werden, ein Vorgang, den wir schematisch wie folgt veranschaulichen können:



Legen wir unsern Betrachtungen die Voraussetzungen eines Geburts- und Todesprozesses zugrunde, so resultiert – bei der Anfangsbedingung  $X_1(t)|_{t=t_0} = l_{t_0}$  – dass unser System multinomialverteilt ist,

wobei für die Erwartungswerte  $E[X_v(t)]$  der einzelnen Bestände  $X_v(t)$  sich nachstehendes Differentialgleichungssystem herleiten lässt<sup>1)</sup>:

$$\frac{d}{dt} E[X_1(t)] = -(\sigma_1(t) + \sigma_{1\varphi}(t)) E[X_1(t)] \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} E[X_v(t)] = \sigma_{v-1}(t) E[X_{v-1}(t)] - (\sigma_v(t) + \sigma_{v\varphi}(t)) E[X_v(t)]; 2 \leq v \leq n.$$

Durch Integration des Systemes (2) erhalten wir für die Erwartungswerte folgende Lösungen:

$$E[X_1(t)] = l_{t_0} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} (\sigma_1(\theta) + \sigma_{1\varphi}(\theta)) d\theta}$$

$$E[X_v(t)] = l_{t_0} \cdot \prod_{\xi=2}^v f(v - \xi + 2) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} (\sigma_1(\theta) + \sigma_{1\varphi}(\theta)) d\theta} dt; \quad (3)$$

wobei für  $f(\xi) = \int_{t_0}^{t_\xi} \sigma_{\xi-1}(t_{\xi-1}) \cdot e^{-\int_{t_{\xi-1}}^{t_\xi} (\sigma_\xi(\theta) + \sigma_{\xi\varphi}(\theta)) d\theta}$

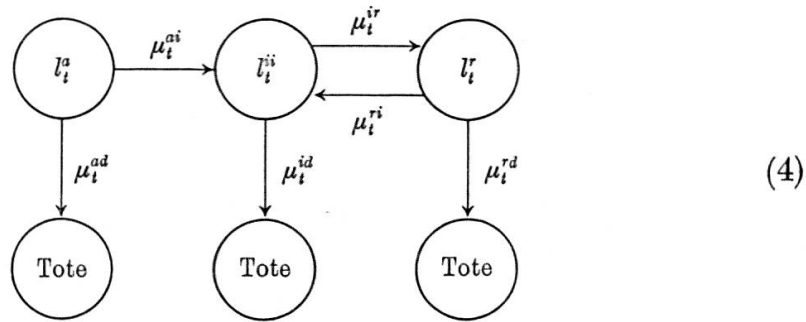
und  $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_{v-1}$  gesetzt wurde.

### Bestandesmodell der Invaliditätsversicherung

Wir betrachten das Bestandssystem  $t$ -jähriger Individuen, das sich aus  $l_t^a$  Vollaktiven – d.h. nie invalid gewordenen –  $l_t^i$  Invaliden,  $l_t^r$  Reaktivierten sowie den entsprechenden Toten zusammensetzt.

---

<sup>1)</sup> Vergleiche *H. Türler*: Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 69 (2), 169–183.



Die Vollaktiven  $l_i^a$  und die Reaktivierten  $l_i^r$  ergeben zusammen den Bestand der Aktiven  $l_i^{aa}$ . Die Aktiven  $l_i^{aa}$  und die Invaliden  $l_i^{ii}$  bilden die Gesamtheit der Lebenden  $l_t$ , wobei für das Alter  $t = t_0$  gilt:  $l_i^{ii} = l_{t_0}^r = 0$ .

Wie aus dem obigen Schema ersichtlich ist, treten folgende Übergangintensitäten auf:

1. Die Gesamtausscheideintensität  $\mu_i^a$  der Vollaktiven  $l_i^a$ , die sich aus der Sterblichkeitsintensität  $\mu_i^{ad}$  und der Invalidierungsintensität  $\mu_i^{ai}$  additiv zusammensetzt.
2. Die Gesamtausscheideintensität  $\mu_i^i$  aus dem Invalidenbestand  $l_i^{ii}$ , die sich analog aus der Sterblichkeitsintensität  $\mu_i^{id}$  und der Reaktivierungsintensität  $\mu_i^{ir}$  bilden lässt.
3. Die Gesamtausscheideintensität  $\mu_i^r$  aus dem Bestand der Reaktivierten  $l_i^r$  lässt sich ebenfalls in eine Sterblichkeitskomponente  $\mu_i^{rd}$  und eine Invalidierungskomponente  $\mu_i^{ri}$  aufteilen.

Um unsern Ausführungen die nötige Allgemeinheit zu verleihen, wollen wir noch die zusätzliche Annahme treffen, sowohl die Ausscheideintensitäten  $\mu_i^i$  aus dem Bestand der Invaliden wie auch  $\mu_i^r$  aus dem Bestand der Reaktivierten seien nicht nur eine Funktion des Alters  $t$ , sondern zusätzlich eine Funktion der Dauer  $t - \tau$ , während welcher das Individuum in ununterbrochenem Zustand dem entsprechenden Bestand angehörte. Somit erhalten wir folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mu_i^a &= \mu_i^{ad} + \mu_i^{ai} \\ \mu_i^i &= \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^i d\tau = \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^{id} d\tau + \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^{ir} d\tau \\ \mu_i^r &= \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^r d\tau = \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^{ri} d\tau + \int_{t_0}^t \mu_{[\tau]+t-\tau}^{rd} d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

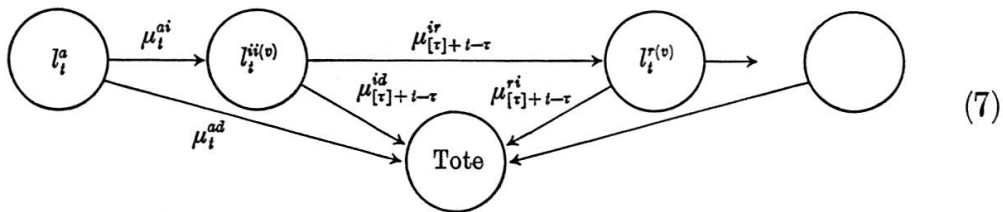
Die drei zugehörigen Ausscheideordnungen sind durch

$$\begin{aligned}
 {}_{t-t_0}p_{t_0}^a &= e^{-\int_{t_0}^t \mu_{\theta}^a d\theta} = l_t^a / l_{t_0}^a \\
 {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^i &= e^{-\int_{\tau}^t \mu_{[\tau]+\theta-\tau}^i d\theta} = l_{[\tau]+t-\tau}^i / l_{[\tau]}^i \\
 {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^r &= e^{-\int_{\tau}^t \mu_{[\tau]+\theta-\tau}^r d\theta} = l_{[\tau]+t-\tau}^r / l_{[\tau]}^r
 \end{aligned} \tag{6}$$

bestimmt.  ${}_{t-t_0}p_{t_0}^a$  ist somit die Wahrscheinlichkeit eines  $t_0$ -jährigen Vollaktiven, das Alter  $t$  in demselben Zustand zu erleben, während  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^i$  (bzw.  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^r$ ) die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein im Alter  $\tau$  invalidiertes (bzw. reaktiviertes) Individuum ohne Unterbrechung des Zustandes der Invalidität (bzw. Aktivität) das Alter  $t$  erlebt.

### Berechnung des Bestandesmodells

Werden im Modell (1) die Bestände und die Übergangsintensitäten wie folgt gewählt,



so haben wir es wieder mit Modell (4) zu tun, wobei sich sowohl der Bestand der Invaliden  $l_t^{ii}$  wie auch derjenige der Reaktivierten  $l_t^r$  als  $\sum_v$  der zum  $v$ ten Male Invalidierten  $l_t^{ii(v)}$  bzw. Reaktivierten  $l_t^{r(v)}$  darstellen lassen. Mit Hilfe der Resultate (3) ist somit ebenfalls das Modell (4) gelöst.

1. Bestand der Vollaktiven

Durch Verwendung von (3) folgt

$$E[X_1(t)] = l_t^a = l_{t_0} \cdot e^{-\int_{t_0}^t \mu_\theta^a \cdot d\theta} \quad (8)$$

2. Bestand der Invalidisierten

Werden ebenfalls in (3) die Bezeichnungen von (7) verwendet, so folgt für den Erwartungswert der zum  $v^{\text{ten}}$  Male Invalidierten

$$E[X_2(t)] = l_t^{ii(1)} = l_{t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_2} \mu_{t_1}^{ai} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \mu_\theta^i \cdot d\theta} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} \mu_\theta^a \cdot d\theta} dt_1$$

$$E[X_{2v}(t)] = l_t^{ii(v)} = l_{t_0} \cdot \prod_{\xi=2}^v g(2v-2\xi+4) \int_{t_0}^{t_2} \mu_{t_1}^{ai} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \mu_\theta^i \cdot d\theta} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} \mu_\theta^a \cdot d\theta} dt ;$$

$v \geq 2$

mit  $g(\eta) = \int_{t_0}^{t_\eta} \mu_{t_{\eta-1}}^{ri} \cdot e^{-\int_{t_{\eta-1}}^{t_\eta} \mu_\theta^i \cdot d\theta} \cdot \int_{t_0}^{t_{\eta-1}} \mu_{t_{\eta-2}}^{ir} \cdot e^{-\int_{t_{\eta-2}}^{t_{\eta-1}} \mu_\theta^r \cdot d\theta}$

und  $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_{v-1}$ . (9)

Werden die Beziehungen (5) und (6) in (9) eingesetzt, so resultiert nach einigen Dirichletschen Vertauschungen der Integrationsvariablen

$$l_t^{ii(v)} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau l_\xi^a \cdot \mu_\xi^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_\tau^i \cdot {}_{\tau-\xi}p_{[\xi]}^{ii(v-1)} \cdot d\xi d\tau \quad v \geq 2. \quad (10)$$

Hier wurden folgende Substitutionen verwendet

$$\begin{aligned} {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii} &= \int_{\tau}^t {}_{\xi-\tau}p_{[\tau]}^i \cdot \mu_{[\tau]+\xi-\tau}^{ir} \cdot {}_{t-\xi}p_{[\xi]}^r \cdot \mu_{[\xi]+t-\xi}^{ri} d\xi \\ {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii(1)} &= {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii} \\ {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii(v+1)} &= \int_{\tau}^t {}_{\xi-\tau}p_{[\tau]}^{(ii)v} \cdot {}_{t-\xi}p_{[\xi]}^{ii} d\xi. \end{aligned}$$

${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii} dt$  ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male invalidisiertes Individuum zum nächsten Male in der Altersstrecke  $t/t + dt$  wieder invalidisiert werde, während  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii(v)} dt$  die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, dass ein im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male invalidisiertes Individuum nach gerade  $v$ -maliger Reaktivierung in der Altersstrecke  $t/t + dt$  invalidisiert werde.

Da sich die Invaliden  $l_t^{ii}$  als  $\sum_v l_t^{ii(v)}$  darstellen lassen, resultiert

$$\begin{aligned} l_t^{ii} &= l_t^{ii(1)} + \sum_{v=2}^{\infty} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} l_{\xi}^a \cdot \mu_{\xi}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^i \cdot {}_{\tau-\xi}p_{[\xi]}^{ii(v-1)} d\xi d\tau \\ l_t^{ii} &= \int_{t_0}^t l_{\tau}^a \cdot \mu_{\tau}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^i + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} l_{\xi}^a \cdot \mu_{\xi}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^i \cdot {}_{\tau-\xi}P_{[\xi]}^{ii} d\xi d\tau \quad (11) \end{aligned}$$

---

mit  ${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{ii} = {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii(1)} + {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii(2)} + \dots$  ;

somit ist  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ii} \cdot dt$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male invalidiertes Individuum nach mindestens einmaliger Reaktivierung in der Altersstrecke  $\tau, t$  wieder in der Altersstrecke  $t/t + dt$  invalidisiert werde.

### 3. Bestand der Reaktivierten

Der Erwartungswert der zum  $v^{\text{ten}}$  Male Reaktivierten ist ebenfalls durch die Beziehung (3) bestimmt, wobei unter Verwendung der Bezeichnungen des Modells (7) folgt:

(12)

$$E[X_3(t)] = l_t^{r(1)} = l_{t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_3} \mu_{t_2}^{ir} \cdot e^{-\int_{t_2}^{t_3} \mu_{\theta}^r \cdot d\theta} \int_{t_0}^{t_2} \mu_{t_1}^{ai} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} \mu_{\theta}^a \cdot d\theta} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \mu_{\theta}^i \cdot d\theta} dt_1 \cdot dt_2$$

$$E[X_{2v+1}(t)] = l_t^{r(v)} = l_{t_0} \cdot \prod_{\xi=2}^v h(2v-2\xi+5) \int_{t_0}^{t_3} \mu_{t_2}^{ir} \cdot e^{-\int_{t_2}^{t_3} \mu_{\theta}^r \cdot d\theta} \int_{t_0}^{t_2} \mu_{t_1}^{ai} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \mu_{\theta}^i \cdot d\theta} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} \mu_{\theta}^a \cdot d\theta} dt, \quad v \geq 2;$$

mit  $h(\eta) = \int_{t_0}^t \mu_{\eta-1}^{ir} \cdot e^{-\int_{\eta-1}^{\eta} \mu_{\theta}^r \cdot d\theta} \int_{t_0}^{\eta-1} \mu_{t_{\eta-2}}^{ri} \cdot e^{-\int_{\eta-2}^{\eta-1} \mu_{\theta}^i \cdot d\theta}$  und  $dt = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_{2v}$ .

Werden die Beziehungen (5) und (6) in (12) eingesetzt, so erhält man nach Anwendung derselben Diricletschen Umformungen, die auf (10) geführt haben,

$$l_t^{r(v)} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} l_{\eta}^a \cdot \mu_{\eta}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^r \int_{\eta}^{\tau} {}_{\theta-\eta}P_{[\eta]}^{ir} \cdot {}_{\tau-\theta}P_{[\theta]}^{rr(v)} \cdot d\theta \cdot d\eta \cdot d\tau. \quad (13)$$

Nützlich haben sich hier folgende Substitutionen erwiesen

$${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr} = \int_{\tau}^t {}_{\xi-\tau}P_{[\tau]}^r \cdot \mu_{[\tau]+\xi-\tau}^{ri} \cdot {}_{t-\xi}P_{[\xi]}^r \cdot \mu_{[\xi]+t-\xi}^{ir} d\xi$$

$${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{ir} = {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^i \cdot \mu_{[\tau]+t-\tau}^{rr} \quad (14)$$

$${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr(1)} = {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr}; \quad {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr(v)} = \int_{\tau}^t {}_{\eta-\tau}P_{[\tau]}^{rr} \cdot {}_{t-\eta}P_{[\eta]}^{rr} \cdot d\eta$$

Bei Betrachtung der Beziehungen (14) erweist sich  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{rr} \cdot dt$  als Wahrscheinlichkeit eines im Alter  $\tau$  zum  $v^{\text{ten}}$  Male reaktivierten Individuums, zum nächsten Male in der Altersstrecke  $t/t + dt$  wieder zu reaktivieren, während  ${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ir} \cdot dt$  die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass ein im Alter  $\tau$  zum  $v^{\text{ten}}$  Male invalidiertes Individuum nach ununterbrochener Invalidität bis zum Alter  $t$ , in der Altersstrecke  $t/t + dt$  reaktiviert werde.

${}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{rr(v)} \cdot dt$  gibt des weitern die Wahrscheinlichkeit eines im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male reaktivierten Individuums an, das, nach gerade  $v$ -maliger Invalidität im Altersintervall  $\tau/t$ , in der Altersstrecke  $t/t + dt$  wieder reaktiviert werde.

Aus Beziehung (13) resultiert für den Erwartungswert der Reaktivierten  $l_i^r$

$$l_i^r = l_i^{r(1)} + \sum_v l_i^{r(v)}.$$

Wird die explizite Darstellung von  $l_i^{r(1)}$

$$l_i^{r(1)} = \int_{i_0}^t \int_{i_0}^{\tau} l_{\eta}^a \cdot \mu_{\eta}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^r \cdot {}_{\tau-\eta}p_{[\eta]}^{ir} \cdot d\eta \cdot d\tau$$

verwendet, so folgt

$$l_i^r = \int_{i_0}^t \int_{i_0}^{\tau} l_{\eta}^a \cdot \mu_{\eta}^{ai} \cdot {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^r \cdot {}_{\tau-\eta}P_{[\eta]}^{ir} \cdot d\eta \cdot d\tau. \quad (15)$$

Es wurden die nachstehenden Substitutionen ausgeführt

$$\begin{aligned} {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr} &= {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{rr(1)} + {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{rr(2)} + \dots, \\ {}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{ir} &= {}_{t-\tau}p_{[\tau]}^{ir} + \int_{\tau}^t {}_{\eta-\tau}p_{[\tau]}^{ir} \cdot {}_{t-\eta}P_{[\eta]}^{rr} \cdot d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Die in der Formel (15) eingehenden Beziehungen (16) haben trotz ihrem komplizierten Aufbau recht einfache Bedeutungen.  ${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{rr} \cdot dt$  gibt nämlich die Wahrscheinlichkeit eines im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male reaktivierten Individuums an, das nach mindestens einmaliger Invalidierung im Altersintervall  $\tau/t$  in der Altersstrecke  $t/t + dt$  wieder reaktiviert werde. Des weitern ist  ${}_{t-\tau}P_{[\tau]}^{ir}$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein im Alter  $\tau$  zu irgendeinem Male invalidiertes Individuum in der Altersstrecke  $t/t + dt$  reaktiviert werde.

#### 4. Bestand der Gesamtheit.

Da sich die Lebenden  $l_t$  der Gesamtheit aus den Vollaktiven  $l_t^a$ , den Invaliden  $l_t^{ii}$  sowie den Reaktivierten  $l_t^r$  additiv zusammensetzen, folgt

$$l_t = l_t^a + \int_{t_0}^t l_\tau^a \cdot \mu_\tau^{ai} \left( \int_{t-\tau}^t p_{[\tau]}^i + \int_{\tau}^t P_{[\tau]}^{ii} \cdot \int_{t-\eta}^t p_{[\eta]}^i \cdot d\eta + \int_{\tau}^t P_{[\tau]}^{ir} \cdot \int_{t-\eta}^t p_{[\eta]}^r \cdot d\eta \right) d\tau. \quad (17)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, dass die Ausdrücke in der Klammer von (17) die Wahrscheinlichkeiten dafür sind, dass ein im Alter  $\tau$  invalidiertes Individuum das Alter  $t$  im Zustand der Invalidität bzw. Aktivität erlebt. Wird die Beziehung (17) des weitern als Integralgleichung aufgefasst, so lassen sich ebenfalls die  $l_t^a$  Vollaktiven bestimmen.

### Spezialfälle

#### 1. System von Du Pasquier

Sind die verwendeten Intensitäten nur eine Funktion des erreichten Alters  $t$ , und wird zwischen Vollaktiven und Reaktivierten nicht unterschieden, so nimmt das Differentialgleichungssystem (2) folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l_t^{aa(1)} &= -\mu_t^a \cdot l_t^{aa(1)} \\ \frac{d}{dt} l_t^{aa(v)} &= -\mu_t^a \cdot l_t^{aa(v)} + \mu_t^{ia} \cdot l_t^{ii(v-1)} \\ \frac{d}{dt} l_t^{ii(v)} &= -\mu_t^i \cdot l_t^{ii(v)} + \mu_t^{ai} \cdot l_t^{aa(v)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Durch beidseitige Summation über  $v$  resultiert das bekannte System von Du Pasquier

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l_t^{aa} &= -\mu_t^a \cdot l_t^{aa} + \mu_t^{ia} \cdot l_t^{ii} \\ \frac{d}{dt} l_t^{ii} &= -\mu_t^i \cdot l_t^{ii} + \mu_t^{ai} \cdot l_t^{aa}; \quad \text{mit } l_t^{ii(0)} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Setzt man in (19)  $\mu_t^{ad}$ ,  $\mu_t^{ai}$ ,  $\mu_t^{id}$  und  $\mu_t^{ia}$  als bekannt voraus, so kann die Lösung allgemein nur für konstante Intensitäten explizit angegeben werden. Sind jedoch  $\mu_t$ ,  $\mu_t^{ai}$ ,  $\mu_t^{id}$  und  $\mu_t^{ia}$  bekannt, während  $\mu_t^{ad}$  zu bestimmen ist, so resultiert

$$l_t^{ii} = \int_{t_0}^t l_\tau \cdot \mu_\tau^{ai} \cdot \frac{l_t^i \cdot l_t^{ai}}{l_\tau^i \cdot l_\tau^{ai}} d\tau ; \quad (20)$$

wobei  $l_t^{ai}$  für den Ausdruck

$$l_t^{ai} = l_{t_0}^{ai} \cdot e^{-\int_{t_0}^t \mu_\theta^{ai} \cdot d\theta}$$

eingesetzt wurde.

### Literaturverzeichnis

- Kamke, E.*: Differentialgleichungen. New York 1948.  
*van Klinken, J.*: The Theory of Random Processes. MVSM 1959.  
*Simonsen, W.*: Über die Grundformeln der Invaliditätsversicherung. Kopenhagen 1936.  
*Türler, H.*: Modell eines Bestandessystems. MVSM 1969.

### Zusammenfassung

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet ein allgemeines Bestandessystem, in dem die einzelnen Elemente die Bestände als Funktion der Zeit wechseln. Durch Spezialisierung dieses Systemes auf das Modell fortlaufender Übergänge wird ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den in der Invaliditätsversicherung gebräuchlichen Grundgrössen hergeleitet. Sowohl der Bestand der Invaliden wie auch derjenige der Reaktivierten wurde als eine Reihe der zum  $v^{\text{ten}}$  Male invalidierten bzw. reaktivierten Individuen dargestellt, wobei sich die beiden Reihen explizit haben auflösen lassen.

Aus der Gesamtheit der Lebenden, die sich additiv aus den Vollaktiven, den Invaliden sowie den Reaktivierten zusammensetzt, wurde des weitern eine Integralgleichung zur Bestimmung des Bestandes der Vollaktiven zu einem beliebigen Zeitpunkt angegeben. Durch passende Einschränkung der verwendeten Intensitäten resultieren schliesslich bekannte Spezialfälle.

## Sommaire

Le point de départ de notre étude est un système d'ensembles dont les éléments peuvent changer d'ensemble en fonction du temps. Un cas particulier de ce système est celui du modèle des modifications successives dans lequel nous avons déduits une relation entre les éléments fondamentaux de l'assurance contre l'invalidité. L'ensemble des invalides aussi bien que celui des rétablis se représente comme une série de ceux qui sont respectivement restés invalides et restés rétablis pour la  $n^{\text{e}}$  fois, séries que l'on peut calculer explicitement.

De l'ensemble des vivants, qui se compose des actifs, des invalides et des rétablis, nous avons déduits en plus une équation intégrale qui permet de déterminer, à tout instant, l'ensemble des actifs. En faisant les restrictions adéquates, nous retrouvons des résultats particuliers déjà connus.

## Summary

The departure point of our consideration has formed a general grouping system in which the individual elements can change the grouping through a time function. Through application of this system on the successive change model, a relationship has been arrived at between the basic elements of invalidity insurance. The group of invalids, as well as the group of those who have recovered, was represented as a series of those who have become invalids and have then recovered, for the  $n^{\text{th}}$  time, for which effect both series have worked out explicitly.

From the group of the living, which is made up of the active, the invalids, and the recovered, an integral equation has been deduced also, which helps determine the grouping of the living at any given moment. With convenient limitations, some already-known special cases result in the end.

## Sumario

El punto de partida de nuestra consideración ha formado un sistema general de conjuntos, en el cual los elementos parciales pueden cambiar los conjuntos en función del tiempo. Como especialización de este sistema sobre el modelo del cambio sucesivo, se ha deducido una relación entre los elementos fundamentales del seguro contra la invalidez. El conjunto de los invalidos, como también el de los reestablecidos fué representado como una serie de los que han quedado inválidos respectivamente han quedado reestablecidos por la  $n^{\text{a}}$  vez, a cuyo efecto las dos series se han solucionado explícitamente.

Del conjunto de los vivos, el cual se compone aditivamente de los activos, los invalidos y los reestablecidos, se ha deducido además una ecuación integral, la cual sirve para determinar el conjunto de los activos en cualquier momento. Con limitaciones convenientes resultan al final casos especiales ya conocidos.

