Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 70 (1970)

Artikel: Hypothesen

Autor: Härlen, Hasso

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967025

Hypothesen

Von Hasso Härlen

> An demselben Tage sah er einen am Sabbat arbeiten und sagte zu ihm: Mensch, wenn du weisst, was du tust, bist du selig; ...
> (Versprengtes Herrnwort [1], S. 11)

Diese Plauderei ist einem Rückversicherer und Mathematiker gewidmet. Der Rückversicherer sollte wissen, was er tut. Den Begriff des Mathematikers kann man so fassen, dass er denjenigen bezeichnet, der weiss, was er tut. *Hilberts* bekannter Ausspruch wäre dementsprechend etwas abzuwandeln: «Um Geometrie zu treiben, braucht man nicht zu wissen, was Punkte, Geraden, Ebenen sind; man braucht nur zu wissen, was man tut, wenn man die Axiome der Geometrie anwendet.» Wenn ein Mathematiker nicht weiss, was er tut, dann liegt menschliches Versagen zugrunde.

Das «Wissen, was man tut» ist insbesondere ein Kriterium für die Anwendung von Hypothesen. Nach allzu optimistischer Auffassung des Begriffes «voraussetzungslose Wissenschaft» müsste man ohne Hypothesen auskommen. Aber aus nichts wird nichts; ohne irgendwelche allgemeine Hypothesen, mögen sie auch noch so einleuchtend und selbstverständlich erscheinen, lassen sich keine allgemeinen Schlüsse ziehen. Man muss nur wissen, welche Bedeutung Hypothesen im System einer Wissenschaft haben, welche Rolle sie in ihm spielen – sei es zur Vervollständigung, sei es zur Vereinfachung des Systems.

1

Als erstes Beispiel für die Rolle einer Hypothese in der Lebensversicherungsmathematik möge die Annahme einer Sterbeformel, speziell der von *Makeham*, dienen. Wir wissen, dass die Annahme, die Sterblichkeit verlaufe in einem bestimmten Bereich, etwa dem der Alter von 30 bis 80, annähernd nach Makeham, erhebliche Vorteile für unser

Rechenwesen hat. Viel mehr brauchen wir nicht zu wissen, es sei denn, wie stark der Grad der Annäherung ist.

Dass man eine geraume Zeitlang versucht hat, Sterbeformeln zu begründen, indem man sie z.B. aus Annahmen über die Abnahme der Lebenskraft herleitete, entspricht einer gewissen Entwicklungsstufe des menschlichen Geistes. Solche Versuche sprechen jedenfalls nicht gegen die Brauchbarkeit einer Formel. Ebensowenig spricht gegen die Brauchbarkeit z.B. der Formel von Makeham, dass sie für x gegen ∞ sinnlos wird. Kein Mensch hat das Bedürfnis, x gegen ∞ gehen zu lassen; in absehbarer Zeit wohl auch nicht, x nur gegen 1000 gehen zu lassen.

Allerdings wird die Makehamsche Formel schon für sehr viel niedrigere Werte von x sinnlos! Die tatsächlich vorkommenden Werte der Makeham-Parameter liefern schon für Alter von etwa 95 Jahren Sterbeintensitäten, die über 1 hinausgehen, für Alter von 105 Jahren solche, die über 3 liegen. Das ist unbrauchbar. Aber es beeinträchtigt in keiner Weise die Brauchbarkeit des Ansatzes für Alter bis zu ungefähr 80 Jahren.

2

Dass die Natur keine Sprünge mache, ist im 20. Jahrhundert als überholte Ansicht anzusehen. Aber die Natur leistet sich nur kleine Sprünge. Vernünftigerweise folgt man diesem Beispiele der Natur.

Kein Versicherungsnehmer zahlt einen kontinuierlichen Beitrag, kein Versicherungsunternehmen leistet eine kontinuierliche Rente. Aber man beraubt sich der Möglichkeit eines Einblicks in die Einfachheit der Zusammenhänge, wenn man darauf verzichtet, so zu tun, als ob die Vertragsabwicklung kontinuierlich erfolge. Das beste Beispiel dafür ist die rechnungsmässige Reserve. Ihrem Begriffe nach ist sie prospektiv. Aber man kann einen prospektiven und einen retrospektiven Ansatz dafür treffen. Dass diese beiden Ansätze zu demselben Wert führen, ergibt sich kontinuierlich durch die Zerlegung des Integrals über alle Leistungen zum Zeitpunkt m der Reserveermittlung:

$$\int_0^m (\mu_{x+t}\overline{T}_t + \overline{L}_t - \overline{P}_t)\, {}_tE_x\, dt + \int_m^{w-x} (\mu_{x+t}\overline{T}_t + \overline{L}_t - \overline{P}_t)\, {}_tE_x\, dt = 0\,.$$

Das linke Integral ist die negative Reserve im retrospektiven Ansatz, das rechte Integral die prospektiv angesetzte Reserve (positiv).

Das ganze Integral verschwindet nach dem Äquivalenzprinzip; also sind die absoluten Beträge der Teilintegrale gleich. ($\bar{T}_t$ und $\bar{L}_t$ sind die Todesfalleistungen bzw. Erlebensfalleistungen des Unternehmens im Zeitpunkt t, $\bar{P}_t$ die Prämienleistung im Zeitpunkt t; Kosten werden als Leistungen des Unternehmens erfasst.)

Das gilt genau so, wenn man anstelle des Riemannschen Integrals Stieltjes-Schärf-Integrale (oder ihre Verallgemeinerungen; s. [4]) nimmt, durch welche kleinen und grossen Sprüngen Rechnung getragen wird. Durch die Verallgemeinerungen werden Funktionen mit herausspringenden Funktionswerten erfasst, von denen Frau *Gisela Schröder*, a.a.O., S. 176, sagt, sie seien «nicht pathologischer oder der Spitzfindigkeit der Juristen mehr ausgeliefert als einseitig stetige Funktionen, die zum Beispiel für einen bestimmten Zeitpunkt und die Zeit danach eine andere Leistung vorsehen als für die Zeit unmittelbar davor».

Für das Integral ist es einerlei, ob es sich um kleine oder grosse Sprünge handelt. Der Aktuar wird – dem Juristen zuvorkommend! – sein Augenmerk auf Sprungstellen richten, und zwar um so sorgsamer, je grösser die Sprünge sind. Eine solche Sprungstelle haben wir z.B. bei Ablauf der Selbstmordwartefrist, und zwar mit Sprunghöhe (für die Selbstmordleistung) in voller Höhe der Versicherungssumme. Man wird aber nichts Bedenkliches in dem Sprung finden: er könnte sogar einmal Anlass für einen Selbstmordkandidaten sein, die beabsichtigte Tat noch etwas hinauszuschieben, bis die Frist verstrichen ist. Darüber könnte er von seinem Plan abkommen, ein zu begrüssender Effekt. Der umgekehrte Fall liegt bei der ablaufenden temporären Versicherung vor: er könnte einen etwaigen Selbstmordkandidaten in der sofortigen Durchführung der Absicht (vor Ablauf der Versicherung) bestärken. Diese Möglichkeit wiederum könnte zur Ablehnung des Antrages eines Kandidaten mit erhöhtem Selbstmordrisiko führen, der eine kurze Todesfallversicherung begehrt, während man ihm eine gemischte Versicherung zu erhöhter Prämie gewähren könnte.

3

Bei der Versicherung verbundener Leben wird die – nicht sehr realistische – Annahme gemacht, die Wahrscheinlichkeiten ${}_tp_x$ und ${}_tp_y$ seien unabhängig. Das geschieht oft stillschweigend. In der neueren deutschsprachigen Lehrbuchliteratur haben wir nur drei Stellen gefunden, an denen ausdrücklich darauf hingewiesen wird. *A. Berger* ([2], S.159) schreibt: «Wir wollen ... stets voraussetzen, dass die Wahrscheinlichkeiten ${}_np_x, {}_np_y, {}_np_z, \ldots$ für zwei und mehrere Personen voneinander unabhängig sind, wenn es sich um verschiedene Personen handelt. Das ist nicht selbstverständlich, widerspricht sogar unter Umständen den statistischen Erfahrungen. So z.B. wenn durch diese festgestellt wird, dass die Sterblichkeit verheirateter Personen von der der unverheirateten Personen desselben Geschlechtes recht merklich verschieden verläuft. Unter der Annahme der Unabhängigkeit aber ist nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitstheorie die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden Personen (x) und (y) beide nach n Jahren am Leben sind, durch ${}_np_{x,y} = {}_np_x \cdot {}_np_y = \ldots$ gegeben.»

Bei *F. Böhm* ([3], S.127) heisst es ähnlich: «Setzen wir nun weiterhin voraus, dass diese beiden Erlebenswahrscheinlichkeiten voneinander unabhängig sind – was in Wirklichkeit nicht ganz zutrifft, da oft der Tod des einen Teils den des anderen beschleunigt –, so ist die Wahrscheinlichkeit ${}_np_{xy}$ dafür, dass das Paar den festgesetzten Termin gemeinsam erlebt, gleich dem Produkt der beiden Erlebenswahrscheinlichkeiten ${}_np_x$ und ${}_np_y$.»

Schliesslich *E. Zwinggi* ([5], S. 160/161): «Zur Herleitung der Äquivalenzgleichungen treffen wir die Annahme, das Ausscheiden einer Person durch Tod aus der versicherten Gruppe beeinflusse nicht die Häufigkeit des Ausscheidens durch Tod der übrigen mit dieser Person verbundenen Personen; ... die Sterbewahrscheinlichkeiten ${}_tq_x$ und ${}_tq_y$ dürfen dann ... als unabhängige Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.»

Im Vordergrund des Interesses steht bei der Versicherung auf verbundene Leben die auf den ersten Tod. Bei dieser Versicherungsart ist die Unabhängigkeitsannahme von Zwinggi gegenstandslos: vor dem ersten Tod kann die Häufigkeit des Ausscheidens der anderen Personen nicht durch das Ausscheiden einer Person beeinflusst werden; zu dem frühestmöglichen Zeitpunkt der Beeinflussung erlischt die Versicherung. Dagegen ist eine gegenseitige Beeinflussung der *Verbleibs*wahrscheinlichkeiten möglich. Wir wissen ja, dass – vor allem beim männlichen Geschlecht – die Erlebenswahrscheinlichkeiten der Verheirateten durchweg höher sind als die der Verwitweten. Doch das stört nicht, da wir bei der Versicherung auf den ersten Tod von vornherein von Paaren Verheirateter ausgehen können, wenn wir wollen.

Anders liegt es bei der Versicherung auf den letzten Tod. Bei ihr ist mit der so bequemen Hypothese der Unabhängigkeit Vorsicht geboten. Nach dem ersten Tod tritt (treten) der (die) überlebende(n) Partner unter Umständen in ein Kollektiv mit erhöhter Sterblichkeit über. Soweit es sich um Ehegattenversicherungen handelt, wird das durch die Veröffentlichungen der statistischen Ämter der verschiedensten Länder erwiesen. Ob und in welchem Ausmass es auch für andere verbundene Versicherungen (Teilhaberversicherungen) zutrifft, darüber sind Erfahrungen nicht bekannt. Für die Ehegattenversicherung ist insofern die Lage also etwas günstiger, wenn auch nur graduell. Die amtlichen Sterbetafeln nach dem Familienstand haben für sie nur begrenzten Aussagewert, weil mehrere Gründe dafür sprechen, dass die relative Übersterblichkeit der Verwitweten gegenüber den Verheirateten mit der Dauer der Witwenschaft abnimmt. In den ersten Jahren der Witwenschaft, die für die Versicherung auf den letzten Tod am stärksten ins Gewicht fallen, wäre also mit einer höheren Übersterblichkeit zu rechnen als später.

Literatur

[1] Neutestamentliche Apokryphen, hrsg. von Edgar Hennecke, Tübingen und Leipzig 1904.

[2] *Alfred Berger,* Mathematik der Lebensversicherung, Wien 1939.

[3] *Friedrich Böhm,* Versicherungsmathematik I, 2. A., Berlin 1946.

[4] *Gisela Schröder,* Zu den Grundlagen der Versicherungsmathematik. Mit einem Briefwechsel zwischen Georg Reichel und Gisela Schröder. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. IX, Heft 2, Oktober 1969.

[5] *Ernst Zwinggi,* Versicherungsmathematik, 2. A., Basel und Stuttgart 1958.

Zusammenfassung

Sinn und Bedeutung von Hypothesen werden an drei Beispielen der Versicherungsmathematik beleuchtet:

1. der Annahme, die Sterblichkeit verlaufe nach einer Sterbeformel, etwa der von *Makeham;*
2. der Annahme kontinuierlicher Abwicklung von Versicherungsverträgen;
3. der Annahme, die Ausscheide- und die Verbleibswahrscheinlichkeiten seien bei verbundenen Leben unabhängig.

Résumé

Au moyen des trois exemples suivants, l'auteur fait ressortir tout le sens et l'importance qu'il y a de faire des hypothèses dans les sciences actuarielles:

1. La mortalité obéit à une loi mathématique, par exemple à celle de Makeham;
2. les événements dans le cadre des contrats d'assurance se déroulent de manière continue;
3. les probabilités de sortir ou de rester dans la collectivité de base sont indépendantes dans le cas d'assurances sur plusieurs têtes.

Summary

The author shows the effect and the importance of making assumptions in actuarial mathematics by discussing three examples:

1. The assumption that the mortality table follows a mathematical formula, e.g. that of Makeham;
2. the assumption that payments under an insurance contract are made on a continuous basis;
3. the assumption that the probabilities of continuation or termination of a joint life status in a life assurance contract are independent.

Riassunto

Per mezzo dei tre esempi che seguono, l'autore fa risaltare tutto il senso e l'importanza di fare delle ipotesi nelle scienze attuariali:

1. La mortalità segue una legge matematica, p. es. quella di Makeham;
2. gli avvenimenti nell'ambito dei contratti di assicurazione si svolgono in modo continuo;
3. le probabilità di uscire o di restare nella collettività sono indipendenti nel caso di assicurazioni su più teste.