

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	69 (1969)
Artikel:	Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess
Autor:	Gerber, H.U.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-551240

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess

Von H. U. Gerber, Zürich

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	
1.1.	Das Modell	186
1.2.	Bewertung, Überblick über die Resultate	188
1.3.	Anerkennung	189
2.	Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit mit den Methoden der Fluktuationstheorie für Zufallswege	189
2.1.	Zwei Hilfssätze über die Verteilungsfunktion der Leiterhöhen	190
2.2.	Abschätzung des Maximums eines Zufallsweges	192
2.3.	Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit	195
3.	Ein-Personen-Spiel ökonomischen Überlebens mit diskreter Zeitrechnung	
3.1.	Das Modell	198
3.2.	Der Existenzsatz	200
3.3.	Abschätzung von optimalen Band-Strategien	202
3.4.	Der Fall von Einheitsgewinn	203
4.	Ein-Personen-Spiel ökonomischen Überlebens mit kontinuierlicher Zeitrechnung	204
4.1.	Monotonie und Stetigkeit von $V(u)$	204
4.2.	Band-Strategien	205
4.3.	Diskretisation der Schadenverteilungsfunktion	209
4.4.	Diskretisation der Zeit	210
4.5.	Der Existenzsatz	213
4.6.	Diskussion der optimalen Band-Strategien	214
4.7.	Variation der Zinsintensität	217
4.8.	Zusammenhang mit dem Blackwell'schen Modell	221
4.9.	Erwartete Lebensdauer	222
5.	Exponentielle Schadenhöhenverteilung	223
5.1.	Die Differentialgleichung der Band-Strategien	223
5.2.	Existenz und Berechnung der optimalen Barrieren-Strategie	224
5.3.	Erwartete Lebensdauer	225
5.4.	Numerisches Beispiel	226

Einleitung

1.1. Das Modell

Eine Versicherungsgesellschaft startet mit einem Anfangskapital u_0 . Die Einnahmen, welche dieses Kapital vergrössern, sind deterministischer Natur: Bis zum allfälligen Ruin der Gesellschaft werden nämlich

$$c \text{ Geldeinheiten pro Zeiteinheit an Prämien} \quad (1)$$

eingenommen. Demgegenüber stehen die Ausgaben der Gesellschaft, welche stochastischer Natur sind. Die Ausgaben ihrerseits zerfallen in die *Schadenzahlungen* und in die *Dividendenzahlungen*.

Wie in der klassischen kollektiven Risikotheorie üblich, soll der Totalschaden einem zusammengesetzten Poisson-Prozess unterworfen sein. Wir bezeichnen mit $X(t)$ den bis und mit zum Zeitpunkt t total zu begleichenden Schaden. Dann ist

$$P[X(t) \leqq x] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} F^{*k}(x), \quad t \geqq 0. \quad (2)$$

Bekanntlich ist dabei $F(x)$ die Verteilungsfunktion der einzelnen Schäden, welche unabhängig und gleichverteilt sind. Ferner ist die Zwischenschadenzeit poissonverteilt mit Parameter α .

Der durch (2) beschriebene Poisson-Prozess kann aufgefasst werden als Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathfrak{A}, P). \quad (3)$$

Dabei bedeute Ω die Menge aller rechtsseitig stetigen Treppenstichprobenfunktionen $X(t) = \omega$. \mathfrak{A} sei die Einschränkung des bezüglich (2) vervollständigten Produktes $\bigotimes_{t \geqq 0} \mathfrak{B}_t$ ($\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B} = \sigma$ -Algebra der Borel-Mengen der reellen Achse) auf Ω . P ist das Wahrscheinlichkeitsmass, welches durch (2) auf \mathfrak{A} induziert wird.

Nun kann unsere Versicherungsgesellschaft nach bestimmten Gesichtspunkten Dividenden ausschütten. Eine *Dividendenstrategie* S ist eine Abbildung, die jeder Stichprobenfunktion $X(t) \in \Omega$ eine reellwertige Funktion $SX(t) = Y(t)$ zuordnet und dabei die folgenden Postulate erfüllt:

- (i) $Y(t)$ ist nichtabnehmend.
- (ii) $Y(t)$ ist linksseitig stetig, $Y(0) = 0$.
- (iii) Wenn $X_1(s) = X_2(s)$ für alle $s < t$, so ist $Y_1(t) = Y_2(t)$.
- (iv) $Y(t)$ ist für festes t eine Zufallsvariable bezüglich (3).
- (v) Wenn $X(T) + Y(T) > u_0 + cT$, so ist $Y(t) = Y(T)$ für alle $t \geq T$.
- (vi) Wenn $Y(t)$ im Punkte t unstetig ist, so ist $Y(t+0) - Y(t) \leq u_0 + ct - X(t) - Y(t)$ ¹⁾.

$Y(t)$ bedeutet anschaulich die Dividende, die bis zum Zeitpunkt t (wegen (ii): t exklusive) gesamthaft ausgeschüttet wird. Mit (iii) wird gefordert, dass die ungewisse Zukunft auf die augenblickliche Dividendenzahlung keinen Einfluss hat. Wir verlangen (iv), damit etwa der Erwartungswert der totalen Dividendenzahlungen bis zu einem Zeitpunkt t gebildet werden kann.

Das *Kapital* $u(t)$ der Gesellschaft zur Zeit t berechnet sich als

$$u(t) = u_0 + ct - X(t) - Y(t), \quad (4)$$

und zwar ist dies das Kapital *vor* einer allfälligen Dividendenausschüttung

$$Y(t+0) - Y(t) \leq u(t), \quad \text{vgl. (vi)}, \quad (5)$$

zu diesem Zeitpunkt. Die Gesellschaft ist ruiniert, sobald dieses Kapital negativ wird. Der Zeitpunkt τ des möglicherweise eintretenden Ruins ist

$$\tau = \text{Min} \{T, u(T) < 0\}.$$

Falls $u(t) \geq 0$ ist für alle t , so setzt man $\tau = \infty$. Auf Grund von (iv) und (vi) überlegt man sich leicht, dass das Ereignis $\{\tau \leq t\}$ für jedes t ein Element von \mathfrak{A} ist. In der Sprache von Loève [8] spielt τ die Rolle einer “stopping time”.

Mit dem eventuellen Eintritt des Ruins ist die Tätigkeit der Gesellschaft beendet. (v) heisst in diesem Sinne, dass die Gesellschaft nach ihrem allfälligen Ruin keine Dividenden mehr auszahlen kann. Wir interessieren uns im folgenden nur für Werte $t \leq \tau$.

¹⁾ Ausserdem postulieren wir, dass aus $u(t+0) = 0$ folgt, dass $Y(t+h) - Y(t+0) \leq ch$ für alle $h > 0$ ist. Ruin kann also nur an einer Schadenzzeit eintreten.

1.2. Bewertung, Überblick über die Resultate

Die Freiheit der Gesellschaft liegt also in der Wahl einer Dividenstrategie S . Wie von Neumann/Morgenstern [10] unter plausiblen Annahmen gezeigt haben, wird sie mit der Wahl von S versuchen, den Erwartungswert einer *Nutzenfunktion* $n(\omega)$ möglichst gross zu machen. Setzt man

$$n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau = \infty \\ 0 & \text{falls } \tau < \infty, \end{cases} \quad (7)$$

so will die Gesellschaft einfach die Überlebenswahrscheinlichkeit maximieren. Die optimale Strategie besteht trivialerweise darin, dass man *keine Dividenden* ausschüttet. Wir befinden uns damit im Modell der klassischen kollektiven Risikotheorie. Das verbleibende klassische Problem besteht in der Berechnung beziehungsweise Abschätzung dieser Überlebenswahrscheinlichkeit.

In Kapitel 2 wird eine Abschätzung hergeleitet, welche gültig ist für ein Portefeuille, das sowohl positive wie auch negative Schäden in sich birgt. (Unter einem negativen «Schaden» stelle man sich etwa das Freiwerden der Prämienreserve einer Rentenversicherung zufolge Tod des Versicherten vor.) Wir stützen uns dabei auf das Buch von Feller [5], wo die Diskussion der Ruinwahrscheinlichkeit zurückgeführt wird auf die Diskussion eines Zufallsweges.

In allen weiteren Kapiteln stellen wir uns auf einen anderen Standpunkt. Nach einer Idee, die ursprünglich auf Bruno de Finetti [6] zurückgeht, ziehen wir als Nutzenfunktion die totalen Dividendausschüttungen heran. Es ist dabei recht realistisch (und mathematisch überhaupt erst interessant), die *Barwerte* der Dividendenzahlungen aufzusummieren. Wir rechnen mit einer festen *Zinsintensität* β und setzen demnach

$$n(\omega) = \int_0^\infty e^{-\beta t} dY(t) = \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t). \quad (8)$$

Wir definieren den *Wert* einer Strategie S bei Anfangskapital u_0 als

$$V(u_0, S) = E[n(\omega)] = \int_{\Omega} \left[\int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) \right] dP(\omega) \quad . \quad (9)$$

und setzen

$$V(u_0) = \sup_S V(u_0, S). \quad (10)$$

Eine Strategie S heisst *optimal*, falls für alle u_0 gilt

$$V(u_0, S) = V(u_0). \quad (11)$$

In Kapitel 4 zeigen wir die Existenz einer optimalen Strategie. Und zwar gibt es stets eine optimale *Band-Strategie*. Im Falle der exponentiellen Schadenhöhenverteilung zeigen wir sogar die Existenz einer optimalen *Barrieren-Strategie* (Kapitel 5). Diese beiden Begriffe entstammen der Terminologie von Morill [9], werden aber für unser Modell in Kapitel 4 neu festgelegt. Noch ein paar Worte zur Methodik: Durch eine Diskretisation des Zeitparameters einerseits und der Schadenhöhenverteilungsfunktion andererseits machen wir uns den Existenzsatz des diskreten Modelles zugänglich. Dieser wird in Kapitel 3 hergeleitet und scheint – nach einer Bemerkung von Morill ([9], Seite 68) – von selbständiger Interesse zu sein.

1.3. Anerkennung

Ganz herzlich möchte ich meinem Lehrer, Herrn Professor Bühlmann, danken, dessen stetes Interesse mir ein wirksamer Stimulus war und der mir durch seine Antrittsvorlesung [3] und in persönlichen Gesprächen die Idee zur vorliegenden Arbeit gab. Dank gebührt aber auch Herrn Professor P. Huber, der mich insbesondere vor einem schwerwiegenden Irrtum bewahrt hat.

2. Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit mit den Methoden der Fluktuationstheorie für Zufallswege

Dieses Kapitel knüpft ideenmäßig an die Kapitel XI und XII des Buches von Feller [5] an. Der Leser mag darum verstehen, dass wir hier die Terminologie dieses Buches – eine in der Versicherungsmathematik weniger übliche – übernehmen.

Die Abschnitte 2.1. und 2.2. gehören in die allgemeine Theorie der Zufallswege. Abschnitt 2.3. bringt als Anwendung die versprochene Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit. Eine Zusammenfassung des ganzen Kapitels ist in [7] zu finden.

2.1. Zwei Hilfssätze über die Verteilungsfunktion der Leiterhöhen

Durch eine reelle Zufallsvariable X bzw. durch ihre Verteilungsfunktion $F(x) = P[X \leq x]$ wird auf bekannte Art ein Zufallsweg $\{S_n\}$ erzeugt:

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ für } n \geq 1, \quad (1)$$

wobei die X_i unabhängig und gleichverteilt sind. Die dazugehörige Verteilungsfunktion der Leiterhöhen im strikten Sinne bezeichnen wir mit $H(x)$. Die Ungleichung $H(\infty) < 1$ ist also gleichbedeutend damit, dass der Erneuerungsprozess der Rekordpunkte abbrechend ist.

Hilfssatz 1

Vor: $F_1(x), F_2(x)$ seien zwei Verteilungsfunktionen mit

- a) $H_1(\infty) < 1, H_2(\infty) < 1$
- b) $F_1(x) \leq F_2(x)$ für $x < 0, F_1(x) = F_2(x)$ für $x \geq 0$.

Beh: Für jede nichtabnehmende Funktion $f(x) \geq 0$ ist

$$\frac{\int_0^\infty f(x) dH_1(x)}{1 - H_1(\infty)} \geq \frac{\int_0^\infty f(x) dH_2(x)}{1 - H_2(\infty)}.$$

Wir geben zunächst den Beweis für den Fall, wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ stetig sind für negative Werte von x . Auf die Modifikationen, die man im allgemeinen Fall anbringen muss, kommen wir am Schluss zu sprechen.

Wir definieren vorerst eine Abbildung $\varphi: R \rightarrow R$ als

$$\varphi(x) = \begin{cases} \min \{y, F_1(y) = F_2(x)\} & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Wegen Voraussetzung b) des Hilfssatzes ist

$$\varphi(x) \geq x \text{ für } x < 0, \quad \varphi(x) = x \text{ für } x \geq 0. \quad (3)$$

Bezüglich des F_2 -Masses ist φ eineindeutig: Falls zwei Zahlen x, \hat{x} dasselbe Bild haben, d.h. falls $\varphi(x) = \varphi(\hat{x})$ ist, so folgt daraus nämlich $F_2(x) = F_2(\hat{x})$. Außerdem erhält die Abbildung φ die Wahrscheinlichkeitsmassen:

$$F_1(\varphi(x)) = F_2(x), -\infty < x < +\infty. \quad (4)$$

Auf natürliche Art wird durch φ eine Abbildung Φ des Stichprobenraumes der Zufallswege $\{S_n^{(2)}\}$ in den Stichprobenraum der Zufallswege $\{S_n^{(1)}\}$ induziert:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \dots). \quad (5)$$

Bezüglich des Masses des 2. Stichprobenraumes ist Φ eineindeutig. Wegen (4) erhält auch Φ die Wahrscheinlichkeitsmassen der Stichprobenräume.

Wir betrachten jetzt eine feste Stichprobenfunktion $\{S_n^{(2)}\}$ und ihr Bild $\{S_n^{(1)}\} = \{\Phi(S_n^{(2)})\}$. Aus (3) folgt: Jedem Rekordpunkt von $\{S_n^{(2)}\}$ entspricht mindestens ein Rekordpunkt von $\{S_n^{(1)}\}$, und der letzte dieser (evtl. mehreren) Rekordpunkte hat eine Leiterhöhe, welche grösser oder gleich der Höhe des Rekordpunktes von $\{S_n^{(2)}\}$ ist. Bezeichnen wir mit $r(x)$ die erwartete totale Anzahl von Leiterhöhen grösser als x , so ist demnach

$$r_1(x) \geqq r_2(x), 0 \leqq x < \infty. \quad (6)$$

Da $r_i(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$), folgt aus (6), dass

$$\int_0^\infty f(x) [-dr_1(x)] \geqq \int_0^\infty f(x) [-dr_2(x)] \quad (7)$$

ist für jede nichtabnehmende Funktion $f(x) \geqq 0$.

Zwischen $r(x)$ und $H(x)$ besteht ein einfacher Zusammenhang:

$$H(x) = \frac{r(0) - r(x)}{r(0)} H(\infty). \quad (8)$$

Zum anderen gilt

$$r(0) = \frac{1}{1 - H(\infty)}, \quad (9)$$

denn so gross ist die erwartete Anzahl Rekordpunkte überhaupt. Also haben wir

$$dH(x) = -dr(x) H(\infty) [1 - H(\infty)]. \quad (10)$$

Aus (6) und (9) folgt

$$H_1(\infty) \geqq H_2(\infty). \quad (11)$$

Aus (7), (10) und (11) ergibt sich jetzt die Behauptung des Hilfsatzes.

Wenn $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nicht stetig sind für negative Werte von x , so bereitet die Konstruktion einer geeigneten Abbildung φ hebbare Schwierigkeiten: Man hilft sich, indem man die reelle Achse R in einen grösseren Merkmalraum \bar{R} einbettet. Man setzt etwa für $i = 1, 2$

$$\bar{R}_i = \{(x, y) / -\infty < x < +\infty, 0 \leqq y \leqq F(x) - F(x-0)\} \quad (12)$$

und führt auf \bar{R}_i die folgende Ordnungsrelation ein: Ein Element (x, y) heisst kleiner als ein Element (\hat{x}, \hat{y}) , falls $x < \hat{x}$ oder falls $x = \hat{x}$ und $y < \hat{y}$. Die Verteilung $F_i(x)$ lässt sich nun durch eine stetige Verteilung $\bar{F}_i(x, y)$ auf \bar{R}_i repräsentieren, man setze etwa

$$\bar{F}_i(x, y) = F_i(x-0) + y, \quad (x, y) \in \bar{R}_i. \quad (12')$$

Die Definition einer Abbildung $\bar{\varphi}: \bar{R}_2 \rightarrow \bar{R}_1$ und der Rest des Beweises erfolgen nun analog zu vorher.

Hilfssatz 2

$F(x)$ sei eine Verteilungsfunktion. Wir setzen

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} qF(x) & \text{für } x < 0 \\ 1 - q + qF(x) & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \quad \left(0 < q \leqq \frac{1}{1 + F(0-) - F(0)} \right).$$

Dann ist die zu $\hat{F}(x)$ gehörige Verteilungsfunktion $\hat{H}(x)$ der Leiterhöhen gleich $H(x)$.

Dieser Hilfssatz ist trivial. Dadurch, dass man $F(x)$ mit der Verteilungsfunktion, welche die ganze Masse 1 in den Nullpunkt wirft, mischt, ändert man natürlich nichts an der Verteilung der Leiterhöhen (im strikten Sinne!).

2.2. Abschätzung des Maximums eines Zufallsweges

Gegeben sei eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit negativem Erwartungswert. Für den Zufallsweg $\{S_n\}$ folgt daraus, dass der Erneuerungsprozess der Rekordpunkte abbrechend ist. Mit Wahrscheinlichkeit 1 wird ein endliches Maximum

$$M = \max (0, S_1, S_2, S_3, \dots) \quad (13)$$

angenommen. Nach Feller ([5], Seite 363) gilt die asymptotische Beziehung

$$P[M \geq x] \sim C e^{-\kappa x} \text{ für } x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Dabei bestimmt sich κ aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{\kappa x} dH(y) = 1, \quad (15)$$

welche gemäss [5] (Seite 388) gleichbedeutend ist mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\kappa y} dF(y) = 1. \quad (16)$$

Von der Verteilungsfunktion $F(x)$ setzen wir also zusätzlich voraus, dass die Gleichungen (15) bzw. (16) eine – und damit genau eine – positive Lösung κ besitzen. Schliesslich wird noch angenommen, dass μ^* in (17) endlich ist.

Dank (16) lässt sich κ mit beliebiger Genauigkeit aus $F(x)$ berechnen. Die Konstante C lässt sich dagegen nicht direkt aus $F(x)$ berechnen:

$$C = \frac{1 - H(\infty)}{\kappa \mu^*}, \text{ wobei } \mu^* = \int_0^\infty e^{\kappa y} y dH(y). \quad (17)$$

Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich aber C anhand von $F(x)$ abschätzen:

Satz

$$a) \text{ Vor: } F(x) \leq A e^{\alpha x} \text{ für } x < 0. \quad (18)$$

$$\text{Beh: } C \leq \frac{A - a \int_0^\infty [1 - F(s)] ds}{\kappa \int_0^\infty e^{\kappa y} y dF(y) + \kappa a \int_0^\infty e^{\kappa y} y [1 - F(y)] dy}.$$

$$b) \text{ Vor: } F(x) \geq A' e^{\alpha' x} \text{ für } x < 0. \quad (18')$$

$$\text{Beh: } C \geq \frac{A' - a' \int_0^\infty [1 - F(s)] ds}{\kappa \int_0^\infty e^{\kappa y} y dF(y) + \kappa a' \int_0^\infty e^{\kappa y} y [1 - F(y)] dy}.$$

Wir beweisen zunächst den Teil a). Zu diesem Zweck definieren wir eine Verteilungsfunktion

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} qF(x) & \text{für } x < 0 \\ 1 - q + qF(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad q = \frac{1}{1 - [F(0) - A]}. \quad (19)$$

Nach dem Hilfssatz 2 von 2.1. ist $\hat{H}(x) = H(x)$. Nun definieren wir

$$F_2(x) = \begin{cases} qA e^{ax} & \text{für } x < 0 \\ 1 - q + qF(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Da der Mittelwert von $F(x)$ negativ ist, ist auch derjenige von $\hat{F}(x)$ und $F_2(x)$ negativ. Indem wir auf $\hat{F}(x)$ und $F_2(x)$ den Hilfssatz 1 für $f(y) = e^{\alpha y}$ y anwenden, erhalten wir aus (17) die Abschätzung

$$C \leq \frac{1 - H_2(\infty)}{\alpha \int_0^\infty e^{\alpha y} y dH_2(y)}. \quad (21)$$

Die rechte Seite lässt sich explizit berechnen, da sich $H_2(x)$ berechnen lässt, siehe [5] Seite 387. Allerdings muss $\varrho(-x)$ durch $H_2(\infty) - H_2(x)$ und $F(-x)$ durch $1 - F_2(x)$ ersetzt werden:

$$H_2(\infty) - H_2(x) = 1 - F_2(x) + a \int_x^\infty [1 - F_2(s)] ds. \quad (22)$$

Daraus erhält man

$$dH_2(y) = q dF(y) + q a [1 - F(y)] dy \quad (23)$$

$$\text{und} \quad 1 - H_2(\infty) = qA - qa \int_0^\infty [1 - F(s)] ds. \quad (24)$$

Indem man (23) und (24) in (21) einsetzt, erhält man die gesuchte Abschätzung.

Beim Beweis von b) definieren wir zuerst eine Verteilungsfunktion

$$F_1(x) = \begin{cases} A' e^{a' x} & \text{für } x < 0 \\ F(x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Wir diskutieren den Mittelwert μ_1 von $F_1(x)$. Es ist

$$\mu_1 = \int_0^\infty [1 - F(s)] ds - \frac{A'}{a'}. \quad (26)$$

Wenn $\mu_1 \geqq 0$ ist, dann ist die behauptete Ungleichung trivialerweise erfüllt. Man wird sich dann mit der in diesem Falle besseren Ungleichung $C \geqq 0$ zufriedengeben müssen. Ist dagegen $\mu_1 < 0$, so ist $H_1(\infty) < 1$, und wir können den Hilfssatz 1 anwenden. Man erhält

$$C \geqq \frac{1 - H_1(\infty)}{\alpha \int_0^\infty e^{\alpha y} y dH_1(y)}. \quad (21')$$

$H_1(x)$ lässt sich analog zu oben explizit berechnen. Einsetzen in (21') ergibt die behauptete Ungleichung.

2.3. Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit

Wir kehren zurück zu dem im 1. Kapitel beschriebenen Modell, versehen mit der klassischen Strategie $S = 0$. Die Verteilungsfunktion des Einzelschadens bezeichnen wir hier mit $P(x), -\infty < x < +\infty$, um Begriffskollisionen zu vermeiden. $P(x)$ sei an der Stelle $x = 0$ stetig, was ja durch Übergang auf einen äquivalenten Risikoprozess immer erreicht werden kann. Erwartungsgemäß soll die Versicherungsgesellschaft mit Gewinn arbeiten, d.h. es soll

$$c > \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} y dP(y) \quad (27)$$

sein.

Nach einer Idee von Feller ([5], Seite 198) betrachten wir den Zufallsweg $\{S_n\}$, der von der Verteilungsfunktion $F(x)$ erzeugt wird, wobei

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{\alpha}{c} \int_x^\infty e^{\frac{\alpha}{c}(x-y)} dP(y). \quad (28)$$

Dank (27) ist der Mittelwert von $F(x)$ negativ, somit nimmt der Zufallsweg $\{S_n\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 ein endliches Maximum M an. Zwischen diesem und der Ruinwahrscheinlichkeit $1 - R(u), u = u_0$ = Anfangskapital der Gesellschaft, besteht die einfache Beziehung

$$1 - R(u) = P[M \geqq u]. \quad (29)$$

Aus (14) und (29) folgt das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit für grosses Anfangskapital:

$$1 - R(u) \sim C e^{-\kappa u} \text{ für } u \rightarrow \infty. \quad (30)$$

κ berechnet sich nach Formel (16). Wenn wir (28) in (16) einsetzen und die Integrationsreihenfolge umkehren, so erhalten wir für κ schliesslich die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\kappa y} dP(y) = 1 + \kappa \frac{c}{\alpha}, \quad (31)$$

welche der Formel (25) von [4] entspricht und beispielsweise als Formel (33) bei [1] anzutreffen ist. Die numerische Berechnung von κ bereitet also keine Schwierigkeiten.

Der Satz von 2.2 erlaubt nun eine Abschätzung der Konstanten C . Schreibt man (28) als

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{\alpha}{c} e^{\frac{\alpha}{c}x} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{c}y} dP(y), \quad (32)$$

so erkennt man, dass die Voraussetzungen (18) und (18') dieses Satzes erfüllt sind für

$$a = \frac{\alpha}{c}, \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{c}y} dP(y) \quad (33)$$

$$a' = \frac{\alpha}{c}, \quad A' = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{c}y} dP(y). \quad (33')$$

Einsetzen ergibt nach einiger Rechnung das gewünschte Resultat:

Satz

$$C \leqq \frac{1 - P(0) - \frac{\alpha}{c} \int_0^{\infty} y dP(y) + \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\alpha}{c}y} dP(y)}{\kappa \frac{\alpha}{c} \int_0^{\infty} e^{\kappa y} y [1 - P(y)] dy}. \quad (34)$$

$$C \geqq \frac{1 - P(0) - \frac{\alpha}{c} \int_0^{\infty} y dP(y)}{\kappa \frac{\alpha}{c} \int_0^{\infty} e^{\kappa y} y [1 - P(y)] dy}. \quad (34')$$

Bemerkungen:

1. Im Falle, wo $P(x)$ auf der positiven Achse konzentriert ist, ergibt sich für C der exakte Wert, wie er bei [5] als (7.6) und bei [4] als (57) zu finden ist.
2. Eine exakte Formel für C ist zwar bekannt (siehe etwa (55) bei [4]). Diese eignet sich für eine numerische Adhoc-Auswertung aber nicht, im Gegensatz zur obigen Abschätzung.
3. Die Lösbarkeit der Gleichung (31) sowie die Endlichkeit des Nenners von (34) und (34') wurden als weitere Bedingungen an $P(x)$ stillschweigend vorausgesetzt.

Betrachten wir zur Illustration der Abschätzungen (34) und (34') das Beispiel der zweiseitigen Exponentialverteilung: $P'(x) = p(x)$ mit

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\nu\mu}{\nu + \mu} e^{\nu x} & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{\nu\mu}{\nu + \mu} e^{-\mu x} & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Die Bestimmungsgleichung (31) lautet hier

$$\left(1 + \kappa \frac{c}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\kappa}{\nu}\right) \left(1 - \frac{\kappa}{\mu}\right) = 1, \quad (36)$$

welche unter der Bedingung

$$\frac{c}{\alpha} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \quad (37)$$

eine positive Lösung κ besitzt. (Man erkennt dies durch Diskussion von (36) für nahe bei 0 gelegene κ und für $\kappa \rightarrow \infty$.) Diese Bedingung (37) entspricht gerade (27), ist also erfüllt.

Nach etwas Rechnen ergibt sich aus (34) und (34') die Abschätzung

$$\frac{(\mu - \kappa)^2 \left(\mu - \frac{\alpha}{c} \right)}{\kappa \mu \frac{\alpha}{c}} \leq C \leq \frac{(\mu - \kappa)^2 \left(\mu - \frac{\alpha}{c} \right)}{\kappa \mu \frac{\alpha}{c}} + \frac{\mu (\alpha - \kappa)^2}{\kappa \frac{\alpha}{c} \left(\nu - \frac{\alpha}{c} \right)}. \quad (38)$$

Betrachten wir dazu ein Zahlenbeispiel. Sei $c = 9$, $\alpha = 11$, $\nu = 10$, $\mu = 2$. Aus (36) folgt $\kappa = 1$. (38) ergibt $0.32 \leq C \leq 0.51$. Durch minimen Rechenaufwand hat sich also die triviale Abschätzung $0 \leq C \leq 1$ verbessern lassen.

3. Ein-Personen-Spiel ökonomischen Überlebens mit diskreter Zeitrechnung

3.1. Das Modell

Wir betrachten hier ein Modell, das im wesentlichen demjenigen von Morill [9] entspricht. In diesem Modell interessiert man sich von vornherein nur für eine Folge von äquidistanten Zeitpunkten, sagen wir $t = 1, 2, 3, \dots$. Zum Zeitpunkt t wird der Gewinn X_t , der aus der vorhergehenden Periode $(t-1, t]$ resultiert, ermittelt. («Gewinn» ist dabei im allgemeinen Sinne zu verstehen: Ein negativer «Gewinn» in diesem Sinne ist ein Verlust im üblichen Sprachgebrauch.) Der Gewinn in den einzelnen Perioden sei unabhängig und gleichverteilt:

$$P[X_t = j] = g_j, \quad \text{wobei } \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j = 1, \quad g_j \geq 0. \quad (1)$$

Wir wollen dabei sofort voraussetzen, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} j g_j = M < \infty \quad (2)$$

ist. Diese Bedingung ist beispielsweise in allen Fällen erfüllt, wo der grösstmögliche Gewinn nach oben beschränkt ist.

Die Gesellschaft startet zur Zeit $t = 0$ mit einem ganzzahligen, nichtnegativen Anfangskapital u_0 . Das Kapital wird zur Zeit t vergrössert durch den Gewinn X_t und anschliessend vermindert um die Dividende Z_t . Das Kapital zur Zeit t vor der Dividendenausschüttung beträgt demnach

$$u_t = u_0 - Z_0 + X_1 - Z_1 + X_2 - Z_2 + \dots + X_t. \quad (3)$$

Wenn zum erstenmal $u_\tau < 0$ ist, ist die Gesellschaft ruiniert. Bis zu diesem Zeitpunkt τ kann die Gesellschaft ganzzahlige, nichtnegative (aber sonst willkürliche) Dividenden

$$Z_t \leqq u_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots, \tau - 1) \quad (4)$$

auszahlen. Und zwar schüttet die Gesellschaft diese Dividenden gemäss einer *Dividendenstrategie* \mathfrak{S} aus. Durch \mathfrak{S} wird in Abhängigkeit der «Vergangenheit» $(u_0, Z_0, u_1, Z_1, \dots, u_t)$ eine Verteilung über den Zahlen $0, 1, 2, \dots, u_t$ definiert. Anhand dieser Verteilung wird dann die Dividendenausschüttung zur Zeit t ausgelost.

Die zukünftigen Zahlungen sollen anhand eines Diskontierungsfaktors $v < 1$ auf die Gegenwart bezogen werden. Die Summe der diskontierten Dividenden beträgt also

$$\sum_{t=0}^{\tau-1} v^t Z_t. \quad (5)$$

Ihr Erwartungswert ist

$$\mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}) = E \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} v^t Z_t \right]. \quad (6)$$

Wir setzen ferner

$$\mathfrak{V}(u_0) = \sup_{\mathfrak{S}} \mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}) \quad (7)$$

und nennen eine Strategie \mathfrak{S} *optimal*, falls

$$\mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}) = \mathfrak{V}(u_0) \quad \text{für alle } u_0 \quad (8)$$

ist.

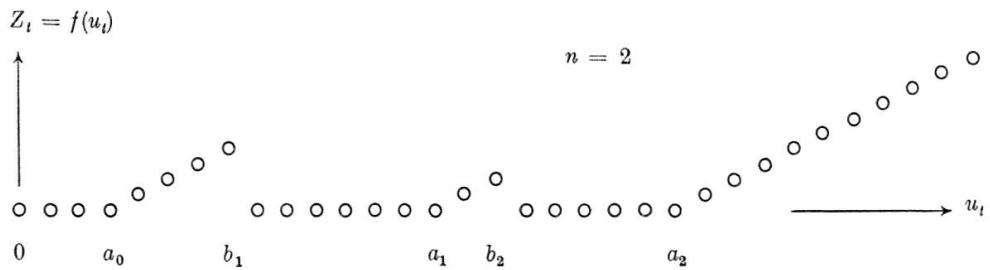
Eine *Band-Strategie* wird in diesem Modell festgelegt durch ein Tupel $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_n, a_n$ von ganzen Zahlen mit

$$0 \leqq a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n. \quad (9)$$

Bei einer Band-Strategie hängen die Dividenden Z_t ($t = 0, 1, \dots, \tau - 1$) nur vom jeweiligen Kapital u_t ab gemäss der Regel

$$\begin{aligned} Z_t = f(u_t) &= 0 && \text{für } u_t \leqq a_0 \\ &= 0 && \text{für } b_k < u_t \leqq a_k \\ &= u_t - a_k && \text{für } a_{k-1} \leqq u_t \leqq b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ &= u_t - a_n && \text{für } u_t \geqq a_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Die folgende Graphik soll die Bedeutung dieser Zahlen $a_0, b_1, a_1, \dots, b_n, a_n$ noch veranschaulichen.



3.2. Der Existenzsatz

Satz 1

In dem in 3.1. beschriebenen Modell existiert stets eine optimale Strategie.

Im Beweis stützen wir uns wesentlich auf die Arbeit [2] von Blackwell. Sein Resultat über die Existenz einer optimalen Strategie im Falle *endlicher* Aktionsräume ist jedoch nicht unmittelbar anwendbar.

Wir charakterisieren den *Zustand* zur Zeit t durch das Kapital u_t vor der Dividendenausschüttung, die *Aktion* zur Zeit t durch das Kapital $u_t - Z_t$ nach der Dividendenausschüttung. Der Aktionsraum A sowie der Zustandsraum sind also *abzählbar*. Unser Modell erweist sich als Spezialfall desjenigen von Blackwell [2]).

Wir wollen nun zeigen, dass man im wesentlichen mit endlichen Aktions- und Zustandsräumen auskommt. Es gilt die Abschätzung

$$\mathfrak{B}(u_0) \leqq u_0 + M \frac{v}{1-v} . \quad (11)$$

Denn für die zu $\{\tilde{g}_j\}$, definiert als

$$\tilde{g}_j = \begin{cases} g_j & \text{für } j = 1, 2, 3, \dots \\ \sum_{k=-\infty}^0 g_k & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j = -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (12)$$

gehörige Funktion $\tilde{\mathfrak{V}}(u_0)$ gelten die Beziehungen

$$\mathfrak{V}(u_0) \leqq \tilde{\mathfrak{V}}(u_0) = u_0 + Mv + Mv^2 + Mv^3 + \dots = u_0 + M \frac{v}{1-v}. \quad (13)$$

(Denn im zu $\{\tilde{g}_j\}$ gehörigen Spiel besteht die optimale Strategie trivialerweise darin, dass man vorhandenes Kapital stets sofort als Dividende auszahlt.)

Sei ferner $\hat{\mathfrak{S}}$ diejenige Strategie, für welche $Z_0 = u_0$, $Z_1 = u_1, \dots, Z_t = u_t, \dots (t < \tau)$ ist. Eine kleine Rechnung ergibt

$$\mathfrak{V}(u_0, \hat{\mathfrak{S}}) = u_0 + M \frac{v}{1-pv}, \quad p = \sum_{j=0}^{\infty} g_j. \quad (14)$$

Schliesslich definieren wir ζ als die kleinste natürliche Zahl, derart dass

$$u + M \frac{v}{1-pv} > v \left(u + M + M \frac{v}{1-v} \right) \text{ für } u = \zeta + 1, \zeta + 2, \dots. \quad (15)$$

Anhand von (11), (14), (15) kann man zeigen, dass es nicht sinnvoll ist, nach einer Dividendenausschüttung je ein Kapital grösser als ζ zu haben: Jede Strategie \mathfrak{S} kann ersetzt werden durch eine Strategie \mathfrak{S}^* , so dass

- (i) $\mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}) \leqq \mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}^*)$ für alle u_0 ,
- (ii) \mathfrak{S}^* nur den endlichen Aktionsraum $A^* = (0, 1, 2, \dots, \zeta)$ benötigt.

Es ist daher

$$\sup_{\mathfrak{S}} \mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}) = \sup_{\mathfrak{S}^*} \mathfrak{V}(u_0, \mathfrak{S}^*) \quad \text{für alle } u_0. \quad (16)$$

Die Zahl rechts in (16) wird aber realisiert durch eine optimale Strategie \mathfrak{S}^* , gemäss dem oben zitierten Resultat von Blackwell.

Nach Blackwell [2] gibt es demnach auch eine stationäre optimale Strategie, also eine, für welche $Z_t = f(u_t)$ ist. Diesen Sachverhalt kann man hier sofort präzisieren:

Satz 2

In dem in 3.1. beschriebenen Modell existiert stets eine optimale Band-Strategie.

Man kann nämlich immer

$$f(u) = \text{Max}\{Z/\mathfrak{B}(u) = \mathfrak{B}(u-Z)+Z\} \quad (17)$$

wählen, was einer Band-Strategie gleichkommt. (Auf Details gehen wir nicht ein, da dieser Schritt bekannt ist, siehe etwa [9].) Aus den angestellten Überlegungen folgt übrigens, dass die charakteristischen Zahlen einer optimalen Band-Strategie nicht grösser als ζ sein können.

Bemerkung:

Die Bedingung (2) darf ohne Einschränkung an Allgemeinheit vorausgesetzt werden. Ist nämlich $M = \infty$, so ist $\mathfrak{B}(u_0, \mathfrak{S}) = \infty$ für sehr viele Strategien \mathfrak{S} , beispielsweise für alle Band-Strategien.

3.3. Abschätzung von optimalen Band-Strategien

Sei $(a_0, b_1, a_1, \dots, b_n, a_n)$ eine optimale Band-Strategie. Bei Anfangskapital $u_0 = a_n$ ist $Z_0 = 0$, also ist

$$\mathfrak{B}(a_n) = v \cdot \sum_{j=-a_n}^{\infty} g_j \cdot \mathfrak{B}(a_n + j). \quad (18)$$

Wir verwenden, dass $\mathfrak{B}(a_n + j) \leq \mathfrak{B}(a_n) + j$ ist (für $j \geq 0$ gilt ja das Gleichheitszeichen), und erhalten

$$\mathfrak{B}(a_n) \leq v \cdot \mathfrak{B}(a_n) \sum_{-a_n}^{\infty} g_j + v \cdot \sum_{-a_n}^{\infty} j g_j. \quad (19)$$

Auflösen nach $\mathfrak{B}(a_n)$ ergibt

$$\mathfrak{B}(a_n) \leq \frac{v \cdot \sum_{-a_n}^{\infty} j g_j}{1 - v \sum_{-a_n}^{\infty} g_j}. \quad (20)$$

Diese Abschätzung entspricht dem Satz 7 bei [9]. Ihr kontinuierliches Analogon wird Formel (39) in 4.6.1. sein.

Aus (20) folgt insbesondere die (zwar gröbere, dafür handlichere) Abschätzung

$$\mathfrak{B}(a_n) \leqq \frac{vM}{1-v}. \quad (21)$$

Da $a_n \leqq \mathfrak{B}(a_n)$ ist, ergibt sich daraus insbesondere

$$a_n \leqq \frac{vM}{1-v}. \quad (22)$$

Diese Abschätzung ist natürlich auch ziemlich grob, wird uns aber immerhin Formel (24) in 4.4 liefern.

3.4. Der Fall von Einheitsgewinn

Als Vorbereitung auf das 4. Kapitel verweilen wir kurz bei diesem Spezialfall, wo also $g_2 = g_3 = g_4 = \dots = 0$ sein sollen. Die Funktion der Band-Strategien ist hier viel leichter zu überblicken als im allgemeinen Fall.

Wir führen die Notation

$$p = g_1, \quad q = 1 - p = \sum_{j=-\infty}^0 g_j \quad (28)$$

ein. Die Wahrscheinlichkeit, dass zum erstenmal zur Zeit t ein nicht positiver Gewinn auftritt, beträgt $p^{t-1}q$ ($t = 1, 2, 3, \dots$). Sei nun $(a_0, b_1, a_1, \dots, b_k, a_k, \dots, b_n, a_n)$ eine (der Einfachheit halber) optimale Band-Strategie. Wenn man annimmt, dass man mit einem Anfangskapital $u_0 = a_k$ startet, erhält man so die Formel

$$\mathfrak{B}(a_k) = \sum_{t=1}^{\infty} p^{t-1} q \left[v + v^2 + \dots + v^{t-1} + v^t \sum_{j=-a_k}^0 \frac{g_j}{q} \mathfrak{B}(a_k + j) \right]. \quad (24)$$

Kurze Rechnung ergibt daraus

$$\mathfrak{B}(a_k) = \frac{pv}{1-pv} + \frac{qv}{1-pv} \sum_{j=-a_k}^0 \frac{g_j}{q} \mathfrak{B}(a_k + j). \quad (25)$$

Wir werden diese Darstellung beim Beweis des Existenzsatzes in 4.5. verwenden.

Übrigens folgt im Fall von Einheitsgewinn aus $u_t \leqq a_k$ immer $u_{t'} \leqq a_k$ (für alle $t' \geqq t$). Diese Tatsache gestattet einem die rekursive Bestimmung des Wertes einer beliebigen Band-Strategie. Insbesondere lässt sich eine optimale Band-Strategie $(a_0, b_1, a_1, \dots, b_n, a_n)$ berechnen, indem man sukzessive

$$\begin{aligned}
 & a_0 \\
 & b_1 \text{ und } a_1 \\
 & \dots \\
 & b_k \text{ und } a_k \\
 & \dots \\
 & b_n \text{ und } a_n
 \end{aligned} \tag{26}$$

bestimmt.

4. Ein-Personen-Spiel ökonomischen Überlebens mit kontinuierlicher Zeitrechnung

Wir kehren zurück zu dem in 1.1. beschriebenen Modell mit kontinuierlicher Zeitrechnung. Wie angekündigt, geht es jetzt darum, das Total $V(u_0, S)$ der diskontierten Dividenden zu maximieren. Wir betrachten im Folgenden nur den Fall eigentlicher Schäden, d.h. $F(x)$ ist eine Verteilungsfunktion auf der positiven reellen Achse. Ziel dieses Kapitels ist das Aufstellen des Existenzsatzes.

4.1. Monotonie und Stetigkeit von $V(u)$

Satz

- a) Für alle $u, d > 0$ ist $V(u+d) - V(u) \geqq d$.
- b) $V(u)$ ist stetig im Anfangskapital u .

Die Monotonie ist trivial. Die Stetigkeit folgt dann aus den Ungleichungen

$$V(u - ct) \geqq e^{-(\alpha+\beta)t} V(u), \quad t > 0 \tag{1}$$

$$V(u) \geqq e^{-(\alpha+\beta)t} V(u + ct), \quad t > 0. \tag{2}$$

Dabei erklärt sich etwa die Ungleichung (2) folgendermassen: Wenn man zur Zeit $t = 0$ mit Anfangskapital u startet und während den ersten t Zeiteinheiten keine Dividende ausschüttet, so ist mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\alpha t}$ das Kapital zur Zeit t gleich $u + ct$.

4.2. Band-Strategien

4.2.1. Definition

Eine Band-Strategie $S = S_{AB}$ wird durch eine abgeschlossene und beschränkte Menge $A \subset [0, \infty)$ und durch eine offene Menge $B \subset (0, \infty)$ festgelegt, wobei gelten soll:

– A und B haben einen leeren Durchschnitt. (3)

– Der linke Randpunkt jeder Komponente von B gehört zu A . (4)

– Das Intervall $(\max_{a \in A} a, \infty)$ gehört zu B . (5)

Die Dividendenausschüttung einer solchen Band-Strategie S_{AB} zur Zeit t ($t < \tau$) hängt nun lediglich vom augenblicklichen Wert u_t des Kapitals ab, gemäss den folgenden Regeln: $Y(t)$ ist linksseitig stetig, und falls

$$u_t \in A: \quad Y(t+0) - Y(t) = 0, \quad Y'(t) = c. \quad (6)$$

Die eingehenden Prämien werden also unmittelbar als Dividenden ausgeschüttet.

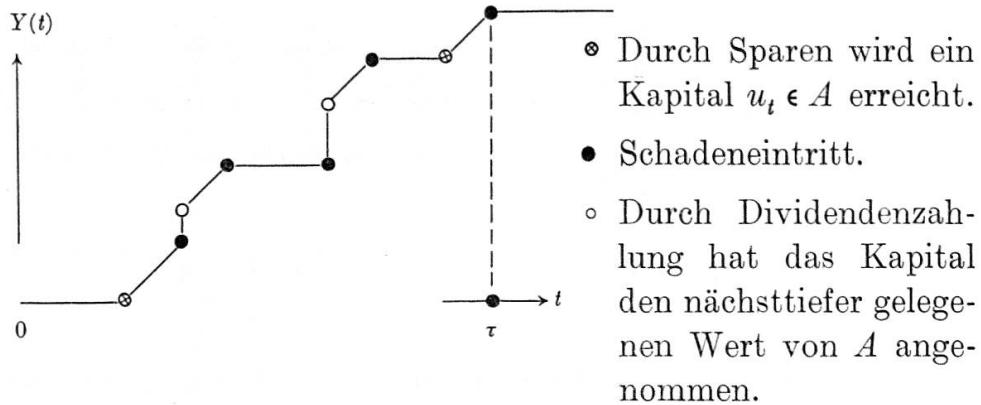
$$u_t \in B: \quad Y(t+0) - Y(t) = u_t - \max\{a/a < u_t, a \in A\}. \quad (7)$$

Es wird augenblicklich so viel Dividende ausbezahlt, dass das Kapital den nächsttiefer gelegenen Punkt von A erreicht. Anschliessend kommt es zu einer kontinuierlichen Dividendenausschüttung gemäss (6).

$$u_t \notin (A \cup B): Y(t+0) - Y(t) = 0, \quad Y'(t) = 0. \quad (8)$$

Es findet keine Dividendenzahlung statt, das Kapital wächst.

Für einen festen Schadenverlauf hat $Y(t)$ also etwa folgendes Aussehen:



Man überlegt sich, dass eine solche Band-Strategie S_{AB} eine Strategie im Sinne der Axiome von 1.1. ist. Zur Illustration und für spätere Zwecke führen wir noch zwei Klassen von sehr speziellen Band-Strategien ein.

4.2.2. Endliche Band-Strategien

Eine Band-Strategie S_{AB} heisst *endlich*, falls die Menge A aus endlich vielen Punkten $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ besteht. Die Menge B lässt sich dann durch endlich viele Punkte b_1, b_2, \dots, b_n charakterisieren, mit

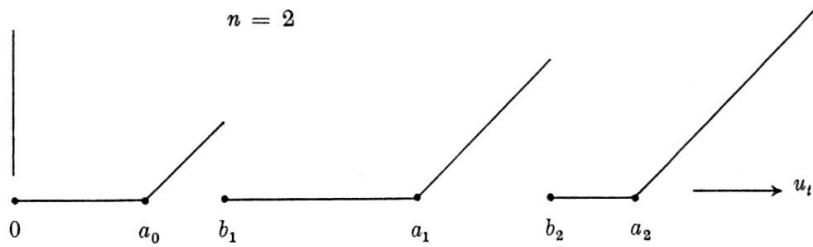
$$a_0 \leq b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq \dots \leq b_n \leq a_n. \quad (9)$$

Man setze nämlich

$$B = \bigcup_{i=1}^n (a_{i-1}, b_i) \cup (a_n, \infty). \quad (10)$$

Die Funktion der Zahlen a_0, b_1, a_1, \dots sei noch mit folgender Grafik verdeutlicht:

$Y(t+0) - Y(t)$



Der Wert $v(u) = V(u, a_0, b_1, a_1, \dots, b_n, a_n)$ lässt sich rekursiv berechnen. Falls $v(u)$ für $u \leq a_{k-1}$ bekannt ist, so ist $v(u) = v(a_{k-1}) + u - a_{k-1}$ für $a_{k-1} < u < b_k$. Für $b_k \leq u \leq a_k$ gilt dann die Integralgleichung

$$v(u) = \alpha \cdot \int_0^{(a_k-u)/c} e^{-(\alpha+\beta)t} \left\{ \int_0^{u+ct-b_k+0} v(u+ct-y) dF(y) \right\} dt \\ + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)(a_k-u)/c} \int_0^{a_k-b_k+0} v(a_k-y) dF(y) + w(u), \quad (11)$$

wobei

$$w(u) = \alpha \cdot \int_0^{(a_k-u)/c} e^{-(\alpha+\beta)t} \left\{ \int_{u+ct-b_k+0}^{u+ct+0} v(u+ct-y) dF(y) \right\} dt \\ + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)(a_k-u)/c} \int_{a_k-b_k+0}^{a_k+0} v(a_k-y) dF(y) \\ + \frac{c}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)(a_k-u)/c} \quad (12)$$

bekannt ist. Diese Integralgleichung erhält man, wenn man annimmt, dass der nächste Schaden zur Zeit t eintritt und die Höhe y besitzt. Die Fälle, wo $t < (a_k - u)/c$ ist, ergeben den ersten Summanden von (11) bzw. (12), je nach der Höhe des Schadens. In den Fällen, wo $t > (a_k - u)/c$ ist, kommt es zu einer kontinuierlichen Dividendenzahlung, sobald das Kapital den Wert a_k erreicht. Ihr Erwartungswert ist der dritte Summand von (12). Der anschliessende Schadenfall führt dann zum zweiten Summanden von (11) oder (12), je nach der Schadenhöhe.

Durch Differentiation von (11) gewinnt man die Integro-Differentialgleichung

$$v'(u) = \frac{\alpha + \beta}{c} v(u) - \frac{\alpha}{c} \int_0^{u+0} v(u-y) dF(y), \quad (13)$$

welche übrigens gültig ist für eine beliebige Band-Strategie S_{AB} , falls $u \notin (A \cup B)$.

4.2.3. Barrieren-Strategien

Eine (endliche) Band-Strategie S_{AB} heisst *Barrieren-Strategie*, falls die Menge A aus einem einzigen Punkt $a = a_0$ besteht. Die Menge B besteht dann einfach aus dem Intervall (a, ∞) . Die Dividendenausschüttung wird bei einer solchen Barrieren-Strategie offenbar so vorgenommen, dass das Kapital den Wert a möglichst rasch erreicht bzw. beibehält.

4.2.4. Optimalitätskriterium für Band-Strategien

Sei S_{AB} eine Band-Strategie. Wir definieren dazu einen Operator T_{AB} , der jeder stetigen Funktion $h(x)$, $x \geq 0$, eine Funktion $T_{AB}h(x)$, $x \geq 0$, auf die folgende Weise zuordnet:

Wir nehmen an, dass die Gesellschaft mit Anfangskapital u startet und bis zum Eintritt des ersten Schadens (Zeitpunkt t_1) Dividenden gemäss der Band-Strategie S_{AB} ausschüttet. Anschliessend wird zu diesen Dividenden noch ein (fiktiver) Betrag $h(u_{t_1})$ – diskontiert also $e^{-\beta t_1} \cdot h(u_{t_1})$ – dazugelegt. Unter $T_{AB}h(u)$ verstehen wir nun den Erwartungswert der beschriebenen Zahlungen. Falls also beispielsweise $u \in A$ ist, so ist

$$T_{AB}h(u) = \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{u+0} h(u-y) dF(y). \quad (14)$$

Wir definieren jetzt rekursiv $T_{AB}^n h(u)$ als $T_{AB}[T_{AB}^{n-1}h](u)$.
(Dies ist natürlich nur möglich, wenn $T_{AB}^{n-1}h(u)$ stetig ist.)

Offenbar lässt sich $T_{AB}^n h(u)$ interpretieren als die erwartete Summe der diskontierten Dividendenzahlungen bis zum n -ten Schaden (Zeitpunkt t_n), welche gemäss Band-Strategie S_{AB} ausgeschüttet werden, vermehrt noch um den (fiktiven) Betrag $e^{-\beta t_n} \cdot h(u_{t_n})$.

Anhand dieses Operators T_{AB} (der übrigens im wesentlichen dem Operator T_a von Blackwell [2] entspricht) lässt sich nun die Optimalität von S_{AB} leicht ermitteln:

Satz

Falls $T_{AB}V(u) = V(u)$ für alle $u \geq 0$,
so ist S_{AB} optimal.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Die diskontierten Dividendausschüttungen nach einem Zeitpunkt T sind in jedem Fall nicht grösser als

$$e^{-\beta T} \left(u + cT + \frac{c}{\beta} \right), \quad (15)$$

also kleiner als ε (bei festem u) für $T = T(\varepsilon)$. Mit Wahrscheinlichkeit grösser als $1 - \varepsilon$ finden im Intervall $[0, T]$ höchstens N Schadenfälle statt, $N = N(T, \varepsilon)$.

Aus der Voraussetzung des Satzes folgt $T_{AB}^N V(u) = V(u)$.

So erhält man wegen der erwähnten Interpretation von $T_{AB}^N V(u)$ und der eben beschriebenen Wahl von T und N die Abschätzung

$$\begin{aligned} V(u, S_{AB}) &\geq T_{AB}^N V(u) - \varepsilon - \varepsilon \cdot \left(u + \frac{c}{\beta} \right) \\ &= V(u) - \varepsilon - \varepsilon \cdot \left(u + \frac{c}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

ε ist beliebig, also ist die Band-Strategie S_{AB} optimal.

4.3. Diskretisation der Schadenverteilungsfunktion

Wir approximieren die Schadenverteilungsfunktion $F(x)$ durch eine arithmetische Verteilungsfunktion $F_m(x)$ mit Span 2^{-m} für $m = 1, 2, \dots$ auf die folgende Weise:

$$F_m(x) = F\left(\frac{k}{2^m}\right) \quad \text{für} \quad \frac{k}{2^m} \leqq x < \frac{k+1}{2^m}. \quad (17)$$

Aus $F_m(x) \leqq F(x)$ folgt $V_{F_m}(u) \leqq V_F(u)$. Im Limes gilt die Gleichheit:

Satz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_{F_m}(u) = V_F(u). \quad (18)$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\liminf_{m \rightarrow \infty} V_{F_m}(u) \geqq V_F(u)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Man wähle T und N wie in 4.2.4. Dann gilt die Abschätzung

$$V_{F_m}(u) + \varepsilon \cdot \left(1 + u + \frac{c}{\beta}\right) \geqq V_F\left(u - \frac{N}{2^m}\right). \quad (19)$$

Für $m \rightarrow \infty$ ergibt sich wegen der Stetigkeit von $V_F(u)$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} V_{F_m}(u) + \varepsilon \cdot \left(1 + u + \frac{c}{\beta}\right) \geqq V_F(u). \quad (20)$$

Damit ist der Satz bewiesen, denn ε ist beliebig.

4.4. Diskretisation der Zeit

Wir betrachten nun den zur Schadensfunktion $F_m(x)$ gehörigen Schadenprozess nur zu Zeiten

$$t_k = \frac{1}{c} \frac{k}{2^m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Für die einzelnen Perioden der Länge $\frac{1}{c} 2^{-m}$ resultiert daraus die Gewinnverteilungsfunktion $G_m(x)$ mit Span 2^{-m} , welche sich berechnet als

$$G_m(x) = \begin{cases} P(X_m \left(\frac{1}{c} 2^{-m} \right) \geqq 2^{-m} - x) & \text{für } x < 2^{-m} \\ 1 & \text{für } x \geqq 2^{-m}. \end{cases} \quad (22)$$

Dabei berechnet sich die rechte Seite von (22) gemäss der Formel (2) im 1. Kapitel für den zusammengesetzten Poisson-Prozess.

Es ist nun naheliegend, das (im 3. Kapitel beschriebene) diskrete Modell mit Gewinnverteilungsfunktion $G_m(x)$ und Diskontfaktor $v_m = \exp\left(-\frac{\beta}{c} 2^{-m}\right)$ zu betrachten, wobei als Dividendenzahlungen nur Vielfache des Spanes 2^{-m} zugelassen sind. Hier haben wir die Existenz einer optimalen Band-Strategie

$$(a_0^{(m)}, b_1^{(m)}, a_1^{(m)}, \dots, b_{n_m}^{(m)}, a_{n_m}^{(m)}) \quad (23)$$

bewiesen. Aus (22) in 3.3. ergibt sich die Abschätzung

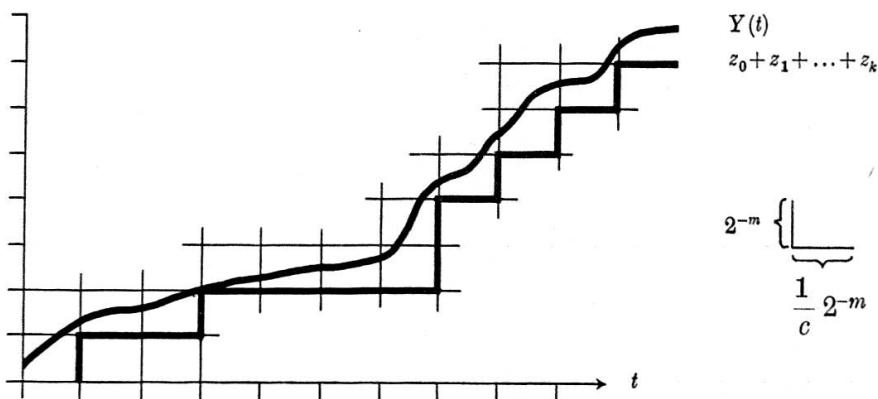
$$a_{n_m}^{(m)} \leq \frac{c}{\beta} \quad (24)$$

Daraus folgt insbesondere, dass $\mathfrak{V}_{G_m}(u) = \mathfrak{V}_{G_m}(u, a_0^{(m)}, \dots, a_{n_m}^{(m)})$ für $u > \frac{c}{\beta}$ linear ist.

Jede Strategie S im kontinuierlichen F_m -Modell induziert nun eine Strategie \mathfrak{S} im diskreten G_m -Modell auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}[Z_{t_k} = z_k/u_0, z_0, u_1, z_1, \dots, u_k] &= \\ P[0 \leqq Y(t_k+0) - (z_0 + z_1 + \dots + z_k) < 2^{-m}/u_0, 0 \leqq Y(0+) - z_0 < 2^{-m}, \\ u_0 + ct_1 - X_m(t_1) &= u_1 + z_0, 0 \leqq Y(t_1+0) - (z_0 + z_1) < 2^{-m}, \\ \dots, u_0 + ct_k - X_m(t_k) &= u_k + z_0 + z_1 + \dots + z_{k-1}] . \end{aligned} \quad (25)$$

Die intuitive Bedeutung ist dabei die folgende:



Mangels Information über das Geschehen ausserhalb der Zeitpunkte t_k entstehen dabei im allgemeinen aus den (reinen) Strategien S im kontinuierlichen Modell «gemischte» Strategien \mathfrak{S} im diskreten Modell. Man sieht jetzt leicht ein, dass für jede Strategie S und für jedes Anfangskapital von der Form $u = k \cdot 2^{-m}$ gilt:

$$C \cdot 2^{-m} + \mathfrak{V}_{G_m}(u, \mathfrak{S}) \geq V_{F_m}(u, S) \quad (26)$$

mit einer von S und m unabhängigen Konstanten C . Indem wir das Supremum über alle S bilden und anschliessend $m \rightarrow \infty$ gehen lassen, erhalten wir

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{V}_{G_m}(u) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} V_{F_m}(u). \quad (27)$$

Andererseits ordnen wir jeder Band-Strategie $\mathfrak{S} = (a_0, b_1, a_1, \dots, b_n, a_n)$ im diskreten G_m -Modell (d. h. a_i, b_i sind Vielfache von 2^{-m}) eine endliche Band-Strategie $S_{AB} = (a_0 + 2^{-m}, b_1 + 2^{-m}, a_1 + 2^{-m}, \dots, b_n + 2^{-m}, a_n + 2^{-m})$ im kontinuierlichen F_m -Modell zu. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen T und N wie in 4.2.4. Ein Vergleich der Dividendenausschüttungen bei entsprechendem Schadenverlauf ergibt für Anfangskapitalien von der Form $u = k \cdot 2^{-m}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} V_F(u + 2^{-m}, S_{AB}) + \varepsilon \cdot \left(1 + u + 2^{-m} + \frac{c}{\beta} \right) + D \cdot N \cdot 2^{-m} \\ \geq \mathfrak{V}_{G_m}(u, \mathfrak{S}) \end{aligned} \quad (28)$$

mit einer von u, m, \mathfrak{S} unabhängigen Konstanten D . Wenn wir jetzt für \mathfrak{S} die optimale Band-Strategie (23) einsetzen und $m \rightarrow \infty$ streben lassen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} V_{F_m}(u + 2^{-m}, a_0^{(m)} + 2^{-m}, b_1^{(m)} + 2^{-m}, \dots, a_n^{(m)} + 2^{-m}) \\ + \varepsilon \cdot \left(1 + u + \frac{c}{\beta} \right) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{V}_{G_m}(u). \end{aligned} \quad (29)$$

Aus (27) und (29) folgt wegen (18) schliesslich

$$V_F(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{V}_{G_m}(u, a_0^{(m)}, b_1^{(m)}, a_1^{(m)}, \dots, b_n^{(m)}, a_n^{(m)}) \quad (30)$$

für u von der Form $k \cdot 2^{-m}$. Anhand von (24) überzeugt man sich, dass die Konvergenz gleichmässig für alle solche u stattfindet.

4.5. Existenzsatz

Satz

Es existiert immer eine optimale Band-Strategie.

Wir definieren eine Band-Strategie S_{AB} und wollen dann zeigen, dass S_{AB} optimal ist. Die für S_{AB} charakteristischen Mengen A und B seien wie folgt definiert:

$$A = \text{Menge aller Häufungspunkte der Folge } \{a_k^{(m)}\}_{m=1,2,3,\dots}^k = 0,1,\dots,n_m, \quad (31)$$

wobei die Zahlen $a_k^{(m)}$ – wie nachher in (32) auch die $b_k^{(m)}$ – den optimalen Band-Strategien (23) der diskreten G_m -Modelle entnommen sind. Zur Menge B gehören das Intervall $(\max a, \infty)$ und alle $b \notin A$, für welche Folgen $\{m_j\}$ und $\{k_j\}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} \max \{a/a \in A, a < b\} &= \lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j}^{(m_j)} \\ \text{und } b &< \lim_{j \rightarrow \infty} b_{k_j+1}^{(m_j)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Man überzeugt sich leicht, dass S_{AB} eine Band-Strategie im Sinne der Definition von 4.2.1. ist. Wir wollen nun die Optimalität von S_{AB} anhand des Satzes von 4.2.4. beweisen. Wenn wir wiederum mit T_{AB} den zu S_{AB} gehörigen Operator bezeichnen, so muss also gezeigt werden, dass

$$T_{AB} V_F(u) = V_F(u) \quad (33)$$

für alle $u \geq 0$ ist. Zu diesem Zweck unterscheiden wir, ob u in A , B , oder im Komplement dieser beiden Mengen liegt.

Falls $u \in A$ ist, so ist gemäß (14) von 4.2.4.

$$T_{AB} V_F(u) = \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{u+0} V_F(u-y) dF(y). \quad (34)$$

Seien nun $\{m_j\}$ und $\{k_j\}$ Folgen, so dass $u = \lim a_{k_j}^{(m_j)}$. Da $(a_0^{(m_j)}, b_1^{(m_j)}, a_1^{(m_j)}, \dots, b_{n_{m_j}}^{(m_j)}, a_{n_{m_j}}^{(m_j)})$ eine optimale Band-Strategie für das diskrete G_{m_j} -Modell darstellt, gilt gemäß (25) von 3.4. die Gleichung

$$\mathfrak{B}_{G_{m_j}}(a_{k_j}^{(m_j)}) = \frac{pv \cdot 2^{-m_j}}{1-pv} + \frac{v}{1-pv} \int_{-a_{k_j}^{(m_j)}-0}^0 \mathfrak{B}_{G_{m_j}}(a_{k_j}^{(m_j)} + x) dG_{m_j}(x),$$

wobei $v = \exp\left(-\frac{\beta}{c} 2^{-m_j}\right)$, $p = \exp\left(-\frac{\alpha}{c} 2^{-m_j}\right)$. Man verifiziert jetzt anhand von (30) und der Definition (22) von $G_{m_j}(x)$, dass die rechte Seite von (35) für $j \rightarrow \infty$ gegen die rechte Seite von (34) strebt. Die linke Seite von (35) strebt aber gegen $V_F(u)$, also ist (33) für $u \in A$ bewiesen.

Sei nun $u \in B$. Sei a die grösste Zahl aus A , welche kleiner als u ist. Wegen dem eben Bewiesenen und wegen (30) ist

$$\begin{aligned} T_{AB} V_F(u) &= u - a + T_{AB} V_F(a) \\ &= u - a + V_F(a) = V_F(u), \end{aligned} \tag{36}$$

was wir zeigen wollten.

Sei schliesslich $u \notin (A \cup B)$. Sei a die kleinste Zahl aus A , welche grösser als u ist. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} T_{AB} V_F(u) &= e^{-(\alpha+\beta)(a-u)/c} V_F(a) \\ &+ \alpha \cdot \int_0^{(a-u)/c} e^{-(\alpha+\beta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} V_F(u+ct-y) dF(y) \right\} dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Aus Stetigkeitsgründen dürfen wir annehmen, das Anfangskapital sei von der Form $u = k \cdot 2^{-m}$. Seien $\{m_j\}$ und $\{k_j\}$ Folgen, so dass $a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j}^{(m_j)}$. Dann findet man für $\mathfrak{B}_{G_{m_j}}(u)$ einen Ausdruck, der eine ähnliche Gestalt wie die rechte Seite von (37) hat und im Limes für $j \rightarrow \infty$ gegen sie konvergiert. Damit ist also auch in diesem Fall die Gültigkeit von (33) erwiesen, womit wir die Optimalität von S_{AB} gezeigt haben.

4.6. Diskussion der optimalen Band-Strategien

4.6.1. Abschätzung der Menge A nach oben

Formel (24) liefert uns eine solche Abschätzung für die dort konstruierte optimale Band-Strategie. Wir leiten hier eine allgemeinere,

von $F(x)$ abhängige Abschätzung her, welche zudem für jede optimale Band-Strategie S_{AB} gilt. Für $a \in A$ ist

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{a+0} V(a-y) dF(y) \\ &\leq \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{a+0} [V(a)-y] dF(y) \\ &= \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} V(a) F(a) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{a+0} y dF(y). \end{aligned} \quad (38)$$

Daraus folgt

$$V(a) \leq \frac{c - \alpha \int_0^a y dF(y)}{\alpha + \beta - \alpha F(a)}. \quad (39)$$

Da $a + \frac{c}{\alpha + \beta} \leq V(a)$ ist, ergibt sich daraus eine entsprechende

Abschätzung für a . Ungleichung (39) ist offenbar dann besonders nützlich, wenn $V(a-x)$ an den Wachstumsstellen von $F(x)$ «ungefähr linear» ist. Dies ist für sehr grosse Zinsintensitäten β der Fall, asymptotisch aber auch für $\beta \rightarrow 0$, wie wir sehen werden.

4.6.2. Eine notwendige Bedingung für Punkte der Menge A

Wir definieren eine Funktion $W(u)$ als

$$W(u) = \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^{u+0} V(u-y) dF(y). \quad (40)$$

Offenbar ist $W(u)$ der Erwartungswert der Dividenden bei Anfangskapital u , wenn man bis zum Eintritt des ersten Schadens die eingehenden Prämien unmittelbar als Dividenden auszahlt und nachher eine optimale Strategie spielt.

Satz

Falls $a \in A$, $a > 0$ und $W(u)$ in einer Umgebung von a stetig differenzierbar ist, so ist $W'(a) = 1$.

Da $W(a) = V(a)$ und $W(u) \leqq V(u)$ ist, gilt für alle $u (0 \leqq u \leqq a)$

$$W(a) - W(u) \geqq V(a) - V(u) \geqq a - u. \quad (41)$$

Insbesondere folgt daraus $W'(a) \geqq 1$. Es muss aber auch $W'(a) \leqq 1$ sein: Für $T \geqq 0$ definieren wir für das Anfangskapital a die folgende Alternativ-Strategie S_T : Nach Eintritt des ersten Schadens wird eine optimale Strategie gespielt. Vorgängig wird keine Dividende ausbezahlt, bis das Kapital (eventuell) den Wert $a + T$ erreicht, wo dann die eingehenden Prämien fortlaufend als Dividenden ausbezahlt werden. Es ist also $V(a, S_0) = W(a)$, und eine kleine Rechnung ergibt

$$\frac{d}{dT} V(a, S_T) \Big|_{T=0} = W'(a) - 1. \quad (42)$$

Diese Ableitung darf nicht positiv sein, also ist $W'(a) = 1$.

Korollar

Falls $a > 0$ ein isolierter Punkt der Menge A ist und $W(u)$ in einer Umgebung von a stetig differenzierbar ist, so ist $V'(a) = 1$ und $V''(a) = 0$.

Auf B ist $V(u)$ linear. Auf dem Komplement von A und B bedient man sich der Integro-Differentialgleichung (13) und benutzt, dass $W(a) = V(a)$ und $W'(a) = 1$ ist.

4.6.3. Anwendung auf die Exponentialverteilung

Wir nehmen an, die Schadenhöhe sei exponentiell verteilt, d.h.

$$F(x) = e^{-\gamma x}, \quad f(x) = \gamma e^{-\gamma x} (\gamma > 0). \quad (43)$$

Für $a > 0$, $a \in A$ erhält man wegen $f'(x) = -\gamma \cdot f(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} W(a) &= \frac{c}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_0^a V(y) f(a-y) dy = V(a) \\ W'(a) &= \frac{\alpha \gamma}{\alpha + \beta} V(a) - \frac{\alpha \gamma}{\alpha + \beta} \int_0^a V(y) f(a-y) dy = 1. \end{aligned} \quad (44)$$

Indem wir dieses System unter Elimination des Integrales nach $V(a)$ auflösen, erhalten wir

$$V(a) = \frac{\gamma c - \alpha - \beta}{\beta \gamma}. \quad (45)$$

Wegen der Monotonie von $V(u)$ hat diese Gleichung höchstens eine positive Lösung a . Im 5. Kapitel werden wir sehen, dass es in diesem Falle eine einzige optimale Band-Strategie gibt, nämlich die zu a (evtl. $a = 0$) gehörige *Barrieren-Strategie*.

4.6.4. Eine Abschätzung der Menge A nach unten

Satz

Falls $F'(x) = f(x)$ im Intervall $[0, M]$ monoton zunimmt, so ist $(0, M) \cap A = \emptyset$.

In diesem Fall ist nämlich $W'(u)$ im Intervall $[0, M]$ monoton zunehmend. Wäre $a \in A$ ($0 < a < M$), also $W(a) = V(a)$ und $W'(a) = 1$, so gäbe es ein $d > 0$ mit $V(a) = W(a) < W(a-d) + d$. Da $W(a-d) \leq V(a-d)$ ergibt sich dann $V(a) < V(a-d) + d$, was nicht möglich ist.

4.7. Variation der Zinsintensität

Unser Modell wird durch das Quadrupel (β, α, c, F) beschrieben.

Das Paar $\left(\frac{\alpha}{c}, F\right)$ legt die *Struktur* des Portefeuilles fest, der gemeinsame Faktor von α und c seine *Grösse*. Wie man durch eine einfache Änderung der Zeitskala erkennt, ist für unsere Bewertung eine Variation des Zinsfusses gleichbedeutend mit einer Variation der Grösse (immer bei gleichbleibender Struktur). Insbesondere entspricht also der Fall mit geringer Zinsintensität den grossen Portefeuilles, der Fall mit grosser Zinsintensität den Portefeuilles mit einem kleinen Bestand. In diesem Sinne kann man im folgenden also etwa « $\beta \rightarrow 0$ » auch immer lesen

als « $\alpha, c \rightarrow \infty$ $\left(\frac{\alpha}{c} = \text{konstant}\right)$ ».

Bei festem u ist $V(u)$ monoton abnehmend und stetig in β , letzteres weil $V(u, S)$ für jede Strategie S stetig differenzierbar in β ist.

4.7.1. Der Fall grosser Zinsintensitäten

Man gewinnt einen gewissen Einblick in das Zustandekommen optimaler Band-Strategien, indem man β variieren lässt. Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Abschnitt voraussetzen, $F(x)$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes 4.6.4. Dann erkennt man anhand von (39): Für sehr grosse Zinsintensitäten besteht die optimale Strategie darin, dass man das Anfangskapital auszahlt und die eingehenden Prämien unmittelbar als Dividenden ausschüttet. Der Ruin tritt dann mit dem ersten Schadenfall ein, und es ist

$$V(u) = u + \frac{c}{\alpha + \beta} \quad (46)$$

Mit Stetigkeitsbetrachtungen überlegt man sich: Der kleinste Wert von β , für den die Darstellung (46) richtig ist, ist zugleich der grösste Wert von β , zu dem es eine optimale Band-Strategie S_{AB} gibt, so dass die Menge A einen Punkt $a > 0$ enthält. Diese Zahl β' bezeichnen wir als die *kritische Zinsintensität*. Für dieses β' und für ein solches $a \in A$ ist dann

$$V(a) = \frac{c}{\alpha + \beta'} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta'} \int_0^{a+0} V(a-y) dF(y) \quad (47)$$

wobei für $V(a)$, $V(a-y)$ die Darstellung (46) mit $\beta = \beta'$ einzusetzen ist. Wenn wir jetzt (47) nach β' auflösen, so erhalten wir

$$\beta' = \alpha \cdot \left[\frac{\varphi(a)}{2} - 1 \right] \quad (48)$$

wo

$$\varphi(a) = F(a) - \frac{\int_0^{a+0} x dF(x)}{a} + \sqrt{\left[F(a) - \frac{\int_0^{a+0} x dF(x)}{a} \right]^2 + \frac{4 c F(a)}{\alpha a}}.$$

Die kritische Zinsintensität β' kann jetzt auch beschrieben werden als das Maximum der Funktion (48). Genau jene Argumente a , für welche dieses Maximum angenommen wird, können (zusammen mit der Zahl 0) für die Menge A einer optimalen Band-Strategie S_{AB} verwendet werden. Damit gewinnt man wenigstens für die kritische Zins-

intensität β' einen Überblick über alle möglichen optimalen Band-Strategien. Insbesondere findet man so durch geschickte Wahl der Verteilungsfunktion $F(x)$ Beispiele, wo die Menge A aus endlich vielen, abzählbar unendlich vielen Punkten oder gar aus einem ganzen Intervall bestehen kann. In manchen Fällen kann man aus der Situation bei β' Schlüsse ziehen für Zinsintensitäten β , die nur wenig kleiner als β' sind.

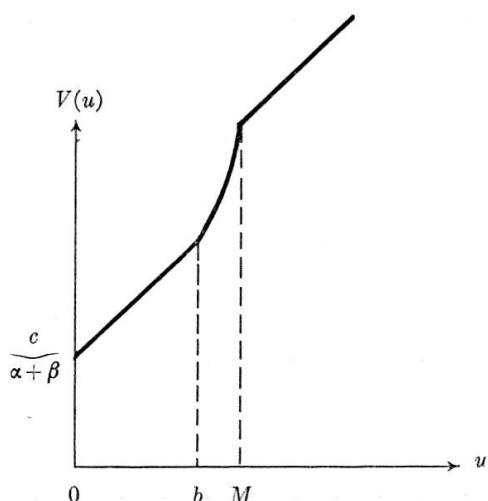
Wir betrachten als Beispiel den Fall mit einheitlichen Schäden der Höhe M . Als kritische Zinsintensität erhält man

$$\beta' = \alpha \left[\sqrt{\frac{c}{\alpha M}} - 1 \right] \quad (49)$$

wobei das Maximum in (48) durch $a = M$ erreicht wird. Für β , die nur wenig kleiner als β' sind, ergibt sich als einzige optimale Band-Strategie die endliche Band-Strategie ($a_0 = 0$, $b_1 = b$, $a_1 = M$), wobei sich b wegen der Stetigkeit von $V(u)$ an der Stelle $u = b$ bestimmt aus

$$\frac{c}{\alpha + \beta} + b = e^{-(\alpha + \beta)(M-b)/c} \cdot \frac{c}{\alpha + \beta} \left[1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right]. \quad (50)$$

Die Funktion $V(u)$ hat daher etwa folgendes Aussehen:



4.7.2. Der Fall kleiner Zinsintensität

Wie bemerkt, ist dieser Fall gleichbedeutend mit dem Fall grosser Bestände und daher für die Praxis von Interesse. Wir führen vorerst eine Strategie S_d ein, die darin besteht, dass bis zum eventuellen Ruin eine kontinuierliche Dividende der Dichte $d(0 < d < c - \alpha\mu, \mu = \int x dF(x))$ ausgeschüttet wird. Wenn $1 - R(u, d)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bei Anwendung der Strategie S_d bezeichnet, so ist offenbar

$$V(u, S_d) \geq R(u, d) \cdot \frac{d}{\beta}. \quad (51)$$

Für jedes $\beta > 0$ wählen wir ferner eine optimale Band-Strategie S_{AB} und definieren $a_0 = a_0(\beta) = \text{Min}\{a/a \in A\}$. Es gilt:

$$a_0 \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \beta \rightarrow 0. \quad (52)$$

Denn wäre a_0 beschränkt, so wäre auch $V(0) = V(0, a_0)$ beschränkt (da dann die erwartete Lebensdauer bei Anfangskapital 0 und Anwendung der Strategie S_{AB} beschränkt wäre). Dies ist aber unmöglich, weil wegen (51) $V(0, S_d) \rightarrow \infty$ für $\beta \rightarrow 0$.

Wir sind – wenigstens in qualitativer Hinsicht – sehr befriedigt von der Formel (52). Wie immer eine optimale Band-Strategie S_{AB} beschaffen sei, für Anfangskapital kleiner als a_0 ist ja nur diese Zahl a_0 relevant. *Wenn also bei festem Anfangskapital die Zinsintensität genügend klein (oder das Portefeuille genügend gross) ist, dann wird die Gesellschaft ihre Dividende so ausschütten, dass das Kapital einen gewissen (zeitlich konstanten!) Wert a_0 beibehält, beziehungsweise möglichst bald wieder erreicht.*

Wir fragen uns schliesslich nach dem asymptotischen Verhalten von $V(a_0)$ für $\beta \rightarrow 0$. Wegen (51) und der Formel (30) des 2. Kapitels ist

$$V(a_0) \geq V(a_0, S_d) \geq (1 - e^{-\alpha a_0}) \cdot \frac{d}{\beta} \quad \text{für} \quad \beta \rightarrow 0, \quad (53)$$

wobei α nur von d abhängig ist. Da (53) für beliebiges $d < c - \alpha\mu$ gilt, folgt wegen (39) sofort

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \cdot V(a_0) = c - \alpha\mu. \quad (54)$$

In der anderen Lesart heisst dies

$$\lim_{\alpha, c \rightarrow \infty} \frac{V(a_0)}{c - \alpha \mu} = \beta, \quad \frac{\alpha}{c} = \text{konst.} \quad (55)$$

Aus (39) erkennt man, dass die rechten Seiten von (54) und (55) nicht vergrössert werden können, indem man das Argument a_0 in den linken Seiten ersetzt durch andere $a \in A$.

4.8. Zusammenhang mit dem Blackwell'schen Modell

Bekanntlich lässt sich die Diskussion der Ruinwahrscheinlichkeit (siehe 2.3) zurückführen auf die Diskussion eines Zufallsweges. Diese Reduktion von kontinuierlichem Zeitparameter auf diskreten Zeitparameter gelingt nun auch hier in verblüffender Analogie. Dank dem Existenzsatz 4.5. dürfen wir uns ja auf Band-Strategien beschränken und können so den folgenden einfachen Zusammenhang mit dem Blackwell'schen Modell [2] herstellen:

Als Zustandsraum verwende man nämlich das Intervall $[0, \infty)$, versehen noch mit dem Ruinzustand \dagger . Der Diskontfaktor sei $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Eine Aktion bestehe nun in einem Paar (A, B) von Mengen, das die Postulate von 4.2.1. befriedigt. Wenn uns $P(x) = P(x, A, B, u)$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, bei Wahl der Aktion (A, B) von einem Zustand u in einen Zustand $u' \leqq x$ oder $u' = \dagger$ zu gelangen, so setze man

$$P(x) = 1 - F(u - x) \quad \text{für } u \in A, \quad (56)$$

$$P(x) = 1 - F(a - x) \quad \text{für } u \in B, \quad (57)$$

$$P(x) = 1 - e^{-(\alpha+\beta)(a-u)/c} F(a-x) \quad (58)$$

$$- (\alpha + \beta) \int_0^{(a-u)/c} e^{-(\alpha+\beta)t} F(u + ct - x) dt \quad \text{für } u \notin (A \cup B).$$

Dabei bedeutet a in (57) – wie nachher in (60) – die grösste Zahl aus A , welche kleiner als u ist. In (58) – und nachher in (61) – soll a dagegen die kleinste Zahl aus A sein, welche grösser als u ist. Der Gewinn $r(u) = r(u, A, B)$ der bei einer solchen Aktion herausspringt, sei schliesslich

$$r(u) = \frac{c}{\alpha + \beta} \quad \text{für } u \in A , \quad (59)$$

$$r(u) = u - a + \frac{c}{\alpha + \beta} \quad \text{für } u \in B , \quad (60)$$

$$r(u) = e^{-(\alpha + \beta)(a-u)/c} \frac{c}{\alpha + \beta} \quad \text{für } u \notin (A \cup B) . \quad (61)$$

Intuitiv bedeuten diese Zeiten 0, 1, 2, 3, ... im Blackwell'schen Modell die Zeitpunkte 0, t_1 , t_2 , t_3 , ... (t_i = Zeitpunkt des i -ten Schadensfallen) im kontinuierlichen Modell. Man überzeugt sich nun, dass auf natürliche Weise den Band-Strategien im kontinuierlichen Modell stationäre Strategien im beschriebenen Blackwell'schen Modell entsprechen (und umgekehrt), wobei der Wert – insbesondere also auch die Optimalität – erhalten bleibt.

4.9. Erwartete Lebensdauer

Bei Anwendung einer Band-Strategie S_{AB} beträgt die Ruinwahrscheinlichkeit offenbar 1. Die Frage stellt sich jetzt nicht mehr nach der *Überlebenswahrscheinlichkeit*, sondern nach der *erwarteten Lebensdauer*. Gemäss dem Motto «Zeit = Geld» verstehen wir die Lebenszeit mit einer zeitlichen Zinsintensität δ ($\delta > 0$) und setzen

$$D_\delta(u) = E \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} dt \right] . \quad (62)$$

Natürlich ist $D_\delta(u) = D_\delta(a)$ für $u \in B$, wobei a wie in (57) definiert ist. Für $u \notin (A \cup B)$ gilt die Integralgleichung

$$\begin{aligned} D_\delta(u) &= \alpha \int_0^{(a-u)/c} e^{-(\alpha + \delta)t} \left[\int_0^{u+ct} D_\delta(u+ct-y) dF(y) \right] dt \\ &\quad + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} e^{-(\alpha + \delta)(a-u)/c} \cdot \int_0^{a+0} D_\delta(a-y) dF(y) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha + \delta} , \end{aligned} \quad (63)$$

wobei a wie in (58) erklärt ist.

Bezeichnen wir mit $L(t; u)$ die Verteilungsfunktion des Ruinzeitpunktes τ , dann ist offenbar

$$D_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [1 - L(t; u)] dt = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} dL(t; u) \quad (64)$$

im wesentlichen die Laplace-Transformierte von $L(t; u)$.

5. Exponentielle Schadenhöhenverteilung

Als Beispiel zur Theorie des vorhergehenden Kapitels diskutieren wir hier den Spezialfall, wo die Schadenhöhe exponentiell verteilt ist:

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma x}, \quad f(x) = \gamma e^{-\gamma x} \quad (x \geq 0). \quad (1)$$

Wir werden hier – im Gegensatz zum allgemeinen Fall – die Existenz einer (und genau einer) optimalen Barrieren-Strategie einsehen.

5.1. Die Differentialgleichung der Band-Strategien

Sei S_{AB} irgend eine Band-Strategie. Wegen $f'(x) = -\gamma \cdot f(x)$ gewinnt man aus der Integro-Differentialgleichung (13) von 4.2.2. die Differentialgleichung

$$c v''(u) - (\alpha + \beta - c\gamma) v'(u) - \beta\gamma v(u) = 0. \quad (2)$$

Die Lösung ist von der Form

$$v(u) = C_1 e^{r_1 u} + C_2 e^{r_2 u}, \quad (3)$$

wobei r_1, r_2 der charakteristischen Gleichung

$$cr^2 - (\alpha + \beta - c\gamma)r - \beta\gamma = 0 \quad (4)$$

genügen. Die Konstanten C_1, C_2 bestimmt man, indem man den Ansatz (3) in die Integralrechnung (11) von 4.2.2. einsetzt.

5.2. Existenz und Berechnung der optimalen Barrieren-Strategie

Wir wollen zuerst $V(u, a)$ für $0 \leq u \leq a$ berechnen. Zu diesem Zweck bestimmen wir die C_1, C_2 wie oben beschrieben und erhalten aus (3)

$$V(u, a) = c \frac{(r_1 + \gamma) e^{r_1 u} - (r_2 + \gamma) e^{r_2 u}}{e^{r_1 a} [r_1(\alpha + \beta) + \beta\gamma] - e^{r_2 a} [r_2(\alpha + \beta) + \beta\gamma]} \quad (5)$$

Für welche $a = a_0$ wird nun $V(0, a)$ maximal? Partielle Differentiation nach a und Nullsetzen ergibt als einzige Lösung

$$a_0 = \frac{1}{r_1 - r_2} \log \frac{r_2[r_2(\alpha + \beta) + \beta\gamma]}{r_1[r_1(\alpha + \beta) + \beta\gamma]}, \quad (6)$$

welche positiv – und daher Lösung des Problems – ist, falls

$$\beta < \sqrt{\alpha} (\sqrt{\gamma c} - \sqrt{\alpha}), \quad (7)$$

d.h. falls die Zinsintensität nicht allzu gross ist. (Die rechte Seite von (7) ist positiv, da ja die Prämiendichte c grösser sein soll als der erwartete Schaden α/γ pro Zeiteinheit.) Insbesondere ist dann also $a_0 \neq 0$, so dass man anhand der Überlegungen von 4.6.3. schliesst: *Falls (7) erfüllt ist, so gibt es genau eine optimale Band-Strategie, nämlich die durch (6) gegebene Barrieren-Strategie.* Ihr Wert für das optimale Anfangskapital a_0 beträgt dann gemäss (45) von 4.6.3.

$$V(a_0) = V(a_0, a_0) = \frac{\gamma c - \alpha - \beta}{\beta\gamma}. \quad (8)$$

Im Falle wo

$$\beta \geq \sqrt{\alpha} (\sqrt{\gamma c} - \sqrt{\alpha}) \quad (9)$$

ist offenbar $a_0 = 0$ und $V(0) = V(0, 0) = \frac{c}{\alpha + \beta}$. Gäbe es nun eine optimale Band-Strategie S_{AB} mit einem positiven Punkt $a \in A$, so wäre wegen (45) aus 4.6.3. und wegen (9)

$$V(a) = \frac{\gamma c - \alpha - \beta}{\beta\gamma} \leq \frac{c}{\alpha + \beta} = V(0), \quad (10)$$

was nicht möglich ist. Wir schliessen daraus: *Falls (9) erfüllt ist, so gibt es genau eine optimale Band-Strategie, nämlich die zu $a_0 = 0$ gehörige Barrieren-Strategie.*

Als Illustration zu 4.7.2. sei noch das asymptotische Verhalten von a_0 für $\beta \rightarrow 0$ angegeben:

$$a_0 \sim \frac{1}{\gamma - \frac{\alpha}{c}} \log \frac{\left(\gamma - \frac{\alpha}{c}\right)^4 \cdot \alpha \cdot c}{\gamma^3 \cdot \beta^2}. \quad (11)$$

Dabei streben die vernachlässigten Terme gegen 0 für $\beta \rightarrow 0$.

5.3. Die erwartete Lebensdauer

Die Integralgleichung (63) von 4.9. lässt sich im Falle der exponentiellen Schadenhöhenverteilung überführen in die Differentialgleichung

$$c D_\delta''(u) - (\alpha + \delta - c\gamma) D_\delta'(u) - \delta\gamma D_\delta(u) + \gamma = 0. \quad (12)$$

Bei deren Lösung geht man analog vor wie bei der Lösung von (2). Für eine allgemeine Barrieren-Strategie (a) findet man so

$$D_\delta(u) = \frac{1}{\delta} + \frac{(s_1 + \gamma)[s_2(\alpha + \delta) + \delta\gamma]e^{-s_1(a-u)} - (s_2 + \gamma)[s_1(\alpha + \delta) + \delta\gamma]e^{-s_2(a-u)}}{\delta\gamma\{[s_1(\alpha + \delta) + \delta\gamma]e^{-s_2a} - [s_2(\alpha + \delta) + \delta\gamma]e^{-s_1a}\}}, \quad (13)$$

wobei $u \leq a$ und s_1, s_2 die Wurzeln der zu (12) gehörigen charakteristischen Gleichung sind. Im Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ erhält man die gewöhnliche erwartete Lebensdauer $D(u) = D_0(u)$:

$$D(u) = \frac{(c\gamma)^2}{\alpha(c\gamma - \alpha)^2} \cdot e^{\left(\gamma - \frac{\alpha}{c}\right)a} - \frac{c\gamma}{(c\gamma - \alpha)^2} \cdot e^{\left(\gamma - \frac{\alpha}{c}\right)(a-u)} \\ - \frac{1}{c\gamma - \alpha} - \frac{\gamma}{c\gamma - \alpha} \cdot u. \quad (14)$$

Dabei interessieren wir uns natürlich besonders für $u = a = a_0$.

Anhand von (11) erhalten wir die asymptotische Formel

$$D(a_0) \sim \frac{\left(\gamma - \frac{\alpha}{c}\right)^2}{\gamma} \cdot \frac{c}{\beta^2} \quad (15)$$

für $\beta \rightarrow 0$ beziehungsweise für $\alpha, c \rightarrow \infty$ ($\frac{\alpha}{c} = \text{konstant}$). Die erwartete Lebensdauer ist daher asymptotisch proportional zur Grösse (siehe 4.7.) eines Portefeuilles.

Auf Grund der erwarteten Lebensdauer kann übrigens auf einfache Weise die Ruinwahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitintervall abgeschätzt werden. Wenn P_t die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Ruin ins Intervall $[0, t]$ fällt (bei optimalem Anfangskapital a_0), so ist offenbar

$$D(a_0) \leqq t + (1 - P_t) \cdot D(a_0), \quad (16)$$

also

$$P_t \leqq \frac{t}{D(a_0)}. \quad (17)$$

Damit ergibt sich eine praktische Abschätzung der Sicherheit.

5.4. Numerisches Beispiel

Zur Illustration wurden das optimale Kapital a_0 und die erwartete Lebensdauer $D(a_0)$ für verschiedene Portefeuilles berechnet. Als Zinsintensität wurde $\beta = 0.05$ verwendet. Wenn man als Zeiteinheit ein Jahr betrachtet, so entspricht dies einem jährlichen Zinsfuss von ungefähr 5%. In diesem Sinne wäre dann α die erwartete Anzahl Schadenefälle pro Jahr, c das jährliche Total der Prämieneinnahmen.

$\mu = \frac{1}{\gamma}$	α	Marge 10%			Marge 20%		
		c	a_0	$D(a_0)$	c	a_0	$D(a_0)$
1 000	1 000	1,1 Mio.	117 000	4 900	1,2 Mio.	79 600	20 700
5 000	200	1,1 Mio.	419 000	1 220	1,2 Mio.	304 000	4 540
10 000	100	1,1 Mio.	706 000	731	1,2 Mio.	530 000	2 470
<hr/>							
1 000	5 000	5,5 Mio.	151 000	22 800	6,0 Mio.	98 700	101 000
5 000	1 000	5,5 Mio.	583 000	4 900	6,0 Mio.	398 000	20 700
10 000	500	5,5 Mio.	1020 000	2 620	6,0 Mio.	714 000	10 600

Dabei sind a_0 und $D(a_0)$ auf drei Ziffern genau berechnet.

Literaturverzeichnis

- [1] Ammeter, H.: A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift, vol. 31 (1948).
- [2] Blackwell, D.: Discounted Dynamic Programming. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 36 (1965).
- [3] Bühlmann, H.: Kollektive Risikotheorien. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 67 (1967).
- [4] Cramér, H.: On some Questions Connected with Mathematical Risk. University of California Publications in Statistics, vol. 2 (1954).
- [5] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II. Wiley, New York (1966).
- [6] de Finetti, B., Su un'Impostazione Alternativa della Teoria Colletiva del Rischio. Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, vol. 2 (1957).
- [7] Gerber, H.: Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit mit den Methoden der Fluktuationstheorie für Zufallswege. Skandinavisk Aktuarietidskrift, vol. 52 (1969).
- [8] Loève, M.: Probability Theory, 3rd edition. Van Nostrand, Princeton (1963).
- [9] Morill, J.: One-Person Games of Economic Survival. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 13 (1966).
- [10] von Neumann, J. und Morgenstern, O., Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten. Physika, Würzburg (1960).

Zusammenfassung

Die Arbeit gehört in das Gebiet der kollektiven Risikotheorie. Den kontinuierlichen Prämienneinnahmen stehen Schadenzahlungen gegenüber, welche einen zusammengesetzten Poisson-Prozess bilden.

In einem ersten Teil wird eine praktische Abschätzung für die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit hergeleitet. Diese Abschätzung bezieht sich auf den allgemeinen Fall, wo gleichzeitig positive und negative «Schäden» zugelassen sind.

Im zweiten Teil wird das Modell im Sinne einer Idee von B. de Finetti erweitert: Die Versicherungsgesellschaft zahlt ihren Aktionären gewisse Dividenden aus. Es wird die Frage behandelt, wie die Gesellschaft ihre Dividendenpolitik gestalten soll, um den Aktionären möglichst viel Dividende zukommen zu lassen. Im Falle exponentieller Schadenhöhenverteilung wird eine zahlenmässige Antwort gegeben.

Summary

The paper is a contribution to the collective theory of risk. The risk process results from continuous premiums on the one hand and from the claims on the other hand; the latter are governed by a compound Poisson process.

The first part provides a practical estimate for the asymptotic probability of ruin. This estimate is valid in the general case where simultaneously positive and negative „claims“ may occur.

In the second part the model is extended following an idea of B. de Finetti: The insurance company pays dividends to its shareholders. It is asked under what dividend policy the shareholders obtain as great a discounted total dividend as possible. A numerical answer is given in the case where the single claims are exponentially distributed.

Résumé

Cet article traite de la théorie collective du risque. Le risque est d'une part, aux primes continues et, d'autre part, aux indemnités; ces dernières sont gouvernées par un processus de Poisson composé.

La première partie de l'article présente une évaluation pratique de l'asymptotique probabilité de ruine. Cette évaluation s'applique au cas général où des «indemnités» en même temps négatives et positives se présentent.

Dans la deuxième partie le modèle est développé selon une idée de B. de Finetti: La compagnie d'assurances paie des dividendes à ses actionnaires. Le problème se pose de déterminer quel système de dividendes accorde aux actionnaires le plus grand dividend total possible. Une réponse numérique est donnée dans le cas où la distribution des indemnités individuelles est exponentielle.