

# Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Versicherung

Autor(en): **Bichsel, Fritz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **68 (1968)**

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966957>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Versicherung

Von Fritz Bichsel, Muri bei Bern

Nach einem Kurzvortrag an der Jahresversammlung der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker vom 14. Oktober 1967 in Bern.

### Zusammenfassung

Es werden einige grundsätzliche Überlegungen zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Versicherung angestellt, wobei die Bestimmung des Erwartungswertes solcher Verteilungen, d. h. die Bestimmung der Nettoprämie für ein Risiko, im Vordergrund steht. Am Schluss werden drei Methoden skizziert, die dazu dienen, die Nettoprämie für eine Risikoklasse mit kleinem Beobachtungsmaterial zu bestimmen. Diese drei Methoden benützen alle zusätzlich Beobachtungen an einer umfassenden grösseren Risikoklasse.

Wir gehen von drei praktischen Beispielen aus:

#### *Beispiel 1*

Antrag für Lebensversicherung.

Ulrich Lebelang, geboren 30. August 1908, Hotelier.

Risikoversicherung von Fr. 200 000.– für 1 Jahr.

Ärztliche Untersuchung:

Blutdruck 160/100.

Im EKG Zeichen von vegetativer Dystonie.

Sonst ohne Befund.

#### *Beispiel 2*

Rückversicherungsangebot.

Erster Feuer-Exzedent der Compagnie des Bons Risques, Paris.

Statistik:

Jahr	Verdiente Prämie 1000 NF	Provision 1000 NF	Angefallene Schäden 1000 NF	Gewinn 1000 NF
1965	800	200	500	100
1966	900	225	675	0
1967	1000	250	700	50

### Beispiel 3

Antrag für Autohaftpflichtversicherung.  
 Heinrich Schuss, geboren 1947.  
 Sportwagen Triumph.  
 Busse wegen Lenkens in angetrunkenem Zustand.

Der Leser möge sich vorstellen, er wäre Direktor einer Versicherungsgesellschaft und hätte die Prämie für diese Risiken zu bestimmen. (Im Beispiel 2 wäre die Rückversicherungsprovision und damit die Nettoprämie zu bestimmen.)

Der Mathematiker wird in jedem Beispiel den Gesamtschaden pro Jahr als Zufallsvariable auffassen. Diese Zufallsvariable sei mit  $S$  bezeichnet, ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung mit  $F(x)$ .

Wenn  $F(x)$  bekannt ist, ergibt sich die Prämie wie folgt:

$$\text{Nettoprämie: } P = \int_0^{\infty} x dF(x) \quad (= \text{Erwartungswert von } S).$$

$$\text{Bruttoprämie: } \pi = P + Z + K,$$

wo

$$Z = \text{Sicherheitszuschlag,}$$

$$K = \text{Kostenzuschlag.}$$

Wie aber kommen wir zu  $F(x)$ ? Es ist der Sinn dieser Arbeit, einige Betrachtungen zu dieser Frage anzustellen.

Zunächst wollen wir uns überlegen, wovon die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F(x)$  eigentlich abhängt. Sie hängt ab:

- a) Vom versicherten Risiko. Hier stellt sich die Frage, ob bei einem einzelnen Risiko von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gesprochen werden kann. Müsste nicht eine Menge gleichartiger Risiken betrachtet werden? Die Auffassungen der Theoretiker der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu dieser Frage gehen bekanntlich auseinander. Der Verfasser dieser Arbeit glaubt, dass es sinnvoll und nützlich sei, bei einem einzelnen Risiko von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu sprechen. Diese Auffassung führt zu einer individuellen Tarifierung der einzelnen Risiken. Eine solche individuelle Tarifierung widerspricht dem eigentlichen Sinn der Versicherung, nämlich dem Schutz des einzelnen vor der Willkür des reinen Zufalls, ganz und gar nicht. Sie entspricht aber am besten einer Wirtschaftsordnung, in der die Selbständigkeit und Selbstverantwortlichkeit des einzelnen soweit als möglich aufrechterhalten werden. Selbstverständlich sind in der Praxis die Grenzen zu beachten, die einer individuellen Tarifierung durch die Kosten gesetzt werden.
- b) Von den Kenntnissen des Versicherers. Wenn etwa im Beispiel 1 der Versicherer weiss, dass der Antragsteller vor dem Konkurs steht, so wird er das Risiko als schwerer betrachten, d. h. diese Kenntnis hat einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F(x)$ . Dagegen haben an sich bestehende Tatsachen, die aber dem Versicherer nicht bekannt sind, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wenn etwa, wieder im Beispiel 1, der Antragsteller an einem Krebs leidet, der eben erst frisch entstanden ist und mit den heutigen diagnostischen Mitteln nicht festgestellt werden kann, so kann eine solche niemandem bekannte Tatsache die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schadens nicht beeinflussen. Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie wir feststellen, von den Kenntnissen des Versicherers abhängt, dann ist sie für zwei Versicherer mit ungleichen Kenntnissen nicht gleich. In diesem Sinne können wir von subjektiver Wahrscheinlichkeit sprechen.

Wir haben nun festgestellt, wovon die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $S$  abhängt. Wie aber soll sie bestimmt werden? Welche Hilfsmittel stehen uns zur Verfügung?

Wir werden froh sein, wenn wir Statistiken zur Verfügung haben. Weiter können wir das sogenannte Gefühl walten lassen, und schliesslich stehen uns Methoden der modernen mathematischen Statistik zur Ver-

fügung, um aus Beobachtungen auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu schliessen.

Der Verfasser glaubt, dass die besten Resultate dann erzielt werden, wenn alle diese Hilfsmittel in der richtigen Dosierung miteinander eingesetzt werden. Die richtige Dosierung ist von Fall zu Fall verschieden, so wie die richtige Dosierung von Theorie und Gefühl auch verschieden ist, wenn es darum geht, einen Gegenstand zu treffen:

Wenn dieser Gegenstand in der Nähe liegt und mit einem Stein getroffen werden soll, dann werden wir uns auf das Gefühl verlassen. Wenn der Gegenstand weiter weg ist und mit einem Gewehr getroffen werden soll, dann werden wir zum Gefühl hinzu bereits etwas Theorie benützen. Wenn der Gegenstand noch weiter weg ist und wir eine Kanone zur Verfügung haben, dann brauchen wir bereits recht viel Theorie, und wenn es schliesslich darum geht, mit einer Sonde den Mond oder gar die Venus zu treffen, dann wird uns das Gefühl völlig im Stiche lassen.

Im Rest dieser Arbeit soll versucht werden, einen Überblick über mathematische Methoden zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus Beobachtungen zu geben, die in der Versicherung angewendet werden können. Dabei steht die Ermittlung des Erwartungswertes der Verteilung, versicherungstechnisch gesprochen also der Nettoprämie, unbedingt im Vordergrund.

Die einfachste und naheliegendste Methode zur Bestimmung der Nettoprämie ist die folgende:

Wir beobachten eine Gruppe gleichartiger Risiken während eines bestimmten Zeitraumes. Die Nettoprämie für die Risikoeinheit, d.h. der Nettoprämienatz, ergibt sich dann zu

$$P = \frac{\sum s}{\sum r},$$

wo  $\sum s$  die Summe der Schäden und  $\sum r$  die Summe der unter Beobachtung gestandenen Risiken darstellen.  $r$  sei dabei gemessen in der Risikoeinheit, die der Prämienberechnung zugrunde liegt. Es kann sich dabei um Jahresrisiken, Lohnsummen, Umsätze usw. handeln.

Diese Methode hat bekanntlich den Nachteil, dass sie bei kleinem Beobachtungsmaterial wegen der Zufallsschwankungen unzuverlässig ist und dass bei grossem Beobachtungsmaterial dieses nicht mehr homogen ist. Besonders nachteilig wirkt sich aus, dass die Wahrscheinlich-

keitsverteilungen von Schadenssummen im allgemeinen stark schief sind und deshalb die Methode in den meisten Fällen für  $P$  einen zu kleinen Wert liefert. In der Sprache der mathematischen Statistik würden wir sagen, dass das arithmetische Mittel aus einer Stichprobe hier keinen guten Schätzwert für den Mittelwert der Verteilung liefert. Die Nichtberücksichtigung dieser Eigenschaft schiefer Verteilungen hat schon mehr als eine Versicherungsinstitution in eine schiefe Lage gebracht.

Zum Glück gibt es nun aber mathematische Methoden, die gestatten, dem Dilemma zwischen Zuverlässigkeit und Homogenität des Beobachtungsmaterials, in das uns die geschilderte einfache Methode versetzt, wenigstens ein Stück weit auszuweichen. Drei solche Methoden seien im folgenden kurz skizziert.

Allen drei Methoden ist gemeinsam, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine kleine Menge möglichst gleichartiger Risiken nicht nur aus den Beobachtungen an diesen Risiken selbst bestimmt wird, sondern dass Beobachtungen an einer grösseren, umfassenden Menge mit herangezogen werden. Wir werden die umfassende Menge mit  $M$  und die einzelnen Teilmengen mit  $M_i$  bezeichnen.

#### *Methode A. Ausgleichung*

Diese Methode ist bekannt aus der Konstruktion von Sterbetafeln. Wenn zum Beispiel die Sterbenswahrscheinlichkeit für einen 50jährigen Mann bestimmt werden soll, dann werden nicht nur die 50jährigen Männer beobachtet – dies ergäbe vielleicht ein zu kleines Beobachtungsmaterial –, sondern wir beobachten alle Alter und wenden dann ein analytisches oder mechanisches Ausgleichsverfahren an.

Ein Ausgleichsverfahren ist immer dann sinnvoll, wenn die Teilmengen  $M_i$  durch Zahlen  $x_i$  charakterisiert sind, die einen Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schäden haben.

#### *Methode B. Relativitäten*

Diese Methode sei am Beispiel der Feuerversicherung erläutert. Der Tarif der Feuerversicherung ist insbesondere abgestuft nach der Bauartklasse des Gebäudes und nach der Art des Gewerbes. Eine Statistik über Feuerversicherung kann daher in einer zweidimensionalen Tabelle wie folgt dargestellt werden:

		Bauartklasse										
		1	2	...						$k$	...	
Gewerbe	1											
	2											
	.											
	.											
	.											
	$i$										$M_{ik}$	
	.											
	.											
	.											

$M_{ik}$  sei die Menge von Risiken mit dem Gewerbe  $i$  und der Bauartklasse  $k$ . Diese  $M_{ik}$  sind meistens viel zu klein, um eine zuverlässige Prämienbestimmung nur aus den eigenen Beobachtungen zu gestatten.

Der folgende Ansatz kann hier weiterhelfen:

$$P_{ik}^* = \alpha_i \beta_k P$$

mit

$P_{ik}^*$  = Prämienatz für  $M_{ik}$ ,

$\alpha_i$  = Faktor, der nur vom Gewerbe abhängt,

$\beta_k$  = Faktor, der nur von der Bauartklasse abhängt,

$P$  = Durchschnittsprämienatz für das ganze Beobachtungsmaterial.

Zur Bestimmung der «relativities»  $\alpha_i$  und  $\beta_k$  stehen folgende Methoden zur Verfügung:

a) Die  $\alpha_i$  und  $\beta_k$  werden so bestimmt, dass die Summe

$$r_{ik} \frac{(P_{ik}^* - P_{ik})^2}{P_{ik}}$$

minimal wird. Dabei bedeuten:

$r_{ik}$  = Risikobestand in  $M_{ik}$  (in unserem Beispiel Total der Versicherungssummen in  $M_{ik}$ ),

$$P_{ik} = \frac{s_{ik}}{r_{ik}},$$

wo  $s_{ik}$  = Total der beobachteten Schäden in  $M_{ik}$ .

b) Wir setzen zuerst

$$\alpha_i = \alpha_{i,0} = 1,$$

$$\beta_k = \beta_{k,0} = 1,$$

$$\text{d. h. } P_{ik}^* = P_{ik,0,0}^* = P,$$

und vergleichen für jedes Gewerbe das Total der Prämien, das wir mit diesen Prämien­sätzen erhalten hätten, mit dem beobachteten Total der Schäden. Diese beiden Grössen werden im allgemeinen nicht übereinstimmen, d. h. es ergibt sich kein Ausgleich für die einzelnen Gewerbe.

Nun bestimmen wir neue  $\alpha_{i,1}$  so, dass mit

$$P_{ik,1,0}^* = \alpha_{i,1} \beta_{k,0} P$$

die einzelnen Gewerbe ausgeglichen sind, was offensichtlich leicht möglich ist. Mit diesen Prämien­sätzen werden aber die Bauart­klassen nicht ausgeglichen sein. In einem weiteren Schritt legen wir deshalb  $\beta_{k,1}$  so fest, dass mit

$$P_{ik,1,1}^* = \alpha_{i,1} \beta_{k,1} P$$

die Bauart­klassen ausgeglichen sind. Dadurch ist aber der Ausgleich bei den Gewerben wieder gestört worden. Wir wählen daher jetzt  $\alpha_{i,2}$  so, dass mit

$$P_{ik,2,1}^* = \alpha_{i,2} \beta_{k,1} P$$

die Gewerbe wieder ausgeglichen sind.

Und so weiter.

Dieses Verfahren wurde von Jan Jung angegeben [2]. Wie Jan Jung berichtet, konvergiert es meistens sehr rasch. Es eignet sich gut für die Programmierung auf Computern und hat gegenüber a) den Vorteil, dass der Ausgleich für das Gesamtgeschäft auf alle Fälle gewährleistet ist.

### *Methode C. Erfahrungstarifizierung*

Wir betrachten wieder eine Menge  $M$  von ähnlichen Risiken, die in Teilmengen  $M_i$  zerfällt. Im Gegensatz zu den Voraussetzungen bei der Methode A soll es nicht möglich sein, die Teilmengen durch Zahlen  $x_i$  zu charakterisieren, die einen Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeits­verteilung der Schäden haben.



Der Ansatz lautet wie folgt:

$$P_i^* = (1 - \alpha_i) P + \alpha_i P_i$$

mit

$$P_i^* = \text{Prämiensatz für } M_i$$

$$P = \frac{\text{Summe der Schäden in } M}{\text{Summe der Risiken in } M}$$

$$P_i = \frac{\text{Summe der Schäden in } M_i}{\text{Summe der Risiken in } M_i}$$

Der Ansatz ist einleuchtend:  $P_i^*$  ist dargestellt als gewogenes Mittel aus dem Prämiensatz, der sich aus  $M_i$  allein, und dem Prämiensatz, der sich aus der ganzen Menge  $M$  ergibt nach der oben erwähnten einfachsten Methode.

Die Bestimmung der Gewichte  $\alpha_i$  stellt allerdings Probleme, die noch nicht restlos gelöst sind [1], [3].  $\alpha_i$ , das Gewicht für die Beobachtungen an  $M_i$  selbst, wird jedenfalls zunehmen mit

- zunehmender Anzahl Risiken in  $M_i$ ,
- abnehmender Streuung von  $S$  innerhalb  $M_i$ ,
- zunehmender Streuung von  $S$  zwischen den verschiedenen  $M_i$ .

Ein Anwendungsbeispiel ist das Bonus-Malus-System in der schweizerischen Motorfahrzeugversicherung [4]. Dort bestehen die  $M_i$  je nur aus einer Police.

Soweit der Überblick über mathematische Methoden zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus Beobachtungsmaterial, die in der Versicherung angewendet werden können. Er erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Es stellt sich nun die Frage, welche Methode oder welche Kombination von Methoden – eine solche Kombination ist durchaus sinnvoll und möglich – in einem vorliegenden konkreten Fall angewendet werden soll. Dafür gibt es nach Ansicht des Verfassers kein Rezept. Die besten Resultate werden erreicht, wenn ein Praktiker, der das früher erwähnte Gefühl hat, und ein Mathematiker eng zusammenarbeiten.

## Literaturverzeichnis

- [1] *Bühlmann, H.*: Experience rating and credibility, ASTIN Bulletin Vol. IV, Part III, S. 199.
- [2] *Jung Jan.*: On Automobile Insurance Ratemaking · Estimating relativities in a multiplicative model. Diese Arbeit wurde dem ASTIN-Kongress von 1968 in Arnhem eingereicht und ist leider noch nicht veröffentlicht worden.
- [3] *Bichsel, F.*: Experience rating in subsets of risks, ASTIN-Bulletin Vol. IV, Part III, S. 210.
- [4] *Bichsel, F.*: Erfahrungstarifizierung in der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung, MVSV 64. Band, Heft 1, S. 119.

## Résumé

L'article contient quelques réflexions sur les principes utilisés pour la détermination de distributions de probabilités dans l'assurance, en traitant avant tout la détermination de l'espérance mathématique de ces distributions, c'est-à-dire la détermination de la prime nette d'un risque. Trois méthodes sont ensuite esquissées permettant de déterminer la prime nette d'une classe de risques C pour laquelle on dispose seulement de peu d'observations. Toutes les trois méthodes se basent sur des observations supplémentaires provenant d'une classe de risques plus grande englobant la classe C.

## Summary

Some basic reflections are made about the determination of probability distributions in insurance, the determination of the expectancy, i. e. the determination of the net premium rate for a risk being considered in first line. At the end of the paper three methods are sketched which lead to the determination of the rate for a class of risks C from a small number of observations. Each of these three methods uses, in addition to the data from the class C, observations from a greater class containing C.

## Riassunto

L'articolo contiene qualche riflessione sui principi usati per la determinazione di distribuzioni di probabilità nell'assicurazione, trattando in primo luogo la determinazione della speranza matematica, cioè la determinazione del premio netto d'un rischio. Sono schizzati in seguito tre metodi che permettono di determinare il premio netto d'una classe di rischi C per la quale si dispone solamente di poche osservazioni. Tutti e tre i metodi utilizzano osservazioni supplementari provenienti da una classe di rischi più grande e che contiene la classe C.

