Die Wahrscheinlichkeitstheorie als Grundlage des Versicherungswesens : Antrittsvorlesung an der ETH vom 24. Juni 1967

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Die Wahrscheinlichkeitstheorie als Grundlage des Versicherungswesens

Antrittsvorlesung an der ETH vom 24. Juni 1967

Von *Hans Ammeter*, Zürich

Zusammenfassung

Die Lebensversicherungsmathematik stützt sich trotz ihres deterministischen Charakters im Grunde genommen doch auf die wichtigsten Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ferner können die im Versicherungswesen auftretenden Schadenswahrscheinlichkeiten als mathematische Wahrscheinlichkeiten im Sinne der modernen Definition von Kolmogorov gelten. Allerdings weisen die Schadenverteilungen keine normale Dispersion auf, was zu einer bestandesproportionalen Schwankungskomponente führt und den Risikoausgleich beeinträchtigt. Trotzdem darf die Wahrscheinlichkeitstheorie als Grundlage des Versicherungswesens gelten.

Umgekehrt kann jedoch nicht jeder aleatorische Vorgang Gegenstand eines praktischen Versicherungsverhältnisses sein. Wegen der bestandesproportionalen Grundschwankung sind gewisse Risiken unter Umständen nur beschränkt versicherbar.

I. Problemstellung

Man ist zunächst etwas erstaunt, wenn man die Frage hört, ob die Wahrscheinlichkeitstheorie die Grundlage des Versicherungswesens sei. Man spricht doch von einem Versicherungsprinzip mit einem Risikoausgleich nach dem Gesetz der grossen Zahlen oder auch von einer Sterbenswahrscheinlichkeit. Wie kann da überhaupt noch ein Zweifel auftauchen, ob die Wahrscheinlichkeitstheorie die Grundlage des Versicherungswesens bildet? Es zeigt sich jedoch, dass die Fragestellung dennoch berechtigt ist und dass von gewissen Standpunkten aus Zweifel auftauchen, deren nähere Abklärung durchaus angezeigt ist.

Zur gleichen Problemstellung hat ein mehr praktisch orientierter Versicherungsdirektor eine einfache Antwort gewusst: er sagte, sein Unternehmen mache nun schon seit vielen Jahren ansehnliche Gewinne im Versicherungsgeschäft, so dass die Dividenden an die Versicherten und Aktionäre immer mehr gesteigert werden konnten. Daraus lasse sich schliessen, dass sich die Wahrscheinlichkeitstheorie als Grundlage des Versicherungswesens bewährt habe. Wenn man sich die Beantwortung auch nicht so leicht macht, so muss man doch anerkennen, dass ein wahrer Kern in dieser «Beweisführung» liegt. Die Feststellung, dass ein nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie geführter Betrieb sich gedeihlich entwickeln konnte, spricht tatsächlich für die zugrunde liegende Theorie.

Die Zweifler an der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen lassen sich in zwei Gruppen einteilen:
Die einen fragen sich, ob die Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt bei versicherungsmathematischen Operationen zum Einsatz kommt, und wenn nicht, ob man daraus schliessen könnte, dass sie für das Versicherungswesen zumindest entbehrlich sei. Die andere Gruppe der Zweifler stösst sich am Wahrscheinlichkeitsbegriff und fragt sich, ob die im Versicherungswesen auftretenden Schadenswahrscheinlichkeiten den Charakter einer mathematischen Wahrscheinlichkeit im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie aufweisen.

Bei der Prüfung dieser Fragen stösst man auf die Gegenfrage, ob jeder auf der Wahrscheinlichkeitstheorie fussende stochastische Vorgang zu einem praktisch versicherbaren Risiko führt. Es wird sich zeigen, dass die Versicherbarkeit von bestimmten wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften der Schadenswahrscheinlichkeiten abhängt. Praktisch ist die Gegenfrage eigentlich bedeutsamer als die Grundfrage selbst.

II. Ist die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Versicherungsmathematik unentbehrlich?

Die Lebensversicherungsmathematik, welche innerhalb der praktisch angewendeten Versicherungsmathematik immer noch eine dominierende Stellung einnimmt, stützt sich bei den praktischen Berechnungen vor allem auf das Prinzip der fingierten Gesamtheit. Man geht dabei von der Annahme aus, die in der Sterbetafel vermerkte grosse Zahl von lebenden Versicherten schliesse gleichzeitig eine bestimmte Lebensversicherung ab. Für diese fingierte Gesamtheit ergibt sich dann auf Grund der angewendeten Sterbetafel, des gewählten technischen Zinsfusses und der erforderlichen Kostenzuschläge mit beliebiger Genauigkeit die gesuchte Prämie. Bei der Berechnung geht man von der Annahme aus, dass der Barwert der gesamten Prämieneinnahmen nach dem Äquivalenzprinzip gleich gross sein soll wie der Barwert der gesamten Ausgaben für den Todes- und Erlebensfall mit Einschluss der Kosten.

Dieses Berechnungsmodell ist vollständig deterministisch; vom Zufall oder von zufälligen Schwankungen ist überhaupt nicht die Rede. Man kann sich tatsächlich fragen, ob es bei diesen Berechnungen angebracht ist, von einer Sterbens*wahrscheinlichkeit* zu sprechen, oder ob man nicht besser von einer Sterbe*rate*, wie beim englischen Fachausdruck death-rate, oder, noch besser, von einer Sterbe*quote* sprechen sollte, wie es einmal von *Prof. Nolfi* vorgeschlagen worden ist.

Es lässt sich nicht bestreiten, dass das Modell der deterministischen Lebensversicherungsmathematik sich in weitem Umfange praktisch bewährt hat. Gestützt auf dieses Modell lassen sich nicht nur die Netto- und Bruttoprämien für alle denkbaren Versicherungsformen berechnen – selbst wenn es sich um recht komplizierte Typen handelt –, sondern das gleiche Modell erweist sich auch bei der Berechnung der Prämienreserve und von Abfindungswerten, bei der Gewinnanalyse usw. als fruchtbar.

Trotz ihres deterministischen Charakters steht jedoch im Grunde auch die klassische Lebensversicherungsmathematik auf dem Boden der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dies kommt schon im Prinzip der fingierten Gesamtheit zum Ausdruck, nach welchem bei der Prämienberechnung davon ausgegangen wird, dass eine grosse Zahl gleichaltriger Leute die Versicherung gleichzeitig abschliesst, was implizite nichts anderes postuliert, als dass ein idealer Ausgleich nach dem Gesetz der grossen Zahlen stattfindet.

Ob ein solcher Ausgleich in konkreten Versicherungsbeständen tatsächlich zustande kommt und gegebenenfalls unter welchen Voraussetzungen, darüber sagt allerdings die deterministische Theorie nichts aus. Ferner erhält man keine Antwort auf die Frage, mit welchen Mitteln man einen allenfalls nicht ausreichenden Ausgleich verbessern könnte und welche Garantiemittel vorhanden sein müssen, um einen tatsächlichen Ausgleich zu gewährleisten. Es ist daher nicht verwunderlich, dass die deterministische Lebensversicherungsmathematik hin und wieder auch angewendet wird in Fällen, wo die Voraussetzungen ihrer Anwendbarkeit in keiner Weise gegeben sind, z.B. wenn für eine Pensionskasse mit nur fünf Versicherten eine versicherungstechnische Bilanz aufgestellt wird. Hier ist es offensichtlich, dass ein Missbrauch der Lebensversicherungsmathematik vorliegt. Aber von welcher Personenzahl an ist denn die Anwendung des Rechenapparates der klassischen Lebensversicherungsmathematik zulässig?

Diese Frage lässt sich mit Hilfe der deterministischen Lebensversicherungsmathematik nicht beantworten. Hier zeigt sich der Mangel des deterministischen Modells, das gerade auf das Charakteristikum der Versicherung, nämlich den aleatorischen Charakter der Risikodeckung und die stochastische Natur der im Versicherungswesen auftretenden Vorgänge, keinen Bezug nimmt. Wie *Boehm* in einem schon vor dem zweiten Weltkrieg veröffentlichten Aufsatz hervorhebt, gibt eben die deterministische Betrachtungsweise nur eine Stück-Kostenrechnung, welche die Bestandesqualität der betreffenden Versicherung nicht berücksichtigt.

Die Schwächen des deterministischen Modells sind vor allem in der Sachversicherung mit ihren – verglichen mit der Lebensversicherung – inhomogeneren Beständen und unstabileren Schadenswahrscheinlichkeiten nicht zu übersehen. Hier ist es von grösster Bedeutung, wie man trotz der ungünstigen Ausgangslage zu einem vernünftigen Ausgleich kommt. Diese und ähnliche Fragen können jedoch nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beantwortet werden, wobei leider nicht verschwiegen werden kann, dass die Forschung hier erst in den Anfängen steckt.

Wenn man dennoch feststellen muss, dass die deterministische Versicherungsmathematik sich im allgemeinen bewährt hat, so liegt das daran, dass die Leiter von Versicherungsinstitutionen bewusst oder unbewusst in den meisten Fällen darnach getrachtet haben, durch Vergrösserung der Versicherungsbestände und Homogenisierung des Risikos nach Art und Höhe der Risikosummen den Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der deterministischen Theorie immer näherzukommen. Trotz der scheinbaren Nichtbenützung des Kalküls der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie dennoch – wenn auch vielleicht in unvollkommener Weise – benützt, so dass man die grundlegende Stellung der Wahrscheinlichkeitstheorie selbst vom Standpunkt der deterministischen Versicherungsmathematik aus bejahen muss.

III. Die Krise des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat, wie *Anderson* in seinem immer noch lesenswerten Lehrbuch festgestellt hat, ihren Ursprung am Spieltisch. Diese, von einem puritanischen Standpunkt aus vielleicht als etwas unmoralisch zu betrachtende Geburtsstätte hat nicht verhindert, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie zu einem tragenden Pfeiler grosser Wissenszweige geworden ist. Die erbliche Belastung der Wahrscheinlichkeitstheorie ist jedoch immer noch unverkennbar. Die Vorstellungen, welche aus den Glücksspielwahrscheinlichkeiten entstanden sind, haben die Ansichten der Theoretiker mehr als hundert Jahre lang beherrscht, und erst in den letzten Jahrzehnten haben sich die Ansichten von der durch die Geburtsstätte bedingten Erbmasse weitgehend emanzipiert.

Nach der klassischen Definition ist die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Quotienten aus der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle zur Anzahl der gleichmöglichen Fälle. Diese Definition rief bei den Glücksspielwahrscheinlichkeiten keine Skrupel hervor; beim idealen Würfel ist es klar, dass für die Wahrscheinlichkeit, eine 3 zu werfen, ein günstiger sechs gleichmöglichen Fällen gegenübersteht. Ähnliche Überlegungen kann man beim Münzenwerfen und anderen Glücksspielen anstellen.

Bei komplizierter gelagerten Ereignissen ergeben sich jedoch Zweifel darüber, wie man zu den günstigen und gleichmöglichen Fällen gelangen könnte. Gerade der Begriff der gleichmöglichen Fälle führt zu logischen Skrupeln, indem im Grunde genommen «gleichmöglich» ein Synonym für «gleichwahrscheinlich» ist, so dass sich die Definition in einem Zirkel bewegt und daher den Ansprüchen, welche man an eine Definition stellen muss, eigentlich nicht zu genügen vermag. Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie suchte sich diesen Zweifeln und Mängeln zu entziehen, indem sie den Begriff einer Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori einführte. Dadurch wurden zwar zwei neue, schöne Worte, aber eigentlich keine klar abgrenzbaren Begriffe geprägt.

Die Diskussionen über den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff führten vor allem im 3. und 4. Jahrzehnt unseres Jahrhunderts zu einer eigentlichen Krise der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Träger der Kritik am klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff war vor allem der deutsche Wahrscheinlichkeitstheoretiker *Richard v. Mises*, dessen Kritik schliesslich zu einem neuen Wahrscheinlichkeitsbegriff führte. Mises stellte zunächst den Begriff des statistischen Kollektivs aller Eintrittsmöglichkeiten vor den Wahrscheinlichkeitsbegriff und definierte die mathematische Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten eines Ereignisses bei unbegrenzter Fortsetzung der Versuchsreihe und unter Annahme eines Regellosigkeits-Prinzips bei der Realisierung der einzelnen Versuche.

Die v. Misessche Konzeption vermeidet tatsächlich die Schwächen der klassischen Definition. Sie stiess daher vorerst weitherum auf Zustimmung; bald aber traten verschiedene Kritiker auf den Plan. Einmal wurde bemängelt, dass das Regellosigkeits-Axiom mathematisch nicht fassbar ist; noch bedeutsamer war der Einwand gegen das Grenzwert-Axiom, indem der Grenzwertbegriff, wie er sich in der Analysis herausgebildet hat, von einem gesetzmässigen Übergang ins Unendliche ausgeht, während der Übergang bei der Wahrscheinlichkeit per definitionem regellos wäre. Diese berechtigten Einwände haben zu einer Reihe von weiteren Definitionen geführt, die teils für bestimmte Spezialgebiete geeigneter sein sollten, teils Anspruch auf Allgemeingültigkeit erhoben.

Aus diesen Diskussionen ging schliesslich eine neue Konzeption der Wahrscheinlichkeitstheorie hervor, die erstmals vom russischen Mathematiker *Kolmogorov* entwickelt worden ist, und die sich auf die mathematische Mengen- und Masstheorie stützt. Darnach wird, ähnlich wie bei v. Mises, zunächst das mathematische Kollektiv, die Verteilung sämtlicher Eintrittsmöglichkeiten eines Ereignisses und ihre Darstellung durch Verteilungsfunktionen, in den Vordergrund gerückt. Jede in Betracht fallende Möglichkeit eines Ereignisses wird einer bestimmten mathematischen Menge zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses ergibt sich dann als Quotient aus der Teilmenge des betrachteten Ereignisses und der Gesamtmenge, der sie angehört.

Die Kolmogorovsche Definition ist abstrakt mathematisch und nur noch lose mit der intuitiven Vorstellung verknüpft. Darin liegen gleichzeitig ihre Stärke und ihre Schwäche. Auf dem Gebiete der Theorie hat sich die Kolmogorovsche Vorstellung durchgesetzt, und der frühere Streit um die Definition und ihre Grundlagen hat sich weitgehend beruhigt. Wichtig ist dabei die Festellung, dass, welche Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit man auch immer gewählt hat, der grösste und vor allem der wichtigste Teil der Errungenschaften der Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere der zentrale Grenzwertsatz und die Gesetze der grossen Zahlen, immer gültig geblieben ist.

Hier stellt sich die wichtige Frage, ob die im Versicherungswesen auftretenden Schadenswahrscheinlichkeiten den Charakter einer mathematischen Wahrscheinlichkeit aufweisen oder nicht. Müsste man diese Frage verneinen, so wäre es in der Tat zumindest zweifelhaft, ob eine Übertragung der Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie auf das Versicherungswesen statthaft wäre.

Zu Anfang dieses Jahrhunderts herrschten über diese Fragestellung erhebliche Zweifel. Beispielsweise äusserte sich *Czuber* in seinem seinerzeit bekannten Lehrbuch recht zurückhaltend. Er meinte, dass der gewöhnlich als einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit bezeichnete Quotient als empirische Wahrscheinlichkeitsgrösse anzusehen wäre, wenn eine vorausgehende Untersuchung gezeigt hätte, dass die für gleichaltrige Personen aus verschiedenen Geburtszeiten bestimmten Verhältniszahlen aus Toten und Lebenden eine normale Dispersion aufweisen würden.

Der hier benützte Begriff der normalen Dispersion ist eines der Residuen aus der erwähnten Erbmasse der Wahrscheinlichkeitstheorie, welche vom Spieltisch stammt. Die Glücksspielwahrscheinlichkeiten weisen nämlich die bemerkenswerte Eigenschaft auf, dass die Varianz annähernd oder sogar genau mit dem Mittelwert übereinstimmt. Das Verhältnis zwischen Varianz und Mittelwert, das man nach *Lexis* als Divergenzkoeffizient bezeichnet, nimmt daher bei Glücksspielwahrscheinlichkeiten annähernd oder sogar genau den Wert 1 an. Wenn Czuber somit für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie eine normale Dispersion forderte, so meinte er im Grunde nichts anderes, als dass die Schadenswahrscheinlichkeiten im Versicherungswesen die gleichen Eigenschaften aufweisen sollten wie die Wahrscheinlichkeiten, die beim Würfeln, Kartenziehen, Münzenwerfen usw. auftreten.

Wie verhält es sich nun in Wirklichkeit mit dieser normalen Dispersion?

In der Sachversicherung ist man – wie viele Untersuchungen gezeigt haben – von der normalen Dispersion weit entfernt. Auch in der

Lebensversicherung ist die Dispersion nicht normal, wenn auch weniger ausgeprägt als in der Sachversicherung. Dies haben unter anderem die Untersuchungen von *Lange*, der die Abweichungen der jährlichen Sterblichkeitsschwankungen vom Trend an Hand der preussischen Volkssterblichkeit untersuchte, sowie auch ähnliche Untersuchungen an Hand der Sterblichkeit im Bestande der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt gezeigt. Die Abweichung von der normalen Dispersion bleibt allerdings in verhältnismässig bescheidenen Grenzen, insbesondere wenn man gemischte Versicherungsbestände betrachtet, welche sich über einen möglichst weiten Altersbereich erstrecken.

Muss man daraus wirklich schliessen, dass die Errungenschaften der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen nicht anwendbar sind?

Die geschilderte Auffassung ist vom modernen Standpunkt aus kaum haltbar. Die Beschränkung auf die normale Dispersion würde dann bedeuten, dass nur eine ganz bestimmte Familie von Verteilungen einer Zufallsgrösse gewissermassen als legal anzusehen wäre, während alle anderen Verteilungen apokryph sein würden. Nach der modernen Auffassung können jedoch beliebige Verteilungen von Zufallsgrössen in Betracht fallen. Der Familie der Normalverteilungen gebührt eigentlich nicht einmal ein Vorrang.

Für die klassische Auffassung war das Bernoullische Urnenschema von grundlegender Bedeutung. Darnach wird aus einer Urne, welche gut gemischt schwarze und rote Kugeln enthält, blindlings eine Serie Kugeln mit jeweiligem Zurücklegen gezogen. Betrachtet man einen ganzen Satz von untereinander gleichlangen Ziehungsserien, so gelangt man für die Häufigkeit der gezogenen schwarzen oder roten Kugeln auf die sogenannte Binomialverteilung. Nach dieser gilt für die Wahrscheinlichkeit, aus einer Serie von n Zügen genau r rote Kugeln zu ziehen, die Formel

$$f(r) = \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r},$$

worin q die Wahrscheinlichkeit bedeutet, eine rote Kugel zu ziehen. Durch Grenzübergang geht die Binomialverteilung in die Poisson-Verteilung

$$f(r) = \frac{e^{-nq} (nq)^r}{r!}$$

oder schliesslich in die kontinuierliche Normalverteilung

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nq}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(nq-r)^2}{nq}}$$

über. Das ist die Familie der Normalverteilungen im erweiterten Sinne. Bei der Poisson-Verteilung sind der Mittelwert μ_1 und die Varianz μ_2'

$$\mu_1 = nq = t$$
$$\mu_2' = nq = t$$

genau gleich gross. Dies ist das Kennzeichen der normalen Dispersion.

Nun kann man aber ohne weiteres auch andere Urnenschemata konstruieren. So haben zum Beispiel *Pòlya* und *Eggenberger* vor mehr als 40 Jahren ein Urnenschema mit Wahrscheinlichkeitsansteckung geschaffen. Darnach wird nach jeder gezogenen Kugel nicht nur diese Kugel, sondern eine in einem bestimmten Verhältnis erhöhte Anzahl von gleichfarbigen Kugeln zurückgelegt. Dies führt auf das Urnenschema mit Chancenvermehrung. Man kann in analoger Weise auch ein Urnenschema mit Chancenverminderung aufstellen.

Vor einigen Jahren wurde ein weiteres Urnenschema konzipiert, das man als Urnenschema mit schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten bezeichnen kann. Darnach geht man von einem ganzen System von Sekundär-Urnen aus, in denen von Urne zu Urne das Mischungsverhältnis zwischen schwarzen und roten Kugeln systematisch variiert. Daneben besteht noch eine Primär-Urne, worin jeder Sekundär-Urne entsprechend eine Anzahl von Losen enthalten ist, welche zu einer Wahrscheinlichkeit beim Ziehen aus der Primär-Urne führt, eine bestimmte Sekundär-Urne zu wählen. Aus der dermassen gezogenen Urne wird dann – wie beim Bernoullischen Schema – eine Serie von n Kugeln gezogen.

Dieses erweiterte Urnenschema geht von der Annahme aus, dass von Serie zu Serie eine verschiedene Grundwahrscheinlichkeit auftritt, die jeweils repräsentiert wird durch das Mischungsverhältnis von roten und schwarzen Kugeln.

Es zeigt sich, dass der gleiche Grenzübergang, welcher bei der Binomialverteilung auf die Poisson-Verteilung führt, im Modell mit schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten auf die negative Binomialverteilung führt, welche im Vergleich zur Poisson-Verteilung einen Parameter mehr enthält, der das Ausmass der Grundschwankungen charakterisiert.

Diese Verteilung lautet

$$f(r) = \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{t}{t+h}\right)^r \left(\frac{h}{t+h}\right)^h,$$

worin mit h der zusätzliche Schwankungsparameter bezeichnet wird. Der Schwankungsparameter h fällt umso kleiner aus, je mehr die Grundschwankung ins Gewicht fällt. Im Grenzfall $h \to \infty$ ergibt sich wieder die klassische Poisson-Verteilung.

Es lässt sich ferner zeigen, dass man auch aus dem Urnenschema für Wahrscheinlichkeitsansteckung durch bestimmte Grenzübergänge zur gleichen negativen Binomialverteilung gelangen kann. Da es noch weitere Arten für die Herleitung der negativen Binomialverteilung gibt, nimmt diese eine fundamentale Stellung innerhalb der erweiterten Verteilungen ein.

Der Mittelwert μ_1 der negativen Binomialverteilung ist wieder

$$\mu_1 = nq = t$$

und gibt die erwartete Schadenzahl wieder. Man erhält also das gleiche Resultat wie bei der Poisson-Verteilung. Anders verhält es sich bei der Varianz μ_2'. Für diese gilt die Formel

$$\mu_2' = t + \frac{t^2}{h},$$

in der das zweite Glied rechts die übernormale Dispersion hervorbringt. Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Verteilungen.

Die negative Binomialverteilung weist eine grössere Schwankungsbreite auf als die Poisson-Verteilung, oder, mit anderen Worten, grössere Abweichungen vom Mittelwert kommen nach der negativen Binomialverteilung häufiger vor als nach dem klassischen Poisson-Modell, was im Einklang mit der Wirklichkeit im Versicherungswesen steht.

Von grösster Bedeutung ist das Verhalten der beiden Verteilungen bei wachsendem Versicherungsbestand, wenn man den Schadensatz, das heisst das Verhältnis

$$\frac{\text{Schaden}}{\text{Nettoprämie}}$$

betrachtet. Im Poisson-Fall gelangt man zur Aussage des klassischen Gesetzes der grossen Zahlen, nach dem die Streuung der Verteilung immer kleiner und kleiner und schliesslich Null wird, was dem im geschilderten deterministischen Modell der Lebensversicherung geforderten idealen Risikoausgleich entspricht.

Ein ganz anderes, den tatsächlichen Verhältnissen im Versicherungswesen jedoch besser entsprechendes Resultat erhält man im Falle der negativen Binomialverteilung. Hier degeneriert die Verteilung nicht, und auch bei unendlich grossem Versicherungsbestand verbleibt eine der Primär-Schwankung entsprechende Grundstreuung, welche sich durch Vergrösserung des Bestandes nicht mehr vermindern lässt. Man gelangt so gewissermassen zu einem modifizierten Gesetz der grossen Zahlen, welches den Realitäten im Versicherungswesen näherkommt als das klassische Gesetz. Dies erkennt man leicht schon aus der Formel über die Varianz der Variablen r/t, welche den Schadensatz wiedergibt; es ist

$$\frac{\mu_2'}{t^2} = t^{-1} + \frac{1}{h},$$

in der das erste Glied rechts, wie bei der Poisson-Verteilung, im Grenzübergang $t \to \infty$ verschwindet, nicht aber das zweite Glied, das die Varianz der Primärverteilung darstellt.

Man kann nun die Versicherungsmathematik, insbesondere ihren wahrscheinlichkeitstheoretisch orientierten Teil, den man Risikotheorie nennt, ohne weiteres auch auf der negativen Binomialverteilung oder auf noch allgemeineren Verteilungen aufbauen anstelle der klassischen Poisson-Verteilung. Daraus lässt sich aber der Schluss ziehen, dass die erwähnte Beschränkung auf die der Wirklichkeit nicht entsprechenden Verteilungen mit normaler Dispersion im Sinne der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum sinnvoll ist. Ungeachtet der nicht normalen Dispersion ist daher die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Versicherungswesen im vollen Umfange zu bejahen.

IV. Die Grenzen der Versicherbarkeit

Bedeutet diese Feststellung nun aber, dass das Versicherungswesen funktionieren könnte bei beliebigen Eigenschaften der Schadenswahrscheinlichkeiten oder der ihr zugrunde liegenden Verteilungen? Und wie steht es mit dem für den Versicherungsgedanken unerlässlichen Risikoausgleich, der gewöhnlich mit dem Gesetz der grossen Zahlen in einem Atemzug genannt wird, wenn das Gesetz der grossen Zahlen eine Modifikation erfährt?

Bei der Prüfung dieser Fragen soll zunächst vereinfachend von einem Versicherungsbestand mit lauter gleichartigen Risiken ausgegangen werden.

Wenn in diesem Versicherungsbestand normale Dispersion herrscht wie bei der Poisson-Verteilung, so entsteht kein neues Problem, weil dann das klassische Gesetz der grossen Zahlen gilt, bei dem die relative Streuung mit der reziproken Quadratwurzel aus dem Bestandesumfang abnimmt und schliesslich gegen Null konvergiert.

Wird jedoch übernormale Dispersion vorausgesetzt wie bei der negativen Binomialverteilung, so ergibt sich neben der aus dem Poisson-Fall bekannten abnehmenden Streuungskomponente eine weitere Streuungskomponente, welche die unangenehme Eigenschaft hat, bestandesproportional zu sein. Durch eine Vergrösserung des Versicherungsbestandes kann hier die relative Streuung nicht unter den der Grundstreuung entsprechenden Umfang herabgesetzt werden, was auf alle Fälle den Risikoausgleich beeinträchtigt.

Diese neu hinzutretende Schwankungskomponente bleibt jedoch für das Versicherungswesen erträglich, solange sie in einem gewissen Rahmen bleibt. Wenn man aber an Fälle denkt, bei denen die Grundschwankung diesen Rahmen überschreitet und z.B. die Grössenordnung des Mittelwertes selbst erreicht oder gar noch mehr ausmacht, so würde man praktisch einem unversicherbaren Risiko gegenüberstehen. Wenn ein Versicherer in grösserem Umfange derartige Versicherungen übernehmen und z.B. eine Prämieneinnahme von 100 Millionen Franken erzielen würde, müsste er befürchten, dass die Schadenbelastung nicht unbedingt in der Nähe des durch die Prämien gedeckten Normalschadens ausfallen müsste, sondern ebensogut in einzelnen Jahren mehrere hundert Millionen Franken ausmachen könnte. Eine Schadendeckung nach dem Versicherungsprinzip wäre dann praktisch kaum möglich. Sie würde jedenfalls weitgehend einer gefährlichen Spekulation gleichkommen, die eine solide Versicherungsgesellschaft nicht eingehen kann, wenn sie Wert darauf legt, ihren Versicherten Sicherheit zu bieten. Die Versicherbarkeit ist somit keineswegs universal gegeben, sondern hängt davon ab, ob die proportionale Grundschwankung einen gewissen Rahmen nicht überschreitet. Für homogene Versicherungsbestände, welche der negativen Binomialverteilung oder noch allgemeineren Verteilungen mit übernormaler Dispersion folgen, ist daher die Versicherbarkeit unter Umständen beschränkt.

Ein noch allgemeinerer Fall liegt vor, wenn der Versicherungsbestand sich aus mehreren, untereinander unabhängigen Teilbeständen zusammensetzt, wie das vor allem bei international tätigen Gesellschaften, insbesondere bei Rückversicherern, vorkommt. Diese Unabhängigkeit der Teilbestände kann davon herrühren, dass ganz verschiedenartige Risiken zusammengefasst werden, wie z.B. Lebensversicherungen, Glasversicherungen, Haftpflichtversicherungen usw., oder dass die Versicherungen aus weit voneinander entfernt liegenden Ländern rekrutiert werden. Für die Beurteilung der Verhältnisse in einem solchen Komposit-Bestand muss die Verteilung des Gesamtschadens als Summe der Ergebnisse der einzelnen Teilbestände gebildet werden, was analytisch durch Faltung der Einzelverteilungen geschieht. Nun führt aber, wie der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, die Summenbildung aus vielen Einzelkomponenten – ganz gleichgültig, wie die Einzelverteilungen aussehen – für die Summe als Grenzverteilung stets auf die Gauss-Laplacesche Normalverteilung und zu einer relativen Gesamtstreuung, welche proportional zur reziproken Quadratwurzel aus der Komponentenzahl abnimmt.

Durch die Zusammenfassung von unabhängigen Teilbeständen zu einem Komposit-Bestand kann man somit nach und nach eine normale Dispersion mit ihrem idealen Ausgleich wieder herstellen. Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den man gewissermassen als das Gesetz der Gesetze bezeichnen könnte, ist zwar nur unter gewissen Voraussetzungen gültig, die aber hier als erfüllt angenommen werden dürfen. Als einzige Einschränkung muss wohl lediglich beachtet werden, dass bei der Verflechtung aller Lebens-, Sozial- und Wirtschaftsvorgänge selbst im internationalen Bereich eine völlige Unabhängigkeit zwischen den Schadenverläufen der einzelnen Unterbestände wohl kaum je bestehen wird, so dass kein Versicherer darum herum kommt, auf der Hut zu sein. Wie dem auch sei, es steht jedenfalls fest, dass man durch Zusammenfassung von möglichst unabhängigen Versicherungsbeständen den Risikoausgleich verbessern und auf diese Weise sogar schwere Risiken – zumindest in einem gewissen Umfang – mitübernehmen kann. Dieser Umfang kann durch geeignete Rückversicherungsvorkehrungen noch über die eigene Zeichnungskraft hinaus gesteigert werden. So weit man aber immer auch gehen mag, grundsätzlich ist festzuhalten, dass Risiken mit stark übernormaler Dispersion nur in einem beschränkten Umfang versichert werden können.

Diese Feststellung gilt allerdings nur bei Anwendung von Durchschnittsprämien. Durch eine geeignete Erfahrungstarifierung liesse sich theoretisch eine Lösung finden, bei der die dem Versicherer drohenden Gefahren weitgehend eliminiert werden, so dass die Versicherbarkeit wiederhergestellt würde. Man käme jedoch so unter Umständen zu derart schwankenden Prämien, dass das Versicherungsprinzip praktisch aufgehoben und jeder Versicherte seine eigenen Schäden weitgehend selbst decken würde. Die Anwendung der Erfahrungstarifierung kann daher nur theoretisch, nicht aber praktisch die unbegrenzte Versicherbarkeit gewährleisten.

Daraus ergibt sich, dass zwar die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Versicherungswesen grundsätzlich bejaht werden kann, dass aber die unbeschränkte Versicherbarkeit beliebiger Risiken nicht gegeben ist. Aber gerade die Fragen, welche sich bei der Abgrenzung der Versicherbarkeit stellen, sind typische Problemstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Versicherungswesen und die fundamentale Stellung dieser Theorie für die Versicherungsmathematik und ein rationell betriebenes Versicherungswesen muss daher einmal mehr bejaht werden.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie erlaubt es, die Eigenschaften von Schadenswahrscheinlichkeiten oder, genauer, die ihr zugrunde liegenden Verteilungen anzugeben und abzugrenzen, welche für einen rationellen praktischen Betrieb des Versicherungswesens nach Massgabe der verfügbaren Mittel in Frage kommen. Damit hat sich die Fragestellung, ob die Wahrscheinlichkeitstheorie sich als Grundlage für das Versicherungswesen verwenden lasse, gewissermassen umgekehrt.

Während die ursprüngliche Fragestellung mehr akademischen Charakter hat und zudem die universale Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergeben hat, führt die Gegenfrage – vor allem in der Sachversicherung – auf praktisch bedeutsame, mitunter sogar lebenswichtige Abgrenzungen, die nicht ungestraft überschritten werden können und welche die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen unterstreichen.

Résumé

Malgré leur nature déterministe les mathématiques actuarielles se basent somme toute sur les résultats les plus importants de la théorie des probabilités. De plus les probabilités de sinistre intervenant dans les assurances peuvent être considérées comme probabilités mathématiques selon la définition moderne de Kolmogorov. Cependant les distributions du nombre de sinistres ne montrent pas une dispersion normale, ce qui conduit à une composante de fluctuation proportionnelle aux effectifs et qui nuit à la compensation des risques. Malgré tout, la théorie de la probabilité peut servir de base aux assurances.

Inversement cependant tout processus stochastique ne reflète pas un risque assurable. Il existe des risques qui, à cause de la fluctuation proportionnelle aux effectifs, ne sont assurables que d'une façon restreinte.

Summary

In spite of its deterministic nature the actuarial science is based after all on the most important results of the theory of probability. Furthermore the claim rates could be considered as mathematical probabilities according to the modern definition of Kolmogorov. The distributions of the number of claims occurred have however no normal dispersion; this leads to a fluctuation component depending on the size of the portfolio and disturbs the compensation of risks. Nevertheless the theory of probability may be considered as a basis for insurance.

The reverse, that to any stochastic process may correspond a practical insurance case, is not true. Owing to the basic fluctuation depending on the size of the portfolio, some risks may only be partially insurable.

Riassunto

Malgrado il suo carattere deterministico, la matematica delle assicurazione sulla vita si basa soprattutto su i risultati più importanti della teoria delle probabilità. Per di più si può considerare le probabilità sinistri che intervengono nella assicurazione come probabilità matematiche secondo il termine moderno del Kolmogorov. Le distribuzioni dei numeri dei sinistri non mostrono però una dispersione normale, il che conduce a una componente di fluttuazione proporzionale all'effettivo ed a un disturbo nell'aggiustare il rischio. Malgrado tutto la teoria delle probabilità può servire di base al processo assicurativo.

Inversamente però, ad un processo stocastico non corrisponde necessariamente un rischio assicurabile. Essistono dei rischi per i quali data la fluttuazione base proporzionale agli effettivi solo una assicurazione limitata è possibile.