

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker<br>= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of<br>Swiss Actuaries |
| <b>Herausgeber:</b> | Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker   |
| <b>Band:</b>        | 70 (1970)   |
| <b>Artikel:</b>     | Statistik und Entscheidungstheorie : Untersuchungen über das 2-<br>Aktionen-Problem   |
| <b>Autor:</b>       | Loeffel, Hans   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-967019">https://doi.org/10.5169/seals-967019</a>   |

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

B

## Wissenschaftliche Mitteilungen

---

### Statistik und Entscheidungstheorie (Untersuchungen über das 2-Aktionen-Problem)

*Von Hans Loeffel, St. Gallen*

#### 1. Einführung und Problemstellung

In den vergangenen 10–15 Jahren ist die praktische Bedeutung der *allgemeinen Entscheidungstheorie* für viele Zweige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften enorm gewachsen.

Jedes Individuum (oder jede soziale Gruppe) steht oft vor dem Dilemma, zum Teil folgenschwere Entscheidungen treffen zu müssen. Die Entscheidungstheorie lehrt, wie man in gewissen, modellartig beschriebenen Situationen unter vielen möglichen Entscheidungen die sogenannte «*optimale*» Entscheidung finden kann.

Hierbei stützt man sich auf sogenannte *Entscheidungskriterien*, das sind Richtlinien, nach denen ein «*rational*» handelndes Individuum seinen Präferenzen im Raum der möglichen Entscheidungen Ausdruck verleiht.

Eine ganz konkrete Anwendungsmöglichkeit in der Automobilversicherung hat *Hans Bühlmann* [1] aufgezeigt. In der Theorie der sequentiellen *Schätzverfahren* wird die Konstruktion von sogenannten «*optimalen Prämienstufensystemen*» behandelt, wobei die entscheidungstheoretische Interpretation auf der Hand liegt.

## 2. Das Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie

### 2.1. Begriffe

Ein Individuum, konfrontiert mit der *Umwelt* oder der *Natur*, steht in der Konfliktsituation, aus mehreren möglichen *Aktionen*, *Strategien* oder *Entscheidungen* die bestmögliche auszuwählen.

Die Umwelt kann dabei gewisse *Zustände* annehmen, die dem Entscheidenden entweder vollständig bekannt, nur hinsichtlich der Häufigkeiten ihres Auftretens bekannt oder vollständig unbekannt sein können. Je nachdem spricht man von der *Sicherheitssituation*, der *Risikosituation* oder der *Unsicherheitssituation* im engen Sinne (i.e. S.).

Die Sicherheitssituation (z.B. bei der linearen Optimierung) soll uns im folgenden nicht interessieren.

### 2.2. Ökonomische Folgen von Entscheidungen – Nutzentheorie

Sei  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ <sup>1)</sup> der Raum (oder die Menge) der verfügbaren Aktionen oder Letztentscheidungen  $a_i$ .

Mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ <sup>1)</sup> bezeichnen wir den Raum der möglichen Zustände  $\omega_j$  der Umwelt.

Wählt nun das Individuum (der Entscheidende) die Aktion  $a_i \in A$  und herrscht gleichzeitig in der Umwelt der Zustand  $\omega_j \in \Omega$ , so resultiere daraus ein *Ergebnis*

$$e(a_i, \omega_j) = e_{ij}.$$

Die  $e_{ij}$  bilden den *Ergebnisraum*  $\mathfrak{E}$ .

Dieser Sachverhalt kann auch durch nachfolgende *Ergebnismatrix* dargestellt werden.

#### 2.2.1.

|          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_m$ |
|----------|------------|------------|---------|------------|
| $a_1$    | $e_{11}$   | $e_{12}$   | $\dots$ | $e_{1m}$   |
| $a_2$    | .          | .          |         | .          |
| $\vdots$ | $\vdots$   |            |         | $\vdots$   |
| $a_n$    | $e_{n1}$   | $e_{n2}$   | $\dots$ | $e_{nm}$   |

1) Wir beschränken uns vorerst auf endliche Räume.

Die Ergebnisse  $e_{ij}$  brauchen nicht zum vornherein quantifizierbar zu sein. Das folgende ist ein Beispiel eines möglichen Ergebnisses:

«Eine symmetrische Münze wird geworfen. Je nach Ausgang des Zufallsexperimentes hat man 14 Tage aufs Rauchen zu verzichten, oder man erhält eine Eintrittskarte ins Theater.»

Die Anwendung von Entscheidungskriterien erfordert eine *Quantifizierung des Ergebnisraumes*  $\mathfrak{E}$ . Dies leistet die moderne Nutzentheorie, die im wesentlichen auf *von Neumann* und *Morgenstern* [2] zurückgeht.

Sei  $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  der Ergebnisraum und

$$\mathfrak{E}^* = \{(p_1, p_2, \dots, p_r)\}; \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1$$

der Raum aller *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* (inkl. der degenerierten) oder *Lotterien über*  $\mathfrak{E}$ .

In  $\mathfrak{E}^*$  ist eine lineare und transitive Präferenzrelation  $\lesssim$  erklärt.

Auf Grund gewisser Axiome (bez.  $\mathfrak{E}^*$ ), die im wesentlichen die «rationale» Handlungsweise des Entscheidenden charakterisieren, kann die Existenz einer reellwertigen sogenannten *Nutzenfunktion*

$$u(e_i) = u_i$$

gefolgert werden [3].

Insbesondere ist  $u_{ij}$  der messbare, ökonomische Nutzen, den eine Aktion  $a_1$  im Zustand  $\omega_j$  abwirft.

Die Präferenzrelation  $\lesssim$  in  $\mathfrak{E}^*$  überträgt sich dann auf die gewöhnliche  $\leqq$ -Relation für den erwarteten Nutzen, d.h.

$$2.2.2. \quad (p_1, p_2, \dots, p_r) \lesssim (p'_1, p'_2, \dots, p'_r) \Rightarrow \sum_{i=1}^r u_i p_i \leq \sum_{i=1}^r u_i p'_i.$$

Die Problematik der Konstruktion der Nutzenfunktionen steht hier nicht zur Diskussion. Für das folgende wollen wir die  $u_{ij}$  stets als bekannt voraussetzen.

### 2.3 Grundmodell der Entscheidungstheorie

Wir gehen aus von 3 grundlegenden Elementen

- a)  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  Raum der Aktionen, Strategien oder Letztentscheidungen  $a_i$ .
- b)  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  Raum der Zustände  $\omega_j$  der Umwelt.
- c)  $u(a_i, \omega_j) = u(e_{ij}) = u_{ij}$  reellwertige Nutzenfunktion über dem kartesischen Produkt  $A \times \Omega$ .

Diese Situation kann im Tripel  $(A, \Omega, u)$  konzentriert und in der nachfolgenden sogenannten *Entscheidungsmatrix* dargestellt werden.

#### 2.3.1.

|          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_m$ |
|----------|------------|------------|---------|------------|
| $a_1$    | $u_{11}$   | $u_{12}$   | $\dots$ | $u_{1m}$   |
| $a_2$    | .          | .          |         | .          |
| $\vdots$ | $\vdots$   |            |         | $\vdots$   |
| $a_n$    | $u_{n1}$   | $u_{n2}$   | $\dots$ | $u_{nm}$   |

### 2.4. Entscheidungstheorie und Spieltheorie

Das Tripel  $(A, \Omega, u)$  kann auch spieltheoretisch wie folgt interpretiert werden:

- Spieler Nr.1 = Statistiker, mit den verfügbaren Aktionen oder Strategien  $a_i$ .
- Spieler Nr.2 = Umwelt, mit den verfügbaren Zuständen oder Strategien  $\omega_j$ .
- $u_{ij}$  = Nutzen oder Gewinn des 1. Spielers und gleichzeitig der Verlust des 2. Spielers.

Wir haben somit ein 2-Personen-Nullsummenspiel. Ob der Umwelt oder der Natur die Rolle eines rational handelnden Gegenspielers übertragen werden kann, ist fraglich. Hier liegt die fundamentale Nuancierung zwischen allgemeiner Entscheidungstheorie und Spieltheorie.

Ein Beispiel:

|       | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
|-------|------------|------------|
| $a_1$ | -4         | +3         |
| $a_2$ | -1         | 0          |

Wäre die Umwelt ein rationaler Gegenspieler, so würde sie Strategie  $\omega_1$  wählen, und der Entscheidende (z. B. der Statistiker) würde mit  $a_2$  antworten. Wenn hingegen die Umwelt ohne klare Vorstellung ihre Strategie wählt, z. B.  $\omega_2$ , müsste der Statistiker mit  $a_1$  reagieren.

Näheres über diese interessanten Querverbindungen findet man in Abschnitt 7; bei *H. Bühlmann* in [3], S.114 ff., und [4] sowie bei *P. Nolfi* [5].

### 3. Statistik und Entscheidungstheorie

#### 3.1. «Klassische» Statistik

Es mag auffallen, dass im Sachregister klassischer Standardwerke der mathematischen Statistik Begriffe wie Entscheidung, Entscheidungsfunktion oder ähnliches fehlen. Die fundamentalen Arbeiten von R.A.Fisher, J.Neyman, E.S.Pearson und andern mehr führten die klassische Schätz- und Testtheorie zu einem vorläufigen Höhepunkt.

Begriffe wie Sicherheitswahrscheinlichkeit, Fehler 1. und 2. Art, Güte und Macht von Tests, Konfidenzintervalle sind dabei von zentraler Bedeutung. *Eine Querverbindung zu allgemeinen ökonomischen Fragestellungen bestand aber kaum.*

#### 3.2. Neue Wege

Abraham Wald (1902–1950) hat aus dem Sequentialtest heraus die Theorie der sogenannten *statistischen Entscheidungsfunktionen* entwickelt, die eine neue Ära statistischer Betrachtungsweise einleitete.

Seit 1950 (Erscheinungsjahr des fundamentalen Werkes «Statistical decision functions» [6]) hat sich eine ansehnliche Literatur über diesen Gegenstand entwickelt, die bis heute über 600 Titel umfasst [7].

Der Anwendungsbereich der neuen Theorie ist sehr weit gesteckt und reicht von Statistik und Kybernetik über die Unternehmensforschung bis in die Psychologie und Soziologie.

Die Arbeiten von von Neumann und Wald haben versucht, statistische Schlüsse unter dem Blickwinkel der *Entscheidung* zu analysieren und *ökonomisch zu bewerten* (Nutzentheorie).

Wenn auch ursprünglich die zu erwartenden Erfolge vielleicht zu optimistisch prognostiziert wurden, ist doch zweifelsohne eine gewaltige Läuterung und Bereicherung statistischen Denkens im Zuge der neuen Betrachtungsweise zu verzeichnen.

Hat man früher von statistischen *Urteilen* gesprochen, so will man jetzt die Verfahren statistischer Inferenz (Schlussweisen) im Lichte der *Entscheidungen* interpretieren und lösen.

Wie das geschieht, wollen wir an einem bewusst einfach gehaltenen Beispiel nachfolgend darlegen.

### 3.3. *Das Wesen statistischer Entscheidung*

Ein grundlegendes Problem der *statistischen Qualitätskontrolle* soll auf das Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie nach 2.3. transformiert werden.

*Standardbeispiel:* Ein Warenposten enthält sehr viele gleichartige Massenartikel, die entweder gut oder defekt sind. Der Anteil  $\omega$  defekter Stücke im Warenposten sei unbekannt.

Der *Produzent* behauptet beispielsweise, die Sendung enthalte 25% Ausschuss; soll der Abnehmer dies glauben oder nicht?

Der Statistiker (als Berater des Abnehmers) verfüge über *zwei Aktionen*, Strategien oder Letztentscheidungen, nämlich

- 3.3.1       $\left\{ \begin{array}{l} a_1: \text{«Akzeptiere den Warenposten».} \\ a_2: \text{«Lehne den Warenposten ab».} \end{array} \right.$

Der Aktionsraum  $A$  enthält also nur 2 Elemente. Man spricht dann von *«Testen von Hypothesen»*.

Die möglichen Anteile  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  defekter Stücke im Warenposten können wir als die Zustände oder Strategien der Umwelt interpretieren. Sie bilden den Zustandsraum  $\Omega$ .

Wählt der Statistiker die Aktion  $a_i$  im Zustand  $\omega_j$ , so resultiere daraus ein Nutzen  $u(a_i, \omega_j) = u_{ij}$ .

Das Tripel  $(A, \Omega, u)$  oder die zugehörige Entscheidungsmatrix  $E_1$

E<sub>1</sub> 3.3.2

|       | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_m$ |
|-------|------------|------------|---------|------------|
| $a_1$ | $u_{11}$   | $u_{12}$   | $\dots$ | $u_{1m}$   |
| $a_2$ | $u_{21}$   | $u_{22}$   | $\dots$ | $u_{2m}$   |

kennzeichnet somit die ursprüngliche Entscheidungssituation eindeutig.

Vorläufig ist über die möglichen Zustände  $\omega_j$  nichts bekannt.

Ein *echtes statistisches* Entscheidungsproblem entsteht durch Einholen von *zusätzlicher Information* über die  $\omega_j \in \Omega$  *vermittels einer Zufallsstichprobe*.

Damit kommt ein stochastisches Element hinein, denn je nach dem zufallsbedingten Ergebnis der Stichprobe wird der Entscheidende diese oder jene Aktion wählen.

### *Präzisierung der Stichprobe*

Aus der als hinreichend gross angenommenen Grundgesamtheit (Warenposten) werden zufallsartig  $n$  Elemente (Massenartikel) gezogen.

Dabei sind folgende Voraussetzungen gemacht:

1. die einzelnen Ziehungen erfolgen unabhängig voneinander;
2. die Wahrscheinlichkeit, ein defektes Stück zu ziehen, ist bei jedem Zug gleich, nämlich  $\omega$ .

Die Ergebnisse  $x$  einer solchen Stichprobe

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ mit } x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls beim } i\text{-ten Zug defektes Stück} \\ 0, & \text{falls beim } i\text{-ten Zug gutes Stück} \end{cases}$$

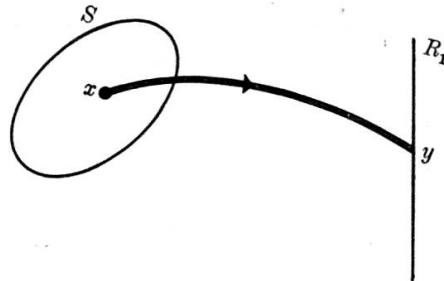
können als Realisationen des  $n$ -Tupels  $X$

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen  $X_i$  interpretiert werden, wobei

3.3.3.  $p\{X_i = x_i | \omega\} = \omega^{x_i} (1-\omega)^{1-x_i}; \quad x_i = 1,0 \text{ falls } \omega \text{ der wahre Anteil in der Grundgesamtheit ist.}$

Alle Ergebnisse  $x$  bilden den sogenannten Stichprobenraum  $S$  (bestehend aus  $2^n$  Punkten), den wir in  $R_1$  abbilden durch folgende Zuordnungsvorschrift:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow y = \sum_{i=1}^1 x_i.$$



Die zugehörige Zufallsvariable  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  (Anzahl defekter Stücke in Stichprobe) ist hinsichtlich des unbekannten Zustandes  $\omega$  eine sogenannte *suffiziente Statistik* oder *Schätzfunktion*, d.h.  $Y$  schöpft die Information bezüglich  $\omega$  voll aus. Die exakte Definition der suffizienten Statistik findet man etwa in [2], S. 113.

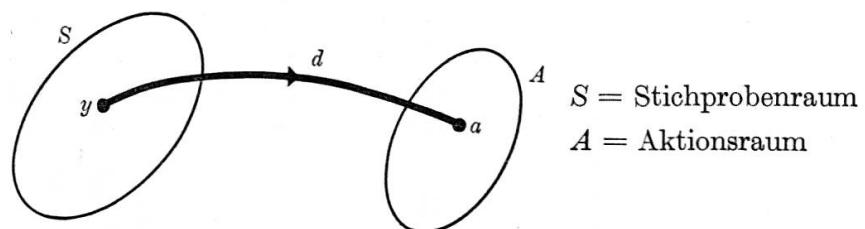
Damit reduziert sich der ursprüngliche Stichprobenraum von  $2^n$  Elementen auf jenen bezüglich  $Y$  (er sei wieder mit  $S$  bezeichnet), der noch genau  $(n+1)$ -Elemente

$$y = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{enthält.}$$

$$3.3.4. \quad p\{Y = y|\omega\} = p(y|\omega) = \binom{n}{y} \omega^y (1-\omega)^{n-y}; \quad y = 0, 1, \dots, n$$

ist dann die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang  $n$  genau  $y$  defekte Stücke zu finden.

Die Hauptaufgabe des Statistikers besteht nun darin, eine *Entscheidungsregel* oder *Strategie*  $d$  festzulegen, die jedem Stichprobenergebnis  $y \in S$  eindeutig eine *Aktion* oder *Letztentscheidung*  $a \in A$  zuordnet.



Eine solche Strategie kann als *Abbildung* des Stichprobenraumes  $S$  auf den Aktionsraum  $A$  aufgefasst werden und heisst seit A. Wald eine *statistische Entscheidungsfunktion* oder *statistische Entscheidungsregel*.

Wie man leicht abzählen kann, gibt es genau  $2^{n+1}$  Entscheidungsfunktionen  $d_i (i = 1, 2, \dots, 2^{n+1})$ , die den sogenannten *Entscheidungsraum*  $D$  bilden.

Der ursprüngliche Raum  $A$  der Aktionen oder Letztentscheidungen  $a_i$  wird somit durch den Raum  $D$  der Entscheidungsfunktionen oder Strategien  $d_i$  ersetzt.

Wie sind nun die ökonomischen Folgen einer Strategie  $d$  zu bewerten, falls sie im Zustand  $\omega_j$  erfolgt? Eine Entscheidungsfunktion  $d_i$  ordnet jedem zufallsbedingten Stichprobenergebnis  $y \in S$  eine ebenso zufallsbedingte Aktion  $a_i \in A$  zu.

Jeder Strategie  $d_i$  kann deshalb lediglich ein *mittlerer Nutzen*, die sogenannte *Nutzenerwartung* oder das *Risiko*  $r(d_i, \omega_j) = r_{ij}$ , zugeordnet werden, das wie folgt definiert ist:

$$3.3.5. \quad r(d_i, \omega_j) = \sum_{y \in S} u[d_i(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j).$$

$r(d_i, \omega_j)$  ist also der im Mittel zu erwartende Nutzen bei Anwendung der Entscheidungsfunktion  $d_i$  im Zustand  $\omega_j$ .

Falls  $S$  nicht endlich ist, sondern etwa eine beliebige, Borel-messbare Teilmenge des  $R_1$ , müsste auf der Klasse der Borel-messbaren Teilmengen von  $S$  für jedes  $\omega \in \Omega$  ein Wahrscheinlichkeitsmass  $P_\omega$  definiert sein. Die Summe 3.3.5. ginge dann über in das Lebesguesche Integral

$$r(d, \omega) = \int_S u[d(y), \omega] dP_\omega(y),$$

und  $D$  bestünde aus jenen Funktionen  $d$ , für welche  $u[d(y), \omega]$  für alle  $\omega \in \Omega$  eine Lebesgue-integrierbare Funktion von  $y$  ist.

Die Entscheidungsmatrix  $E_1$  nach 3.3.2. oder mit andern Worten das Tripel  $(A, \Omega, u)$  wird somit transformiert in die nachfolgende Entscheidungsmatrix  $E_2$  oder in das Tripel  $(D, \Omega, r)$ .

$E_2$  3.3.6.

|               | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_j$ | $\dots$ | $\omega_m$       |
|---------------|------------|------------|---------|------------|---------|------------------|
| $d_1$         | $r_{11}$   | $r_{12}$   | $\dots$ | $r_{1j}$   | $\dots$ | $r_{1m}$         |
| $d_2$         | .          |            |         |            |         | .                |
| $\vdots$      | $\vdots$   |            |         |            |         | $\vdots$         |
| $d_i$         | $r_{i1}$   | $r_{i2}$   |         | $r_{ij}$   | $\dots$ | .                |
| $\vdots$      | $\vdots$   |            |         |            |         | $\vdots$         |
| $d_{2^{n+1}}$ |            |            | $\dots$ |            |         | $r_{2, m}^{n+1}$ |

Es ist uns also gelungen, das in Kapitel 3.3 formulierte statistische Inferenzproblem (Testen von Hypothesen) auf die Form  $E_2$ , d.h. auf das *Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie*, zu transformieren.

Der Statistiker hat aus der Menge  $D$  von möglichen Entscheidungsfunktionen eine bestimmte, z.B.  $d_i$ , zu wählen, die, erfolgt sie im Zustand  $\omega_j$ , einen mittleren Nutzen  $r_{ij}$  abwirft.

Da die Zustände  $\omega_j$  der Umwelt unbekannt sind, herrscht die *Unsicherheitssituation im engeren Sinne*, auf die sich jedes statistische Inferenzproblem zurückführen lässt.

#### 4. Testen einer einfachen Hypothese gegen eine einfache Alternative

Wir gehen aus von 3.3., dem Standardbeispiel der Qualitätskontrolle, und treffen folgende Annahmen:

a) *Bezüglich des Zustandsraumes*

Beschränkung auf zwei mögliche Zustände der Umwelt, d.h. auf zwei mögliche Anteile defekter Stücke im Warenposten.

- |                     |                             |
|---------------------|-----------------------------|
| $\omega = \omega_1$ | Warenposten ist «gut»,      |
| $\omega = \omega_2$ | Warenposten ist «schlecht». |

Wir haben den klassischen Fall des Testens einer einfachen *Nullhypothese  $H_0$*  gegen eine einfache *Alternativhypothese  $H_1$* , wobei

4.1.

$$H_0: \omega = \omega_1$$

$$H_1: \omega = \omega_2$$

Der Zustandsraum  $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$  ist somit auch der Hypothesenraum, und der Aktionsraum  $A = (a_1, a_2)$  enthält lediglich die beiden Aktionen oder Letztentscheidungen

$a_1$ : Annehmen der Nullhypothese,

$a_2$ : Verwerfen der Nullhypothese oder Annehmen der Alternativhypothese.

b) *Bezüglich des Entscheidungsraumes D*

In der Menge  $D$  der  $2^{n+1}$  theoretisch möglichen Entscheidungsfunktionen betrachten wir eine ausgezeichnete Teilmenge  $D^*$ , deren Elemente wie folgt definiert sind:

$y \in S$  Anzahl defekter Stücke in der Stichprobe vom Umfang  $n$

$$4.2. \quad d_k(y) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } y \leq k \\ a_2, & \text{falls } y > k \end{cases}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$k$  heisst auch *Annahmekennzahl*.

Die Auswahl der Teilmenge  $D^*$  nach 4.2. ist zumindest von der praktischen Seite her intuitiv klar. Sie lässt sich aber auch nach dem sogenannten Fundamentallemma von Neyman-Pearson begründen.

c) *Bezüglich der Nutzenfunktion  $u_{ij}$*

Mit

$$4.3. \quad \begin{cases} K = \text{Kosten des Abnehmers,} \\ fK = \text{Gewinn des Abnehmers, falls } \omega = \omega_1; 0 < f < 1, \\ s = s(n) = \text{Stichprobenkosten} \end{cases}$$

setzen wir fest

$$4.4. \quad \begin{cases} u_{11} = fK - s; & u_{12} = -K - s \\ u_{21} = -s; & u_{22} = -s. \end{cases}$$

Das Tripel  $(A, \Omega, u)$  ist somit eindeutig festgelegt.

Gemäss 3.3.5. berechnen wir nun die Nutzenerwartung oder das (negative) Risiko  $r(d_k, \omega_j)$ .

$$4.5. \quad r(d_k, \omega_j) = \sum_{y=0}^n u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j); \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, n-1 \\ j = 1, 2, \end{array}$$

wobei  $p(y|\omega_j) = \binom{n}{y} \cdot \omega_j^y (1-\omega_j)^{n-y}$ .

Unter Berücksichtigung von 4.2. geht 4.5. über in

$$4.6. \quad r(d_k, \omega_1) = u_{11} \sum_{y \leq k} p(y|\omega_1) + u_{21} \sum_{y > k} p(y|\omega_1)$$

$$r(d_k, \omega_2) = u_{12} \sum_{y \leq k} p(y|\omega_2) + u_{22} \sum_{y > k} p(y|\omega_2),$$

wobei in natürlicher Weise die Wahrscheinlichkeiten  $\alpha_k$  bzw.  $\beta_k$  für einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art auftreten.

$$\alpha_k = \sum_{y > k} p(y|\omega_1)$$

$$\beta_k = \sum_{y \leq k} p(y|\omega_2).$$

$\alpha_k$  ist dabei die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie richtig ist.

$\beta_k$  ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese anzunehmen, obwohl sie falsch ist.

Aus 4.6. wird nun

$$4.6a. \quad \begin{array}{l} r(d_k, \omega_1) = fK(1-\alpha_k) - s \\ r(d_k, \omega_2) = -K \cdot \beta_k - s \end{array} \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

$r(d_k, \omega_2) < 0$  für alle  $k$ .

*Numerische Durchführung an einem Beispiel [3]*

4.6 b. 
$$\begin{cases} \omega_1 = 0,25 \\ \omega_2 = 0,75 \\ n = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} K = 1000 \text{ Fr.} \\ f = 0,1 \\ s = 10 \text{ Fr.} \end{array}$$

Offenbar gilt:  $p(y|\omega_2) = p(10-y|\omega_1)$

| $y$             | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $p(y \omega_1)$ | .056 | .188 | .283 | .250 | .146 | .058 | .016 | .003 | 0    | 0    | 0    |
| $p(y \omega_2)$ | 0    | 0    | 0    | .003 | .016 | .058 | .146 | .250 | .283 | .188 | .056 |

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werte  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  in Funktion der Annahmekennzahl  $k$ .

| $k$        | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\alpha_k$ | .944 | .756 | .473 | .223 | .077 | .019 | .003 | 0    | 0    | 0    |
| $\beta_k$  | 0    | 0    | 0    | .003 | .019 | .077 | .223 | .473 | .756 | .944 |

Nach 4.6a. lassen sich nun die Nutzenerwartungen  $r(d_k, \omega_j)$  berechnen, und man erhält

4.7.

|            | $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | $d_9$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\omega_1$ | -4,4  | 14,4  | 42,7  | 67,7  | 82,3  | 88,1  | 89,7  | 90    | 90    | 90    |
| $\omega_2$ | -10   | -10   | -10   | -13   | -29   | -87   | -233  | -483  | -766  | -954  |

Damit ist es uns gelungen, das Testen einer einfachen Nullhypothese  $H_0: \omega = \omega_1$  gegen eine einfache Alternativhypothese  $H_1: \omega = \omega_2$  in die Entscheidungsmatrix 4.7. oder in die Form  $(D, \Omega, r)$  überzuführen, d.h. in das *Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie*.

Der Statistiker hat aus der Menge  $D = \{d_0, d_1, \dots, d_9\}$  eine Strategie  $d_k$  zu wählen, die, erfolgt sie im Zustand  $\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ), eine Nutzen-erwartung  $r(d_k, \omega_j) = r_{kj}$  besitzt.

Wählt er etwa  $d_2$ , so steht einem Gewinn von 42,7 ein Verlust von 10 gegenüber. Fällt die Wahl auf  $d_7$ , so kann der mögliche Gewinn auf 90 erhöht werden, wenn gleichzeitig ein massiv erhöhter Verlust von 483 riskiert wird.

*Nach welchen Richtlinien oder Kriterien soll die Auswahl der «besten» oder «optimalen» Strategie  $d^*$  erfolgen?*

## 5. Konstruktion optimaler Entscheidungsfunktionen

### 5.1. Allgemeines

Soeben haben wir gezeigt, wie sich ein statistisches Inferenzproblem in die allgemeine Entscheidungstheorie einbauen lässt.

Der ursprüngliche Raum  $A$  der (konstanten) Aktionen  $a_i$  ist ersetzt worden durch den Raum  $D$  der Entscheidungsfunktionen  $d_k$ , und über dem kartesischen Produkt  $D \times \Omega$  ist nach 3.3.5. der mittlere Nutzen  $r$  definiert.

Da die Zustände  $\omega_j \in \Omega$  zum vornherein unbekannt sind, befinden wir uns in der sogenannten Unsicherheitssituation im engern Sinne (siehe Abschnitt 2.1.).

### 5.2. Die Unsicherheitssituation im engern Sinne

In der modernen Literatur [8] findet man eine Reihe von Entscheidungskriterien, wobei das sogenannte *Minimax-Kriterium* von von Neumann eine besondere Stellung einnimmt.

Nach dem *Minimax-Kriterium* suchen wir jene Strategie  $d_k$ , für die die minimale Nutzenerwartung maximal ist (es ist in diesem Sinne eigentlich ein *Maximin-Kriterium*).

Gestützt auf den allgemeinen Fall 3.3.6. definieren wir  $d_k$  als optimal, falls

5.2.1. 
$$\begin{cases} \min_j r_{kj} = \max_i (\min_j r_{ij}) \\ \text{oder} \\ \min_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) = \max_{d_i \in D} \min_{\omega_j \in \Omega} r(d_i, \omega_j). \end{cases}$$

Tabelle 5

| $d_k$ | (1)<br>$r(d_k, \omega_1)$ | (2)<br>$r(d_k, \omega_2)$ | (3)<br>$\min_j r(d_k, \omega_j)$ | Minimax              |                      |                      | Bayessche Risiken |  |  |
|-------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|--|--|
|       |                           |                           |                                  | (4)<br>$\pi_1 = 0,1$ | (5)<br>$\pi_1 = 0,5$ | (6)<br>$\pi_1 = 0,9$ | $\bar{r}(\pi_1)$  |  |  |
| $d_0$ | -4,4                      | -10                       | -10                              | -9,44                | -7,2                 | -4,96                |                   |  |  |
| $d_1$ | 14,4                      | -10                       | -10                              | -7,56                | 2,2                  | 11,96                |                   |  |  |
| $d_2$ | 42,7                      | -10                       | -10                              | -4,73                | 16,3                 | 37,43                |                   |  |  |
| $d_3$ | 67,7                      | -13                       | -13                              | -4,93                | 27,3                 | 59,63                |                   |  |  |
| $d_4$ | 82,3                      | -29                       | -29                              | -17,87               | 26,6                 | 71,17                |                   |  |  |
| $d_5$ | 88,1                      | -87                       | -87                              | -69,49               | 0,5                  | 70,59                |                   |  |  |
| $d_6$ | 89,7                      | -233                      | -233                             | -200,7               | -71,6                | 57,43                |                   |  |  |
| $d_7$ | 90                        | -483                      | -483                             | -425,7               | -196                 | 32,7                 |                   |  |  |
| $d_8$ | 90                        | -766                      | -766                             | -680,4               | -338                 | 4,4                  |                   |  |  |
| $d_9$ | 90                        | -954                      | -954                             | -849,6               | -432                 | -0,5                 |                   |  |  |

Aus Kolonne (3) obiger Tabelle entnehmen wir:

$$\max_i \min_j r(d_k, \omega_j) = -10.$$

Das Minimaxkriterium führt somit auf eine der 3 Strategien  $d_0, d_1, d_2$ ; die Lösung ist nicht eindeutig. Aus praktischen Gründen entschliessen wir uns für  $d_2$ , um das Risiko 1. Art möglichst tiefzuhalten.

Über mehrdeutige Minimax-Lösungen siehe u.a. [9].

Dass wir bereits ab 3 defekten Stücken in der Stichprobe den Warenposten abweisen, zeigt, wie pessimistisch unsere optimale Strategie ausfiel. In der Tat ist das Minimax-Kriterium naturgemäß von einer «ängstlichen Vorsicht» gekennzeichnet, die in einer realen Situation nicht immer angebracht erscheint.

### 5.3. Das Kriterium von Savage-Niehans

Wenn wir anstelle der Nutzen oder Gewinne  $u_{ij}$  die sogenannten *entgangenen Nutzen* oder entgangenen Gewinne  $\bar{l}(a_i, \omega_j)$  einsetzen, so führt das Minimaxkriterium (es heisst in diesem Fall auch Kriterium von *Savage-Niehans*) auf eine *eindeutige* Lösung.

Unter dem *entgangenen* Gewinn oder entgangenen Nutzen  $\bar{l}(a_i, \omega_j)$  verstehen wir die Differenz zwischen dem effektiv erzielten Gewinn  $u(a_i, \omega_j)$  und jenem, der bei optimaler Entscheidung (im Zustand  $\omega_j$ ) hätte realisiert werden können.

Def. 5.3.1.  $\bar{l}(a_i, \omega_j) = \max_k u(a_k, \omega_j) - u(a_i, \omega_j); \quad i, j, k = 1, 2.$

Die ursprüngliche Nutzenmatrix

|       |          | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
|-------|----------|------------|------------|
| $a_1$ | $fK - s$ | $-K - s$   |            |
|       | $-s$     | $s$        |            |

geht dann über in die Matrix der entgangenen Gewinne

|       |      | $\omega_1$ | $\omega_2$     |           |
|-------|------|------------|----------------|-----------|
| $a_1$ | 0    | $K$        | mit $K = 1000$ |           |
|       | $fK$ | 0          |                | $f = 0,1$ |

$$\bar{l}(d_k, \omega_1) = fK \cdot \alpha_k = 100 \cdot \alpha_k$$

$$\text{und} \quad \bar{l}(d_k, \omega_2) = K \cdot \beta_k = 1000 \cdot \beta_k$$

sind dann die *mittleren entgangenen Gewinne* bei Verwendung der Strategie  $d_k$  im Zustand  $\omega_j$ .

*Kriterium von Savage-Niehans:*

5.3.2.  $d_k$  heisst optimal, wenn

$$\max_j \bar{l}(d_k, \omega_j) = \min_i \max_j \bar{l}(d_i, \omega_j).$$

Aus der nachstehenden Tabelle können wir die *eindeutige* Lösung, nämlich Strategie  $d_4$ , ablesen.

*Tabelle 5.3.*

| $d_k$                           | $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$         | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | $d_9$ |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\bar{l}(d_k, \omega_1)$        | 94,4  | 75,6  | 47,3  | 22,3  | 7,7           | 1,9   | 0,3   | 0     | 0     | 0     |
| $\bar{l}(d_k, \omega_2)$        | 0     | 0     | 0     | 3     | 19            | 77    | 223   | 473   | 756   | 944   |
| $\max_j \bar{l}(d_k, \omega_j)$ | 94,4  | 75,6  | 47,3  | 22,3  | 19<br>min max | 77    | 223   | 473   | 756   | 944   |

#### 5.4. Die Risikosituation [10]

Kann über dem Raum  $\Omega$  der Zustände  $\omega_j$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W$  als bekannt vorausgesetzt werden, so befinden wir uns in der sogenannten Risikosituation.

Sei  $p(\omega_j) = \pi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Umwelt sich im Zustand  $\omega_j$  befindet.

Die  $\pi_j$  heissen *A-priori-Wahrscheinlichkeiten* und  $W = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  die A-priori-Verteilung über  $\Omega$ .

$$\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$$

Definition: Unter dem *Bayesschen Risiko*  $\bar{r}(d_k)$  einer Strategie  $d_k$  verstehen wir den Erwartungswert von  $r_{kj}$  bezüglich der Verteilung  $W$  über  $\Omega$ .

$$5.4.1. \quad \bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^m r(d_k, \omega_j) \cdot \pi_j .$$

Nach dem sogenannten *Bayesschen Kriterium* ist eine Strategie oder Entscheidungsfunktion  $d_k$  genau dann optimal, wenn

$$5.4.2. \quad \bar{r}(d_k) \geqq \bar{r}(d_i) \quad \text{für alle } i \neq k .$$

Das Bayessche Kriterium fordert also die Maximierung der Bayesschen Risiken, welche im Sinne unserer Betrachtung negative Risiken, nämlich Nutzenerwartungen sind.

Da oft die A-priori-Verteilung  $W = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  über  $\Omega$  nicht bekannt ist oder aus *subjektiven* Schätzungen hervorgeht, kann man etwa annehmen (Prinzip des unzureichenden Grundes), alle  $\pi_j$  seien gleich. Man spricht dann vom sogenannten *Laplaceschen Entscheidungskriterium*, das auf der Gleichverteilung über  $\Omega$  beruht.

Die Strategie  $d_k \in D$  ist nach Laplace genau dann optimal, wenn

$$5.4.3. \quad \sum_{j=1}^m r(d_k, \omega_j) \geq \sum_{j=1}^m r(d_i, \omega_j) \quad \text{für alle } i \neq k.$$

## 6. Anwendung des Bayesschen Kriteriums auf die Entscheidungssituation 4.7.

Über dem Zustandsraum  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W = (\pi_1, \pi_2) \quad \text{mit} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \text{gegeben.}$$

$\pi_1 = p(\omega_1)$  ist dabei als Idealmass aufzufassen für die Glaubwürdigkeit, dass der Lieferant einen «guten» Warenposten anbietet (d.h. dass sich die Umwelt im Zustand  $\omega = \omega_1$  befindet).

Wir werden nun zwei verschiedene Wege zur Bestimmung der optimalen Strategie beschreiten, nämlich die «*integrale*» und die «*konstruktive*» Methode.

### 6.1. Die «*integrale*» Methode

Wir gehen aus von der Entscheidungsmatrix 3.3.6. oder vom Trippel  $(D, \Omega, r)$ .

Nach 5.4.1. berechnen sich die Bayesschen Risiken  $\bar{r}(d_k)$  wie folgt:

$$6.1.1. \quad \begin{aligned} \bar{r}(d_k) &= \sum_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) \cdot p(\omega_j) \\ &= \sum_{\omega_j \in \Omega} \left( \sum_{y \in s} u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot p(\omega_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{y=0}^n u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot \pi_j. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck von 6.1.1. geht auf Grund von 4.6a und 4.6b über in

$$6.1.2. \quad \bar{r}(d_k) = \{fK(1-\alpha_k)-s\} \cdot \pi_1 + [-K\beta_k-s] \cdot \pi_2 \\ = 100(1-\alpha_k) \cdot \pi_1 - 1000 \cdot \beta_k \cdot \pi_2 - 10.$$

Tabelle 5 enthält in den Kolonnen (4), (5) und (6) die Bayesschen Risiken für verschiedene Werte von  $\pi_1$ , d.h. für verschiedene A-priori-Verteilungen über  $\Omega$ .

So findet man etwa in Kolonne (6) für  $\pi_1 = 0,9$  ein maximales Bayessches Risiko von 71,17, und die zugehörige optimale Strategie ist  $d_4$ .

### *Praktische Interpretation*

Sobald der Abnehmer mit guten Gründen annehmen darf, es werde ihm höchstwahrscheinlich ( $\pi_1 = 0,9$ ) ein guter Warenposten ( $\omega = \omega_1$ ) angeboten, so wird er die Entscheidungsregel  $d_4$  zugrunde legen. Diese fällt gemäss unserem A-priori-Wissen viel optimistischer aus als jene nach der Minimaxregel, was auch rein intuitiv zu erklären ist.

Für jedes feste  $k$  ist das Bayessche Risiko eine lineare Funktion von  $\pi_1$ :

$$6.1.3. \quad \bar{r}_k(\pi_1) = r(d_k, \omega_1) \cdot \pi_1 + r(d_k, \omega_2) \cdot (1-\pi_1).$$

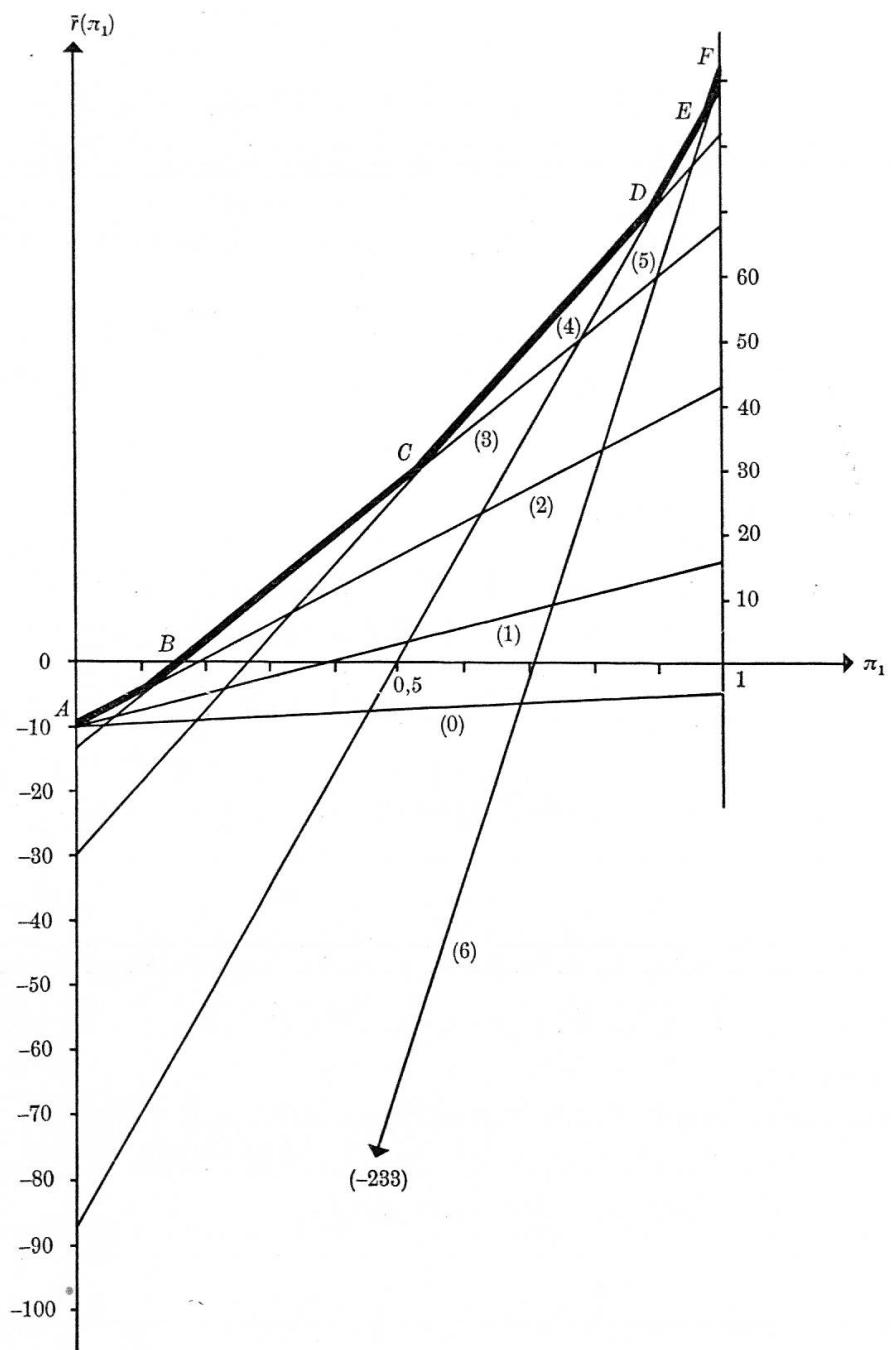
In der nachstehenden Figur 6 sind die Geraden für  $k = 0, 1, \dots, 6$  eingezeichnet.

Der oberste einhüllende Streckenzug  $ABCDEF$  vermittelt uns zu jedem Wert  $\pi_1 \in [0, 1]$  die optimale Bayessche Strategie. Für  $\pi_1 = 0,8$  liest man z.B. die optimale Strategie  $d_4$  ab.

### *6.2. Die «konstruktive» Methode*

Im Gegensatz zur integralen Methode beziehen wir uns jetzt auf die ursprüngliche Entscheidungsmatrix  $E_1$  in 3.3.2. oder auf das Tripel  $(A, \Omega, u)$ , und über  $\Omega$  sei wieder eine A-priori-Verteilung  $W = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  gegeben.

Fig. 6



6.2.1

|       |            |            |         |            |
|-------|------------|------------|---------|------------|
|       | $\pi_1$    | $\pi_2$    | $\dots$ | $\pi_m$    |
|       | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_m$ |
| $a_1$ | $u_{11}$   | $u_{12}$   |         | $u_{1m}$   |
| $a_2$ | $u_{21}$   | $u_{22}$   |         | $u_{2m}$   |

Sei  $y \in S$  die Realisation der Stichprobe, d.h. die Anzahl defekter Stücke. Diese Beobachtung  $y$  (Träger neuer Information) gibt nun Anlass zu einer Änderung der ursprünglichen A-priori-Wahrscheinlichkeiten  $p(\omega_j) = \pi_j$ .

Nach der *Bayesschen Regel* berechnen sich die sogenannten *A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten*

$$p(\omega_j|y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit, dass } \omega = \omega_j, \text{ gegeben die Beobachtung} \\ y \in S \end{array} \right\}$$

wie folgt:

$$6.2.2. \quad p(\omega_j|y) = \frac{p(y|\omega_j) \cdot p(\omega_j)}{\sum_{\omega_i \in \Omega} p(y|\omega_i) \cdot p(\omega_i)} = \frac{p(y|\omega_j) \cdot \pi_j}{\sum_{i=1}^m p(y|\omega_i) \cdot \pi_i}.$$

Ein Zahlenbeispiel möge die Änderung illustrieren:

$$m = 2 \quad (\text{nach Abschnitt 4}); \quad \omega_1 = 0,25, \quad \omega_2 = 0,75$$

$$n = 10 \quad (\text{Stichprobenumfang})$$

$$y = 6 \quad \text{beobachtete Anzahl defekter Stücke}$$

$$\pi_1 = 0,9 \quad \text{A-priori-Wahrscheinlichkeit für guten Warenposten}$$

$$p(\omega_1|6) = \frac{p(6|\omega_1) \cdot 0,9}{p(6|\omega_1) \cdot 0,9 + p(6|\omega_2) \cdot 0,1} = \frac{0,016 \cdot 0,9}{0,016 \cdot 0,9 + 0,146 \cdot 0,1} \approx 0,5.$$

Das ursprüngliche Vertrauen auf Lieferung eines guten Warenpostens, das sich in der nahe bei Eins gelegenen Wahrscheinlichkeit  $\pi_1$  manifestierte, ist auf Grund der relativ hohen Anzahl von defekten Stücken ( $y=6$ ) auf rund 0,5 gesunken.

## *Konstruktion der optimalen Strategie*

Zu jedem  $y \in S$  ( $y = 0, 1, \dots, n$ ) wählen wir jene Letztentscheidung  $a_k \in A$  ( $k = 1, 2$ ) für die

der *A-posteriori*-Erwartungswert des Nutzens möglichst gross wird, d.h.

$$6.2.3. \quad \sum_j u_{kj} \cdot p(\omega_j | y) \geq \sum_j u_{ij} \cdot p(\omega_j | y); \quad i \neq k.$$

6.2.3. induziert somit eine Entscheidungsfunktion  $d^* \in D$ , und zwar eine optimale im Sinne der jeweiligen Maximierung der Nutzen-erwartungen.

Im Falle  $\pi_1 = \pi_2 = 0,5$  (Laplace-Kriterium) ergibt die Konstruktion:

Wenn  $y \leq 3$  dann wähle  $a_1$

Wenn  $y > 3$  dann wähle  $a_2$ :

Diese Strategie ist aber identisch mit  $d_3$ , d.h. mit der nach der integralen Methode im Falle  $\pi_1 = 0,5$  gefundenen optimalen Strategie. Dies ist kein Zufall, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

### 6.3. Äquivalenz der beiden Methoden

Vorerst zeigen wir, dass eine im Sinne der konstruktiven Methode optimale Strategie  $d^*$  auch optimal ist nach der integralen Methode.

Zu zeigen: Das nach 6.1.1. definierte (negative) Bayessche Risiko ist für  $d^* \in D$  am grössten, d.h.

$$6.3.1. \quad \max_{d \in D} \bar{r}(d) = \bar{r}(d^*) = \sum_{\omega_j \in \Omega} \left( \sum_{y \in S} u[d^*(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot p(\omega_j).$$

Nach der Bayesschen Regel folgt:

$$6.3.2. \quad p(y|\omega_j) \cdot p(\omega_j) = p(\omega_j|y) \cdot p(y) .$$

Die rechte Seite von 6.3.1. geht nun nach 6.3.2. und der Änderung der Reihenfolge der Summation über in

$$6.3.3. \quad \bar{r}(d^*) = \sum_{y \in S} \underbrace{\left( \sum_{\omega_j \in \Omega} u[d^*(y), \omega_j] \cdot p(\omega_j | y) \right)}_{E_y} \cdot p(y).$$

Nach Voraussetzung ordnet aber die optimale Strategie  $d^*$  jedem  $y \in S$  jene Aktion  $a_i \in A$  zu, für welche der A-posteriori-Erwartungswert  $E_y$  möglichst gross ist. Damit wird aber auch die äussere Summe in 6.3.3. maximal. q.e.d.

Sei nun  $\tilde{d}$  die optimale Strategie nach der integralen Methode, d.h.

$$6.3.4. \quad \bar{r}(\tilde{d}) \geqq \bar{r}(d) \quad \text{für alle } d \in D.$$

Andererseits haben wir für  $d^*$  soeben bewiesen

$$6.3.5. \quad \bar{r}(d^*) \geqq \bar{r}(d) \quad \text{für alle } d \in D.$$

Da 6.3.4. insbesondere für  $d = d^*$  und 6.3.5. für  $d = \tilde{d}$  gilt, folgt schliesslich

$$\bar{r}(\tilde{d}) \geqq \bar{r}(d^*) \geqq \bar{r}(d)$$

und  $\bar{r}(\tilde{d}) = \bar{r}(d^*)$ .

Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

#### 6.4. Zusammenfassung und symbolische Übersicht

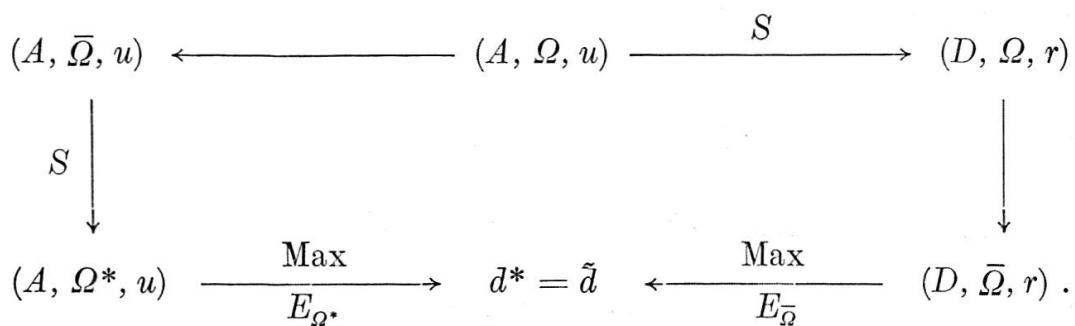
Nach der *integralen* Methode wird, ausgehend vom Tripel  $(A, \Omega, u)$ , über dem Stichprobenraum  $S$  der Raum  $D$  der Entscheidungsfunktionen aufgebaut, was zum Tripel  $(D, \Omega, r)$  führt.

Die Maximierung der A-priori-Erwartungswerte führt zur optimalen Strategie  $\tilde{d}$ .

Nach der *konstruktiven* Methode wird die A-priori-Wahrscheinlichkeit  $\pi_j$  auf Grund der Stichprobeninformation  $y \in S$  nach der Bayesschen Formel modifiziert. Die Maximierung der A-posteriori-Erwartungswerte definiert dann die optimale Strategie  $d^*$ .

Das nachfolgende Diagramm symbolisiert die beiden Varianten, die zum selben Ziel führen; dabei bedeuten:

- $\bar{\Omega}$ : Zustandsraum, versehen mit A-priori-Verteilung.  
 $\Omega^*$ : Zustandsraum, versehen mit A-posteriori-Verteilung.  
 $\xrightarrow{S}$ : über dem Stichprobenraum  $S$  erfolgt die Konstruktion von ...  
 $E_{\bar{\Omega}}$  bzw.  $E_{\Omega^*}$ : Erwartungswert bezüglich  $\bar{\Omega}$  bzw.  $\Omega^*$



## 7. Spieltheoretische Interpretation

Wir beziehen uns auf die Bemerkungen von Abschnitt 2.4. und interpretieren das Tripel  $(A, \Omega, u)$  als Spielmatrix 2. Ordnung eines sogenannten *2-Personen-Nullsummenspiels* des Entscheidenden (Statistiker) als 1. Spieler gegen die Umwelt oder Natur als 2. Spieler.

$u_{ij}$  ist dann der Nutzen oder Gewinn des 1. Spielers und gleichzeitig der Verlust des 2. Spielers bei Anwendung der Strategien  $a_i$  bzw.  $\omega_j$ .

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W_1 = (\pi_1, \pi_2)$  über  $\Omega$  können wir dann als sogenannte *gemischte Strategie* der Umwelt bezeichnen und entsprechend eine Verteilung  $W_2 = (p_1, p_2)$  über dem Aktionsraum  $A$  als gemischte Strategie des Entscheidenden.

Die erstere bezeichnen wir fortan mit  $(\pi_1, \omega_1, \pi_2, \omega_2)$  und die letztere mit  $(p_1 a_1, p_2 a_2)$ .

Eine Strategie mit  $\pi_i = 1$  (bzw.  $p_i = 1$ ) heißt eine *reine* Strategie.

7.1.

|       |       | $\pi_1$    | $\pi_2$    |
|-------|-------|------------|------------|
|       |       | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
| $p_1$ | $a_1$ | $u_{11}$   | $u_{12}$   |
|       | $a_2$ | $u_{21}$   | $u_{22}$   |

Nach 4.4. geht 7.1. über in

7.2.

|       |        | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
|-------|--------|------------|------------|
| $a_1$ | $fK-s$ | $-K-s$     |            |
|       | $-s$   | $-s$       |            |

Grundsätzlich ist festzuhalten, dass die Lösung des Spiels 7.1. entweder im Bereich der reinen oder der gemischten Strategien liegt. Im 1. Fall besitzt die Spielmatrix einen sogenannten *Sattelpunkt*, im 2. Fall nicht.

Die folgenden Sätze beziehen sich auf 2-Personen-Nullsummenspiele.

*Satz 7.1.* Wenn  $u_{ij}$  zugleich Zeilenminimum und Kolonnenmaximum ist, ist  $(i, j)$  ein Sattelpunkt und umgekehrt.

*Satz 7.2.* Kriterium von *von Neumann* [11]. Eine Spielmatrix 2. Ordnung besitzt genau dann keinen Sattelpunkt, wenn die Elemente in den Diagonalen «separierbar» sind, d.h. wenn

$$u_{11} > u_{12} \quad \text{und} \quad u_{22} > u_{21}$$

oder

$$u_{11} < u_{12} \quad \text{und} \quad u_{22} < u_{21}.$$

*Satz 7.3.* Wenn die Voraussetzungen von Satz 7.2. erfüllt sind, hat das Spiel eine eindeutige Lösung im Bereich der gemischten Strategien, und zwar

$$\begin{aligned} \text{1. Spieler: } (p_1^* a_1, p_2^* a_2) \quad \text{mit} \quad p_1^* &= \frac{u_{22} - u_{21}}{u_{11} + u_{22} - u_{12} - u_{21}} \\ p_2^* &= 1 - p_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Spieler: } (\pi_1^* \omega_1, \pi_2^* \omega_2) \quad \text{mit} \quad \pi_1^* &= \frac{u_{22} - u_{12}}{u_{11} + u_{22} - u_{12} - u_{21}} \\ \pi_2^* &= 1 - \pi_1^*. \end{aligned}$$

Das spezielle Spiel 7.2. hat nach Satz 7.1. einen Sattelpunkt in  $(2,2)$  mit einer eindeutigen Lösung im Bereich der reinen Strategien:

«Der Entscheidende wählt Aktion  $a_2$  und die Umwelt den Zustand  $\omega_2$ .»

Damit resultiert der Nutzen  $u_{22} = -s$ , der sogenannte *Wert* des Spiels. Wählt man anstelle der ursprünglichen Nutzen oder Gewinne  $u_{ij}$  die nach 5.3.1. definierten *entgangenen Gewinne*  $l(a_i, \omega_j)$ , so geht 7.2. über in

7.3.

|       |      | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
|-------|------|------------|------------|
|       |      | $a_1$      | $K$        |
| $a_2$ | $fK$ | 0          |            |

Diese Matrix wird als Nullsummenspiel aufgefasst, wobei die entgangenen Gewinne als «Schaden» des 1. Spielers (Statistiker) und gleichzeitig als Nutzen des 2. Spielers (Umwelt) zu interpretieren sind. Nach den Sätzen 7.2. und 7.3. besitzt dieses Spiel eine eindeutige Lösung im Bereich der gemischten Strategien, nämlich:

1. Spieler:  $\left( \frac{f}{1+f} a_1, \frac{1}{1+f} a_2 \right);$

2. Spieler:  $\left( \frac{1}{1+f} \omega_1, \frac{f}{1+f} \omega_2 \right).$

### Geometrische Interpretation

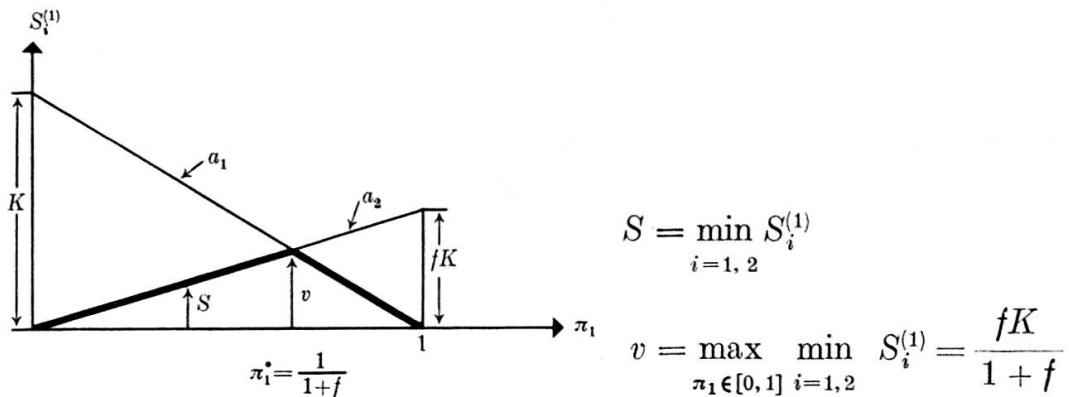
Sei  $S_i^{(1)}$  der erwartete Schaden des Statistikers, wenn er  $a_i$  wählt und die Umwelt  $(\pi_1 \omega_1, \pi_2 \omega_2)$  mit  $\pi_2 = 1 - \pi_1$ .

$$S_1^{(1)} = K(1 - \pi_1)$$

Man findet:  $0 \leqq \pi_1 \leqq 1.$

$$S_2^{(1)} = fK \cdot \pi_1$$

Fig. 7.1.



$(\pi_1^* \omega_1, \pi_2^* \omega_2)$  mit  $\pi_1^* = \frac{1}{1+f}$  ist die optimale Strategie der Umwelt (auch ungünstigste A-priori-Verteilung genannt), zwecks Maximierung der minimalen Schäden ihres Gegenspielers.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie  $\pi_1^* = \frac{1}{1+f}$  bei der Bestimmung der optimalen Strategie (nach der sogenannten konstruktiven Mehtode und unter Benützung der entgangenen Gewinne – siehe 6.2.3) eine Rolle spielt.

## 8. Brückenschlag zur «klassischen Statistik»

Wir gehen aus vom Tripel  $(A, \Omega, l)$ , das wir soeben spieltheoretisch interpretiert haben.

Aus Figur 7.1 liest man für den 1. Spieler folgende Entscheidungsregel ab:

$$8.1. \quad \pi_1 < \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_2$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_1 \text{ oder Aktion } a_2$$

$$\pi_1 > \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_1,$$

Nach der sogenannten *konstruktiven* Methode (siehe 6.2.3.) ordnen wir jedem Stichprobenergebnis  $y \in S$  jene Aktion  $a_i$  zu, für die der *A-posteriori-Erwartungswert der entgangenen Gewinne möglichst klein ist*.

Ersetzt man daher in 8.1. die A-priori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1 = p(\omega_1)$  durch die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten  $p(\omega_1|y)$ , so modifiziert sich die *statistische* Entscheidungsregel nach der konstruktiven Methode wie folgt:

$$8.2. \quad p(\omega_1|y) < \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_2$$

$$p(\omega_1|y) = \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2$$

$$p(\omega_1|y) > \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_1.$$

Nach 6.2.2. folgt für  $p(\omega_1|y)$  nach einer kleinen Umformung:

$$8.3. \quad p(\omega_1|y) = \frac{1}{1 + \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} \cdot \frac{1 - \pi_1}{\pi_1}}; \quad \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} = Q.$$

8.2. geht dann über in die äquivalente Form

$$8.4. \quad \begin{cases} \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} > C \longrightarrow a_2 \\ \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} > C \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2 \\ \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} < C \longrightarrow a_1, \end{cases}$$

wobei  $C$  Lösung der Gleichung

$$8.5. \quad \frac{1}{1 + Q \frac{1 - \pi_1}{\pi_1}} = \pi_1^* = \frac{1}{1+f} \quad \text{in der Unbekannten } Q \text{ ist.}$$

Aus 8.5. folgt:

$$8.6. \quad C = f \frac{\pi_1}{1 - \pi_1} .$$

Mit 8.4., dem sogenannten *Likelihood-Quotiententest*, haben wir die Nahtstelle mit der «klassischen» Statistik gefunden.

*Es ist uns gelungen, die Grenzzahl  $C$  durch eine ökonomische Bewertung einerseits ( $f$  = Gewinnsatz) und sogenannte *A-priori-Vorurteile* andererseits ( $\pi_1$  = Idealmaß für die Glaubwürdigkeit in «guten» Warenposten) zu motivieren und mittels 8.6. funktionell darzustellen.*

Interessant ist die Feststellung, dass sich die *ungünstigste A-priori-Verteilung*  $\pi_1^* = \frac{1}{1+f}$  (vom Entscheidenden aus gesehen) auch von den ursprünglichen Nutzen oder Gewinnen her (7.2.) ableiten lässt.

*Berechnung der optimalen Annahmekennzahl  $k^*$*

Ersetzt man in 8.4. die  $p(y|\omega_i)$  durch

$$p(y|\omega_i) = \binom{n}{y} \omega_i^y (1-\omega_i)^{n-y} ,$$

so geht etwa die linke Seite der 1. Zeile von 8.4. über in

$$8.4a. \quad \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^y \cdot \left( \frac{1-\omega_2}{1-\omega_1} \right)^{n-y} > C ; \quad \omega_2 > \omega_1$$

weiter folgt durch Logarithmieren

$$\begin{aligned} A &= \log \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0 \\ Ay - B(n-y) &> \log C \quad \text{mit} \quad R = -\log \left( \frac{1-\omega_2}{1-\omega_1} \right) > 0 \end{aligned}$$

oder  $y > \frac{\log C + nB}{A + B} .$

Da  $y \in S$  nur ganzzahlige Werte (oder Null) annehmen kann, folgt für die optimale Annahmekennzahl  $k^*$  im Sinne des Bayesschen Kriteriums

8.7.  $k^* = \left[ \frac{\log C + nB}{A + B} \right], \quad \text{wobei } [x] = \text{grösste ganze Zahl kleiner als } x.$

Ersetzt man  $C$  nach 8.6., so folgt endlich:

8.8.  $k^* = \left[ \frac{\log \left[ f \frac{\pi_1}{1-\pi_1} \right] + n \log \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\log \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{1-\omega_1}{1-\omega_2} \right)} \right].$

Obige Formel gestattet uns im Falle des Testens einer einfachen Hypothese  $\omega = \omega_1$  gegen eine einfache Alternative  $\omega = \omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ) bei gegebener ökonomischer Bewertung nach 7.2. bzw. 7.4. ( $f$  = Gewinnsatz) und bekannter A-priori-Verteilung  $W = (\pi_1, 1-\pi_1)$  über  $\Omega$  die nach dem *Bayesschen Kriterium* optimale Annahmekennzahl  $k^*$  bzw. die optimale Entscheidungsfunktion  $d_k^*$  zu berechnen.

Ein Zahlenbeispiel:  $f = 0,1; \quad \pi_1 = 0,7; \quad n = 10$   
 $\omega_1 = 0,25; \quad \omega_2 = 0,75.$

Nach Figur 6 müsste  $k^*$  offenbar 4 sein.

Nach 8.8.:

$$k^* = \left[ \frac{\log \left( \frac{7}{30} \right) + 10 \cdot \log 3}{\log 9} \right] = [4,03] = 4.$$

## 9. Planung bei Unsicherheit

### 9.1. Einleitung

Die bisherigen Betrachtungen erstreckten sich auf die entscheidungstheoretische Interpretation und Lösung eines innerstatistischen Problems, nämlich auf das *Testen von Hypothesen*. Dabei beschränkten wir uns (besonders bei den Konstruktion optimaler Strategien) auf den Zustandsraum  $\Omega$  mit 2 möglichen Zuständen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

Wir wollen im folgenden den Anwendungsbereich etwas weiter fassen und die *Planung bei Unsicherheit* entscheidungstheoretisch motivieren und in gewissen Fällen die *optimale Strategie konstruieren*.

Dabei kommen neue Aspekte hinzu, nämlich:

- a) anstelle der Gewinne (Nutzen) werden jetzt grundsätzlich die *entgangenen Gewinne* oder «opportunity losses» der ökonomischen Bewertung zugrunde gelegt;
- b) die oben definierten Gewinne werden als *lineare Funktion* der Zustandsvariablen  $\omega$  angenommen;
- c) der Zustandsraum  $\Omega$  wird auch auf das ganze Intervall  $\Omega = [0, 1]$  erstreckt (unendlicher Zustandsraum);
- d) über  $\Omega = [0, 1]$  wird eine besonders umfassende Klasse von A-priori-Verteilungen näher studiert.

## 9.2. Formulierung des Problems

Ein Unternehmen plant die Fabrikation eines neuen Artikels, der nur während einer kurzen Zeit auf dem Markt abgesetzt werden kann. Dabei sei unbekannt, welcher *Anteil*  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) der potentiellen Käuferschaft ( $N$  Personen) den Artikel beschaffen wird.

Vereinfachende Annahmen (unter Ceteris-paribus-Voraussetzung):

$F$  = fixe Herstellungskosten, die bei der Fabrikation neu erwachsen.

9.2.1.  $g$  = Nettogewinn pro Stück (dieser Gewinn versteht sich als Restgrösse aus Verkaufspreis abzüglich variable Kosten pro Stück).

$\bar{\omega}$  = Anteil der potentiellen Käuferschaft, für den die fixen Kosten durch den Verkauf gerade gedeckt werden, d.h.  $N \cdot \bar{\omega} \cdot g = F$ .

Die Unternehmensleitung verfüge über *zwei Aktionen* oder Letzentscheidungen:

- $a_1$ : nicht fabrizieren
- $a_2$ : fabrizieren.

Die Zustände  $\omega \in [0,1]$  (oder  $\omega_j$ , wenn es nur endlich viele Zustände gibt) sind die theoretisch möglichen Absatz- oder Verkaufsziffern.

Erfolgt die Aktion  $a_i (i = 1, 2)$  im Zustand  $\omega$ , so resultiere daraus ein Gewinn  $u(a_i, \omega)$  bzw.  $u(a_i, \omega_j)$ , für den wir folgenden Ansatz machen.

$$9.2.2. \quad \begin{cases} u(a_1, \omega) = 0 \\ u(a_2, \omega) = c(\omega - \bar{\omega}) ; \end{cases} \quad c > 0, \quad 0 < \bar{\omega} < 1,$$

wobei noch gilt:  $c \bar{\omega} = F = N \bar{\omega} g$

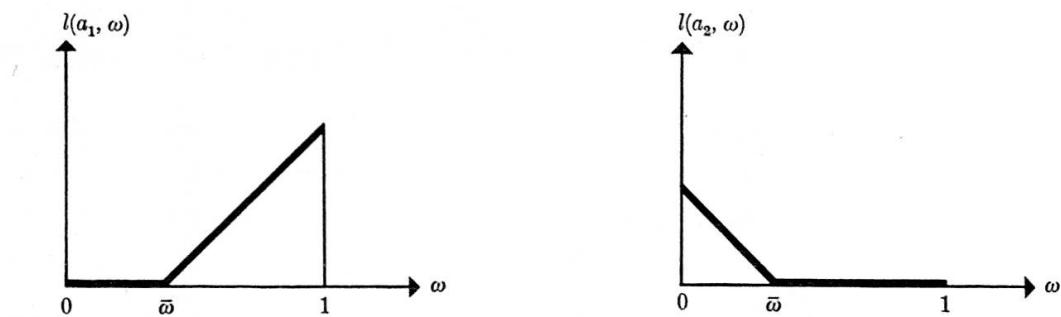
oder  $c = Ng$ .

Praktisch wohl von grösserer Bedeutung sind die sogenannten *entgangenen Gewinne* oder «opportunity losses»  $l(a_i, \omega)$ , die nach 5.3.1. wie folgt definiert sind:

$$9.2.3. \quad l(a_i, \omega) = \max_{h=1, 2} u(a_h, \omega) - u(a_i, \omega) \quad [12]$$

Nach 9.2.2. folgt dann

$$9.2.4. \quad \begin{cases} l(a_1, \omega) = \begin{cases} 0 ; & \omega \leq \bar{\omega} \\ c(\omega - \bar{\omega}) ; & \omega \geq \bar{\omega} \end{cases} \\ l(a_2, \omega) = \begin{cases} c(\bar{\omega} - \omega) ; & \omega \leq \bar{\omega} \\ 0 ; & \omega \geq \bar{\omega} . \end{cases} \end{cases}$$



### Stichprobenerhebung. Entscheidungsfunktionen

Mittels einer Stichprobe werden wir auch hier versuchen, Information über die unbekannten Zustände  $\omega \in \Omega$  einzuholen.

Konkret werden z. B.  $n$  Personen aus dem potentiellen Käuferkreis *zufällig* befragt, ob sie den besagten Artikel kaufen werden oder nicht.

Unter gewissen, in 3.3. formulierten Voraussetzungen ist wiederum die Anwendung der Binomialverteilung erlaubt.

$Y$  = Anzahl Personen unter den  $n$  befragten, die mit *ja* antworten.

$$p\{Y = y | \omega\} = p(y | \omega) = \binom{n}{y} \cdot \omega^y (1 - \omega)^{n-y}$$

9.2.5.

$$p\{Y \leq k | \omega\} = \sum_{y \leq k} p(y | \omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} \Phi(k | \omega).$$

$\Phi(k | \omega)$  ist die sogenannte *Verteilungsfunktion*.

Dabei haben wir wiederum eine Entscheidungsfunktion oder Strategie  $d_k$  festzulegen, die jedem  $y \in S$  genau eine Aktion  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) zuordnet.

Analog 4.2. definieren wir die folgende Teilmenge von Entscheidungsfunktionen

$$9.2.6. \quad d_k(y) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } y \leq k \\ a_2, & \text{falls } y > k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zu jedem Zustand  $\omega \in \Omega$  berechnet sich jetzt das sogenannte *Risiko* oder der *mittlere entgangene Gewinn*  $r(d_k, \omega)$

$$r(d_k, \omega) = \sum_{y=0}^n l[d_k(y), \omega] \cdot p(y | \omega)$$

oder gemäss 9.2.5. und 9.2.6.

$$9.2.7. \quad r(d_k, \omega) = \Phi(k | \omega) \cdot l(a_1, \omega) + [1 - \Phi(k | \omega)] \cdot l(a_2, \omega).$$

*Konstruktion optimaler Strategien*

## 10. Unsicherheitssituation i. e. S. Endlicher Zustandsraum.

### Minimax-Kriterium

Über die Häufigkeit des Auftretens der  $\omega_j \in \Omega$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) sei nichts bekannt. In einer solchen Situation kann man etwa mit dem

*Minimax-Kriterium* die optimale Strategie  $d_k$  bestimmen.  $d_k$  heisst dann optimal, wenn

$$10.1. \quad \max_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) = \min_{d_i \in D} \max_{\omega_j \in \Omega} r(d_i, \omega_j).$$

*Konkrete Durchführung an einem praktischen Beispiel*

In der Praxis mag es vorkommen, dass lediglich einige wenige Zustände oder Anteile  $\omega_j$  als möglich erscheinen.

Wir treffen deshalb folgende Annahmen:

$$10.2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_j = \frac{j}{100}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 8 \\ \bar{\omega} = \frac{4}{100} \\ n = 100 \quad (= \text{Anzahl der befragten Personen}) \end{array} \right.$$

und in Anlehnung an 9.2.4., indem man  $\omega$  durch  $\omega_j$  ersetzt,

$$10.3. \quad \begin{aligned} l(a_1, \omega_j) &= \begin{cases} 0; & 0 \leq j \leq 4 \\ c(j-4); & 4 < j \leq 8 \end{cases} \\ l(a_2, \omega_j) &= \begin{cases} c(4-j); & 0 \leq j \leq 4 \\ 0; & 4 < j \leq 8 \end{cases}. \end{aligned}$$

Die mittleren entgangenen Gewinne (Risiken) berechnen sich nun nach 9.2.7. unter Berücksichtigung von 10.2. und 10.3. wie folgt:

$$10.4. \quad r(d_k, \omega_j) = \begin{cases} c \cdot [1 - \Phi(k | \omega_j)] \cdot (4-j); & 0 \leq j \leq 4 \\ c \cdot \Phi(k | \omega_j) \cdot (j-4); & 4 < j \leq 8. \end{cases}$$

Bei der Optimierung kann man offenbar  $c > 0$  vernachlässigen, und  $\Phi(k | \omega_j)$  berechnet sich nach der Poisson-Verteilung mit hinreichender Genauigkeit:

$$10.5. \quad \Phi(k | \omega_j) = \Phi\left(k \left| \frac{j}{100}\right.\right) \approx \sum_{s=0}^k \frac{e^{-j} \cdot j^s}{s!}; \quad k = 0, 1, \dots, 99.$$

Die numerischen Werte von 10.5. wurden dem Tabellenwerk [13] entnommen.

Bis auf den konstanten Faktor  $c > 0$  sind die mittleren entgangenen Gewinne  $r(d_k, \omega_j)$  nachfolgend tabelliert.

Hierbei ist zu beachten:  $\Phi(k | \omega_0) = \Phi(k | 0) = 1$  für  $k = 0, 1, \dots$ ,  
 $r(d_k, \omega_8) > 1$  für  $k > 6$ .

Tabelle 10.1.  $r(d_k, \omega_j)$

| $d_k \backslash \omega_j$ | $\omega_0$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | Max   |
|---------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------|
| $d_0$                     | 0          | 1.899      | 1.730      | 0.951      | 0          | 0.007      | 0.005      | 0.003      | 0.001      | 1.899 |
| $d_1$                     | 0          | 0.795      | 1.188      | 0.801      | 0          | 0.040      | 0.034      | 0.021      | 0.009      | 1.188 |
| $d_2$                     | 0          | 0.243      | 0.648      | 0.577      | 0          | 0.125      | 0.124      | 0.058      | 0.028      | 0.648 |
| $d_3$                     | 0          | 0.057      | 0.286      | 0.353      | 0          | 0.265      | 0.302      | 0.243      | 0.168      | 0.353 |
| $d_4$                     | 0          | 0.012      | 0.106      | 0.185      | 0          | 0.440      | 0.570      | 0.519      | 0.400      | 0.570 |
| $d_5$                     | 0          | 0.003      | 0.034      | 0.084      | 0          | 0.616      | 0.890      | 0.900      | 0.573      | 0.900 |
| $d_6$                     | 0          | 0          | 0.010      | 0.034      | 0          | 0.762      | 1.212      | 1.350      | 1.252      | 1.350 |

Min Max

Da  $\max_j r(d_3, \omega_j) < \max_j r(d_i, \omega_j)$  für alle  $i \neq 3$ , folgt:

$d_3$  ist die optimale Strategie.

## 11. Risikosituation. Endlicher Zustandsraum

Über dem Zustandsraum  $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  sei eine A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  bekannt.

Unter dem Bayesschen Risiko  $\bar{r}(d_k)$  verstehen wir gemäss 5.4.1.

$$11.1. \quad \bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^m r(d_k, \omega_j) \cdot p(\omega_j) = \sum_{j=1}^m r(d_k, \omega_j) \cdot \pi_j.$$

Nach der integralen Methode ist  $d_k$  im Sinne des Bayesschen Kriteriums optimal (angewandt auf die entgangenen Gewinne), wenn

$$\bar{r}(d_k) \leqq \bar{r}(d_i); \quad i \neq k.$$

*Numerische Durchführung für das Beispiel in Abschnitt 10*

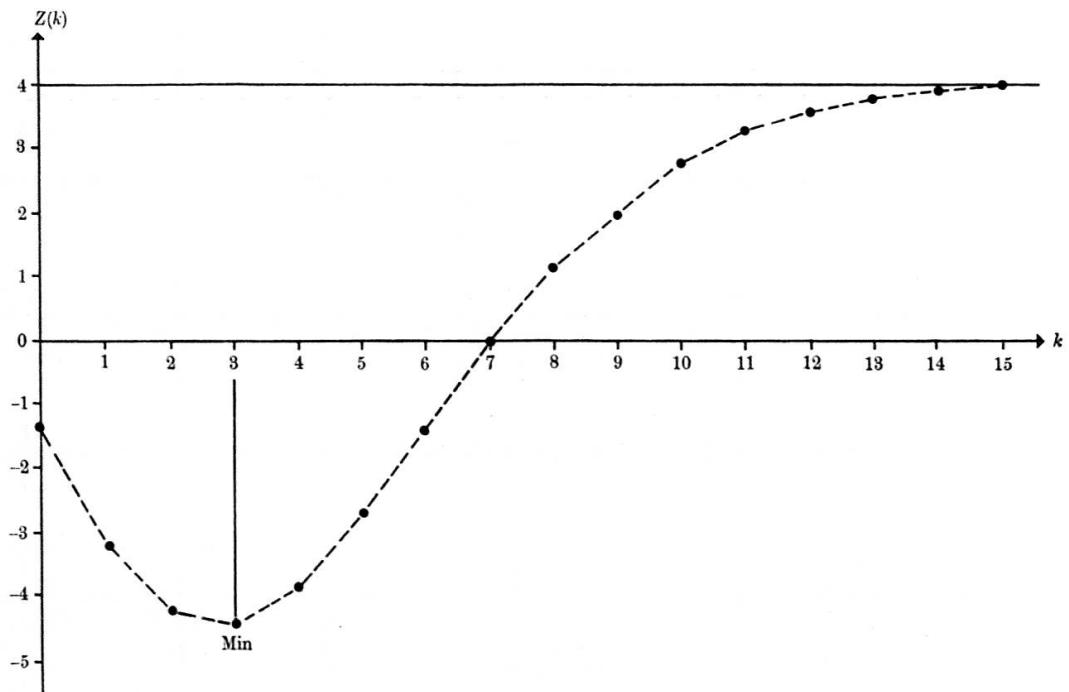
Neben 10.2. und 10.3. gelte:

$\pi_2 = \text{konst.} \longrightarrow \text{Laplacesches Kriterium!}$

Nach 10.4. berechnet sich dann das Bayessche Risiko (bis auf einen konstanten Faktor) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 11.2. \quad \bar{r}(d_k) &= \sum_{j=0}^8 r(d_k, \omega_j) \\
 &= \sum_{j=0}^4 [1 - \Phi(k | \omega_j)] \cdot (4-j) + \sum_{j=5}^8 \Phi(k | \omega_j) (j-4) \\
 &= \sum_{j=0}^8 \Phi(k | \omega_j) \cdot (j-4) + \sum_{j=0}^4 4-j \\
 &= \sum_{j=1}^8 \Phi(k | \omega_j) \cdot (j-4) + 6 = Z(k) + 6.
 \end{aligned}$$

*Fig. 11.1.*



11.3.  $Z(k) = \sum_{j=1}^8 \Phi(k | \omega_j) \cdot (j-4) .$

Für welchen Wert von  $k = 0, 1, 2, \dots, 99$  ist die Zielgrösse  $Z(k)$  minimal?

Aus Figur 11.1 lesen wir ab:

$$\min_k Z(k) = Z(3) , \quad \text{d.f. :}$$

$d_3$  ist die optimale Strategie nach Laplace.

Man beachte ausserdem:

$$\omega_j \in \Omega ; \quad \Phi(k | \omega_j) \approx 1 \quad \text{für } k > 15 \quad \text{und somit}$$

$$Z(k) \approx \sum_{j=1}^8 (j-4) = 4 \quad \text{für } k > 15 .$$

### Graphische Interpretation der integralen und konstruktiven Methode mit Baumdiagrammen

#### 11.4. Integrale Methode

Wir versuchen das Bayessche Risiko  $\bar{r}(d_k)$  graphisch zu illustrieren. In seiner ursprünglichen Form heisst es

$$\bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{y=0}^n l[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y | \omega_j) \right) \cdot \pi_j$$

$\omega_1, \omega_2 \dots \omega_m$  Zustände der Umwelt

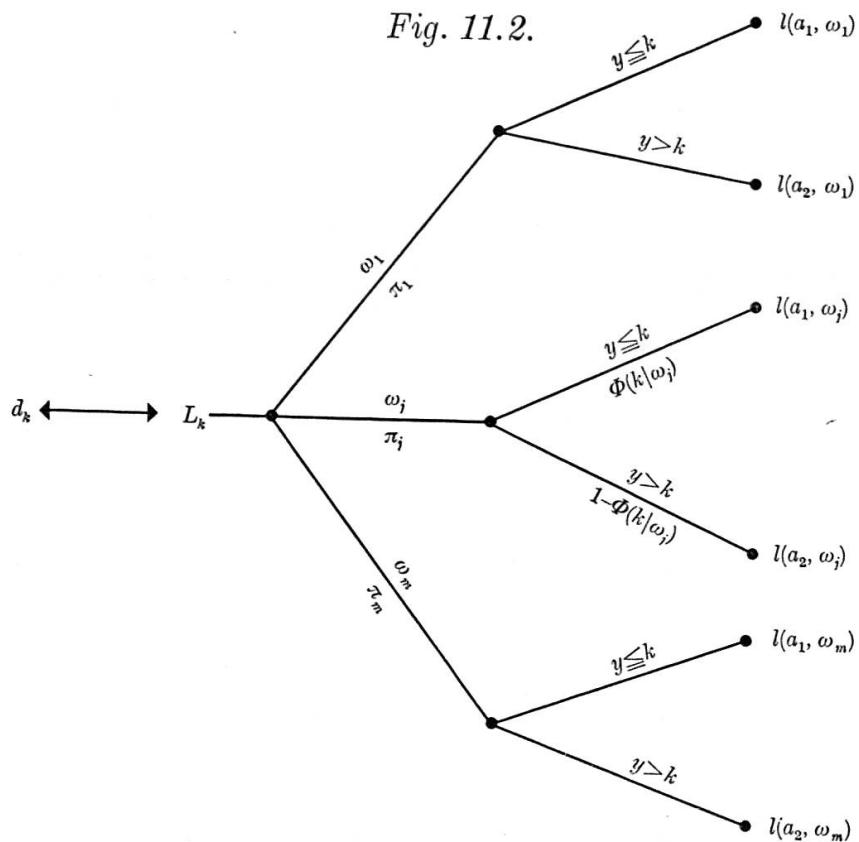
$y = 0, 1, \dots, n$  Ergebnisse der Stichprobe

$p(\omega_j) = \pi_j$  A-priori-Wahrscheinlichkeiten über  $\Omega$

$d_k(y) =$  Entscheidungsfunktion nach 9.2.6.

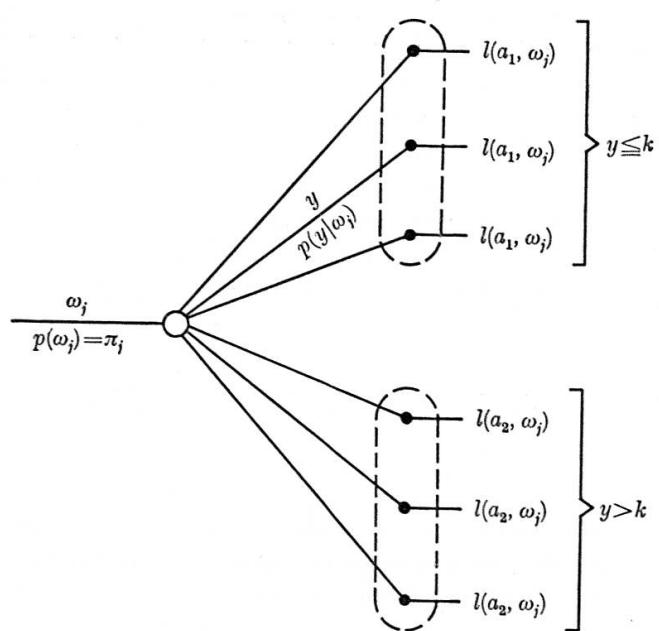
Jeder Entscheidungsfunktion  $d_k(k = 0, 1, \dots, n-1)$  können wir das folgende Baumdiagramm in Form einer sogenannten *zusammengesetzten Lotterie*  $L_k$  zuordnen:

Fig. 11.2.



Nahaufnahme für irgendeinen Zustand  $\omega_j$ :

Fig. 11.2 a.



Das Bayessche Risiko  $\bar{r}(d_k)$  kann somit als Erwartungswert der zusammengesetzten Lotterie  $L_k$  interpretiert werden, und  $d_k$  heisst optimal (nach der integralen Methode), wenn die zugehörige Lotterie  $L_k$  den kleinsten Erwartungswert hat.

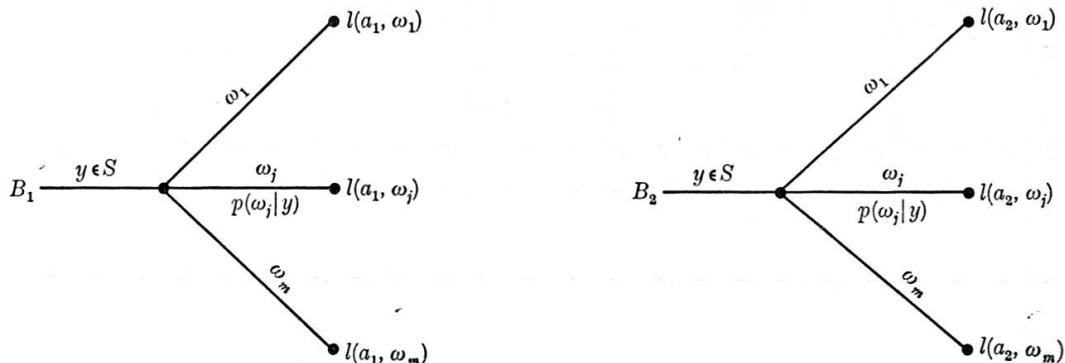
### 11.5. Konstruktive Methode

Jedem Stichprobenergebnis  $y \in S$  ( $y = 0, 1, \dots, n$ ) wird jene Aktion  $a_i$  zugeordnet ( $i = 1, 2$ ), für die der A-posteriori-Erwartungswert  $E_y$

$$E_y = \sum_{j=1}^m l(a_i, \omega_j) \cdot p(\omega_j | y) \quad \text{möglichst klein ist.}$$

Jedem  $y \in S$  können wir somit das folgende *Paar* ( $B_1, B_2$ ) von Lotterien zuordnen.

Fig. 11.3.



Dabei wählen wir (zu  $y \in S$ ) jene Aktion  $a_i$ , für die der Erwartungswert der Lotterie  $B_i$  minimal ist.

Der Baum in Figur 11.3. (konstruktive Methode) ist gerade die «Umkehrung» des Baumes von Fig. 11.2a. (integrale Methode). Die Bayessche Formel 6.2.2. gestattet uns, die transformierten Wahrscheinlichkeiten, die mit einer solchen Umkehrung verbunden sind, berechnen.

12. Risikosituation. Zustandsraum  $\Omega = [0,1]$ .  
A-priori-Betaverteilung über  $\Omega$

Sei  $\varphi(\omega)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte einer beliebigen Verteilungsfunktion über  $\Omega = [0,1]$

$$12.1. \quad \varphi(\omega) \geqq 0; \quad \int_0^1 \varphi(\omega) d\omega = 1; \quad 0 \leqq \omega \leqq 1.$$

Das *Bayessche Risiko* für das 2-Aktionen-Problem nach 9.2. ist dann bekanntlich

$$\begin{aligned} 12.2. \quad \bar{r}(d_k) &= \int_0^1 \left( \sum_{y=0}^n l[d_k(y), \omega] \cdot p(y | \omega) \right) \cdot \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_0^1 \{ \Phi(k | \omega) \cdot l(a_1, \omega) + [1 - \Phi(k | \omega)] \cdot l(a_2, \omega) \} \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_0^1 \Phi(k | \omega) [l(a_1, \omega) - l(a_2, \omega)] \varphi(\omega) d\omega + S. \end{aligned}$$

Nach der *integralen* Methode ist die Strategie  $d_i$  optimal, falls

$$\bar{r}(d_i) \leqq \bar{r}(d_k) \quad \text{für alle } k \neq i$$

oder, da  $S$  von  $k$  unabhängig ist, falls für die Zielfunktion  $Z(k)$  mit

$$12.3. \quad Z(k) = \int_0^1 \Phi(k | \omega) [l(a_1, \omega) - l(a_2, \omega)] \varphi(\omega) d\omega$$

$$\text{gilt:} \quad Z(i) \leqq Z(k) \quad \text{für alle } k \neq i.$$

Wir wollen nun für  $\varphi(\omega)$  eine ziemlich umfassende, zwei-parametrische Gesamtheit von A-priori-Verteilungen zulassen, nämlich die sogenannten *Beta-Verteilungen* [14].

Ihre Dichtefunktion  $f_{\alpha, \beta}(\omega)$  ist wie folgt definiert:

$$12.4. \quad \varphi(\omega) = f_{\alpha, \beta}(\omega) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1}, \quad 0 \leqq \omega \leqq 1 \\ \alpha, \beta > 0$$

mit der sogenannten *vollständigen Betafunktion*  $B(\alpha, \beta)$ , die bereits von Leonhard Euler in einer speziellen Form untersucht wurde.

12.4 a. 
$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} d\omega$$

Ersetzt man nun in 12.3. die  $l(a_i, \omega)$  durch die speziellen linearen Funktionen 9.2.4. und  $\Phi(k|\omega)$  nach 9.2.5., so folgt:

12.5.

$$\begin{aligned} Z(k) &= \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \left[ \sum_{y=0}^n \binom{n}{y} \omega^y (1-\omega)^{n-y} \right] \cdot (\omega - \bar{\omega}) \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} d\omega \\ &= \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \sum_{y=0}^n \binom{n}{y} [B(\alpha+y+1, \beta+n-y) - \bar{\omega} \cdot B(\alpha+y, \beta+n-y)] \right\}. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion  $Z(k)$  ist also im wesentlichen abhängig von der vollständigen Betafunktion.

Der folgende Hilfssatz gestattet uns, die erste Zeile von 12.5. umzuformen:

*Hilfssatz:* [16]:

Sei  $Y$  eine binomial verteilte Zufallsvariable und  $\omega$  die zugehörige Grundwahrscheinlichkeit; dann gilt:

12.6.

$$p\{Y > k | \omega\} = 1 - \Phi(k | \omega) = \int_0^\omega \frac{t^k (1-t)^{n-k-1}}{B(k+1, n-k)} dt = \frac{B_{k+1, n-k}(\omega)}{B(k+1, n-k)},$$

wobei

12.6 a. 
$$B_{\alpha, \beta}(\omega) = \int_0^\omega t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

die sogenannte *unvollständige Betafunktion* darstellt [15].

Der erste Term in 12.5. geht dann über in

12.7.

$$Z(k) = \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \left[ 1 - \frac{B_{k+1, n-k}(\omega)}{B(k+1, n-k)} \right] \cdot (\omega - \bar{\omega}) \cdot \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} d\omega.$$

Die Minimierung von  $Z(k)$  ist somit äquivalent mit der Maximierung von

12.8.

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \int_0^1 [B_{k+1, n-k}(\omega)] \cdot (\omega - \bar{\omega}) \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} d\omega.$$

Für den Spezialfall der sogenannten *Rechtecksverteilung*, d. h. für  $\alpha = \beta = 1$ , lässt sich  $Z^*(k)$  explizite durch vollständige Betafunktionen beschreiben.

12.8. geht unter den genannten Voraussetzungen über in:

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \int_0^1 \left( \int_0^\omega t^k (1-t)^{n-k-1} dt \right) (\omega - \bar{\omega}) d\omega.$$

Nach partieller Integration und einigen kleinen Umformungen findet man (von einem konstanten Summanden abgesehen):

12.9.

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \left[ \bar{\omega} \cdot B(k+2, n-k) - \frac{1}{2} B(k+3; n-k) \right].$$

Abschliessend wollen wir für den allgemeinen Fall ( $\alpha, \beta > 0$  beliebig) die optimale Strategie nach der *konstruktiven Methode* ermitteln. Sie wird sich als flexibler und praktischen Problemen zugänglicher erweisen.

Nach der konstruktiven Methode ordnen wir jedem Stichprobenergebnis  $y \in S$  ( $y = 0, 1, \dots, n$ ) jene Aktion  $a_i \in A$  ( $i = 1, 2$ ) zu, für die der *A-posteriori-Erwartungswert* der entgangenen Gewinne

$$12.10. \quad E_{a_i} = \int_0^1 l(a_i, \omega) \cdot p(\omega | y) d\omega; \quad i = 1, 2$$

minimal ist.

$p(\omega | y)$  ist die sogenannte *A-posteriori-Dichte* über  $\Omega$  und lässt sich nach der Bayesschen Formel wie folgt berechnen:

12.11.  $p(\omega | y) = \frac{p(y|\omega) \cdot \varphi(\omega)}{\int_0^1 p(y|\omega) \cdot \varphi(\omega) d\omega} ; \quad \varphi(\omega) = \text{A-priori-Dichte} .$

Unter Berücksichtigung der speziellen Annahmen für  $l(a_i, \omega)$  nach 9.2.4. und für  $\varphi(\omega)$  nach 12.4. folgt aus 12.10.:

$$E_{a_1} = \int_{\bar{\omega}}^1 (\omega - \bar{\omega}) \frac{\omega^{\alpha+y-1} (1-\omega)^{\beta+n-y-1}}{\int_0^1 t^{\alpha+y-1} (1-t)^{\beta+n-y-1} dt} d\omega$$

und nach 12.4.  $= \int_{\bar{\omega}}^1 (\omega - \bar{\omega}) f_{\alpha+y, \beta+n-y}(\omega) d\omega$

analog:  $E_{a_2} = \int_0^{\bar{\omega}} (\bar{\omega} - \omega) f_{\alpha+y, \beta+n-y}(\omega) d\omega .$

Wir bilden nun die Differenz  $\Delta$  der beiden Erwartungswerte

12.12.  $\Delta = E_{a_1} - E_{a_2} = \int_0^1 (\omega - \bar{\omega}) f_{\alpha+y, \beta+n-y}(\omega) d\omega$   
 $= \int_0^1 \omega \cdot f_{\alpha+y, \beta+n-y}(\omega) d\omega - \bar{\omega} .$

$\int_0^1 \omega f d\omega$  ist aber der Erwartungswert einer betaverteilten Zufallsvariablen  $\tilde{\omega}$  mit den Parametern  $\alpha + y$  und  $\beta + n - y$ .

Nach [14], S. 60, ist der Erwartungswert der Betaverteilung

$$E(\tilde{\omega}) = \int_0^1 \omega \cdot f_{\alpha, \beta}(\omega) d\omega = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} ; \quad \text{somit folgt}$$

12.13.  $\Delta = \frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} - \bar{\omega} .$

Die konstruktive Methode besagt nun:

$$\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} > \bar{\omega} \longrightarrow a_2$$

12.14.  $\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} = \bar{\omega} \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2$

$$\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} < \bar{\omega} \longrightarrow a_1.$$

12.14. gestattet uns, analog 8.7., die im Sinne der integralen Methode optimale Annahmekennzahl  $k^*$  zu berechnen:

$$k^* = [(\beta + n) \cdot \bar{\omega} - \alpha(1 - \bar{\omega})],$$

wobei  $[x] = \text{grösste ganze Zahl } < x$ .

### Literaturverzeichnis

- [1] *H. Bühlmann*: Optimale Prämienstufensysteme, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 64. Bd., Heft 2, 1964.
- [2] *T. S. Ferguson*: Mathematical Statistics, New York 1967, S. 11–22.
- [3] *Bühlmann, Loeffel, Nievergelt*: Einführung in die Theorie und Praxis der Entscheidung bei Unsicherheit, Berlin 1967.
- [4] *H. Bühlmann*: Die beste erwartungstreue Schätzfunktion der Übersterblichkeit, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 59. Bd., Heft 1, 1959.
- [5] *P. Nolfi*: Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 59. Bd., Heft 1, 1959.
- [6] *A. Wald*: Statistical Decision Functions, New York 1950.
- [7] *G. Menges*: Bibliographie zur statistischen Entscheidungstheorie 1950–1967, Köln und Opladen 1968.
- [8] *G. Menges*: Statistik 1 Theorie, Köln und Opladen 1968, S. 288.
- [9] *G. Menges* und *H. Diehl*: Über die operationelle Eignung von Entscheidungsmodellen, Statistische Hefte, Heft 1/2, 1966, S. 33–36.
- [10] *H. Schneeweiss*: Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin 1967.
- [11] *J. von Neumann* und *O. Morgenstern*: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961, S. 176.
- [12] *R. Schlaifer*: Probability and Statistics for Business Decisions, New York 1955, S. 117 ff.

- [13] *W.Wetzel*: Statistische Tabellen, Berlin 1967, S.87 ff.
- [14] *D.Dumas de Rauly*: L'estimation statistique, Paris 1968, S.53 ff.
- [15] *W.E.Deming*: Some Theory of Sampling, New York 1966, S.475 ff.
- [16] *B.Harris*: Theory of Probability, London 1966, S.90.

## Zusammenfassung

In einem ersten Teil wird am Beispiel des Testens statistischer Hypothesen gezeigt, wie ein Problem der «klassischen» Statistik im ökonomischen Modell der Entscheidungstheorie (nach A. Wald, 1950) interpretiert und gelöst werden kann. Insbesondere werden nach dem sogenannten Bayesschen Kriterium optimale Strategien auf zwei verschiedenen, aber äquivalenten Wegen hergeleitet. Eine explizite Darstellung der sogenannten Annahmekennzahl in Funktion der relevanten ökonomischen und umweltsbedingten Parameter beschließt dieses Kapitel.

Der zweite Teil ist der Planung bei Unsicherheit, beschränkt auf das 2-Aktionen-Problem, gewidmet. Unter der Annahme eines linearen Verlaufs der sogenannten entgangenen Gewinne und einer *A-priori*-Betaverteilung über dem Zustandsraum wird eine optimale Strategie konstruiert.

## Summary

A central problem in the field of «classical» statistics (testing hypotheses) is presented and solved in the economic model of the mathematical decision theory in the sense of A. Wald. Particularly, optimal strategies are developed by two different but equivalent methods, based on the criterion of Bayes. It follows an explicit presentation of the acceptance number depending on the relevant economic and external parameters.

Secondly, the problem of design under uncertainty, limited to the case of two actions, is treated. Under the assumptions of a linear opportunity loss and an *a priori* Beta-distribution over the state space, an optimal strategy is constructed.

## Résumé

Dans une première partie, un problème de la statistique «classique» (illustré à l'exemple du test) est présenté à l'aide du modèle de la théorie mathématique des décisions. Particulièrement on développe par deux méthodes différentes, mais équivalentes des stratégies optimales d'après le critère dit de Bayes. Suit une présentation du nombre d'acceptation (acceptance number) en fonction des paramètres économiques et ambientales.

La deuxième partie s'occupe du problème de la planification en cas d'incertitude, se limitant au cas de deux actions. Supposant une fonction linéaire des profits en perte (opportunity losses) et une distribution *a priori* de bêta sur l'espace des états, une stratégie optimale est construite.

