Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 67 (1967)

Artikel: Introduction à une théorie opérationnelle du risque : 2e note : la structure commune

Autor: Franckx, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966948

Introduction à une théorie opérationnelle du risque

2e Note – La structure commune

Par E. Franckx, Bruxelles

Résumé

Le but de cette seconde note est de dégager la structure commune des problèmes de risque. Cela est obtenu en établissant un isomorphisme entre les opérations d'assurance et un jeu sur un graphe.

A. Le problème

Dans ce bulletin[1] a été publiée, sous le même titre, une note dont l'idée principale était la subdivision du problème du risque par la partition de la compagnie non life en deux départements financiers autonomes.

Le premier département a pour mission:

- de calculer et de récolter les primes,
- de doter le second département d'une indemnité forfaitaire par sinistre survenu,
- de payer, si possible, certains dividendes.

Si au début d'un exercice, le premier département dispose (ou non) d'une réserve financière, celle-ci augmentée des primes encaissées, devra payer autant de fois la dotation fixe qu'il aura été constaté de sinistres au cours de l'année.

Mais a priori, au début de l'année le solde du compte de profits et pertes est aléatoire. Il dépend de quatre facteurs opérationnels:

- le montant de la réserve disponible au début de l'exercice;
- le montant de la prime (supposé identique) exigée par contrat;
- la loi de probabilité qui gouverne le risque accepté;
- le montant du dividende payé à charge de l'exercice.

---

[1] Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, octobre 1965.

Les soldes stochastiques consécutifs s'enchainent dans le temps. Leur étude et les calculs numériques correspondants constituent l'objet principal d'une théorie du risque au sens large, proposée par *K. Borch.* Si on limite l'étude à l'arrivée des soldes négatifs, sans participation bénéficiaire, la théorie conduit au problème de la ruine de *P. Lundberg.*

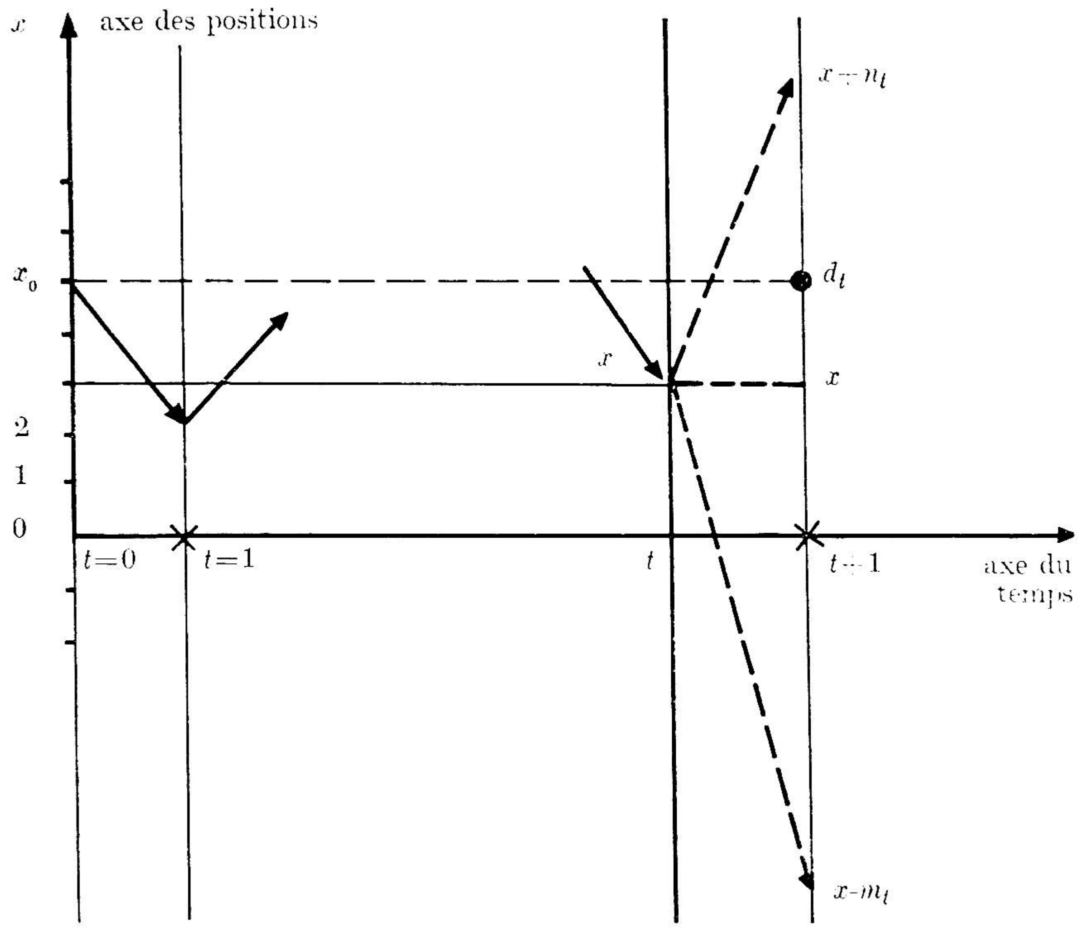
Le but de la note est avant tout de dégager la structure commune de tous ces problèmes de risque.

B. Jeu sur un graphe et le processus stochastique correspondant

α) Les conditions du jeu

Le jeu est lié aux positions successives prises par un mobile dans le plan.

L'axe horizontal indique le temps. L'axe vertical indique les positions admissibles du mobile $x = \pm k, k$ étant un nombre entier (state space).



Les règles du jeu sont définies comme suit:

1° la position initiale est le nombre entier $x_o \geqq 0$, au temps $t = 0$;

2° si le mobile atteint au temps t la position $x \geqq 0$, il se déplace pour atteindre au temps $(t+1)$ une des positions:

$$\left.\begin{array}{lccccc} & x+n_t & \dots & x & \dots & x-m_t \\ \text{avec les probabilités:} & p_{n_t} & \dots & p_0 & \dots & p_{-m_t} \end{array}\right\} \qquad (I_t)$$

Les nombres n_t, m_t et les probabilités de (I_t) dépendent éventuellement du temps, mais ils sont uniformément applicables quelle que soit la dernière position atteinte $x \geqq 0$.

3° après ce premier déplacement on a l'alternative suivante:

- ou bien la position atteinte $x \geqq d_t$; d_t étant le *niveau critique d'arrivée*. Dans ce cas, le mobile descend de d_t positions et le jeu recommence;
- ou bien la position atteinte est sous le niveau critique d_t: $x < d_t$. Dans ce cas le jeu est terminé et le mobile est enlevé.

Le mobile décrira une trajectoire stochastique dans le plan. La règle 1° fixe le point de départ de la trajectoire. La règle 2° détermine les possibilités de déplacement, pour autant que les points de départ successifs restent dans le quadrant positif. La règle 3° est une règle de décision, qui autorise le stade subséquent ou impose la fin du jeu.

β) La matrice de Markof adjointe à chaque stade de mouvement

1° Si le mobile part au temps t d'une position quelconque $x \geqq 0$, il sera en vertu de la règle de décision:

- ou bien immobilisé au temps $t+1$; nous convenons de dire qu'il a atteint l'état M (de décès) au temps $t+1$;
- ou bien il atteint au temps $t+1$ une position $y \geqq 0$; nous convenons de dire que le mobile «survit» au temps $t+1$, à la position y.

Donc les possibilités du mouvement seront totalement définies par une matrice de Markof qui doit donner quel que soit $x \geqq 0$

$$\left\{\begin{array}{llllll} r^t_{xM} & r^t_{xo} & r^t_{x1} & \dots & r^t_{xy} & \dots \\ \text{avec} & \multicolumn{5}{l}{r^t_{xM} + \sum\limits_{y \geqq 0} r^t_{xy} = 1} \end{array}\right. , \qquad (II_t)$$

r^t_{xy} désignant la probabilité de passage, au temps t, de la position de départ x à la position d'arrivée y.

2º Il est évident que le système (II_t) dérive de (I_t). *Ce qui est plus remarquable, c'est la manière uniforme – indépendante de t – qui permet la construction de la matrice* (II_t).

a) on construit le tableau 1, qui à la base inférieure reprend le système (I_t) ensuite on reproduit en remontant cette même ligne de base et en la déplaçant chaque fois d'une place vers la droite;

b) on trace une ligne verticale entre $(d_t - 1)$ et d_t;

c) on passe à la construction du tableau 2, dont la première colonne est obtenue, en effectuant la sommation horizontale de tous les éléments du tableau 1 se trouvant à gauche de la verticale placée entre $(d_t - 1)$ et d_t;

d) les autres éléments reproduisent identiquement le tableau 1 à droite de cette même verticale;

e) on complète la matrice en indiquant:
- à gauche et verticalement les positions de départ $x = 0, 1, 2, \ldots$;
- en dessous et sur une même ligne horizontale les positions possibles d'arrivée,
  - la première, M, position de «décès» ou de «fin de jeu»,
  - ensuite les «nouvelles» positions de départ, ou «positions de survie» au temps $(t+1)$

$$y = 0, 1, \ldots.$$

Les règles précédentes définissent une et une seule matrice de Markof de r^t_{xy}, qui est adjointe aux possibilités de mouvement entre t et $(t+1)$. La vérification de cette propriété est immédiate. En vertu du système (I_t), le tableau 1 donne les probabilités du premier mouvement (stade stochastique), le tableau 2 donne les possibilités après le second mouvement (stade systématique).

γ) *Les variables aléatoires du processus stochastique*

1º Données

Nous revenons au temps t. Ou bien le jeu est terminé ou bien le mobile occupe une des positions de départ $x = 0, 1, 2, \ldots.$

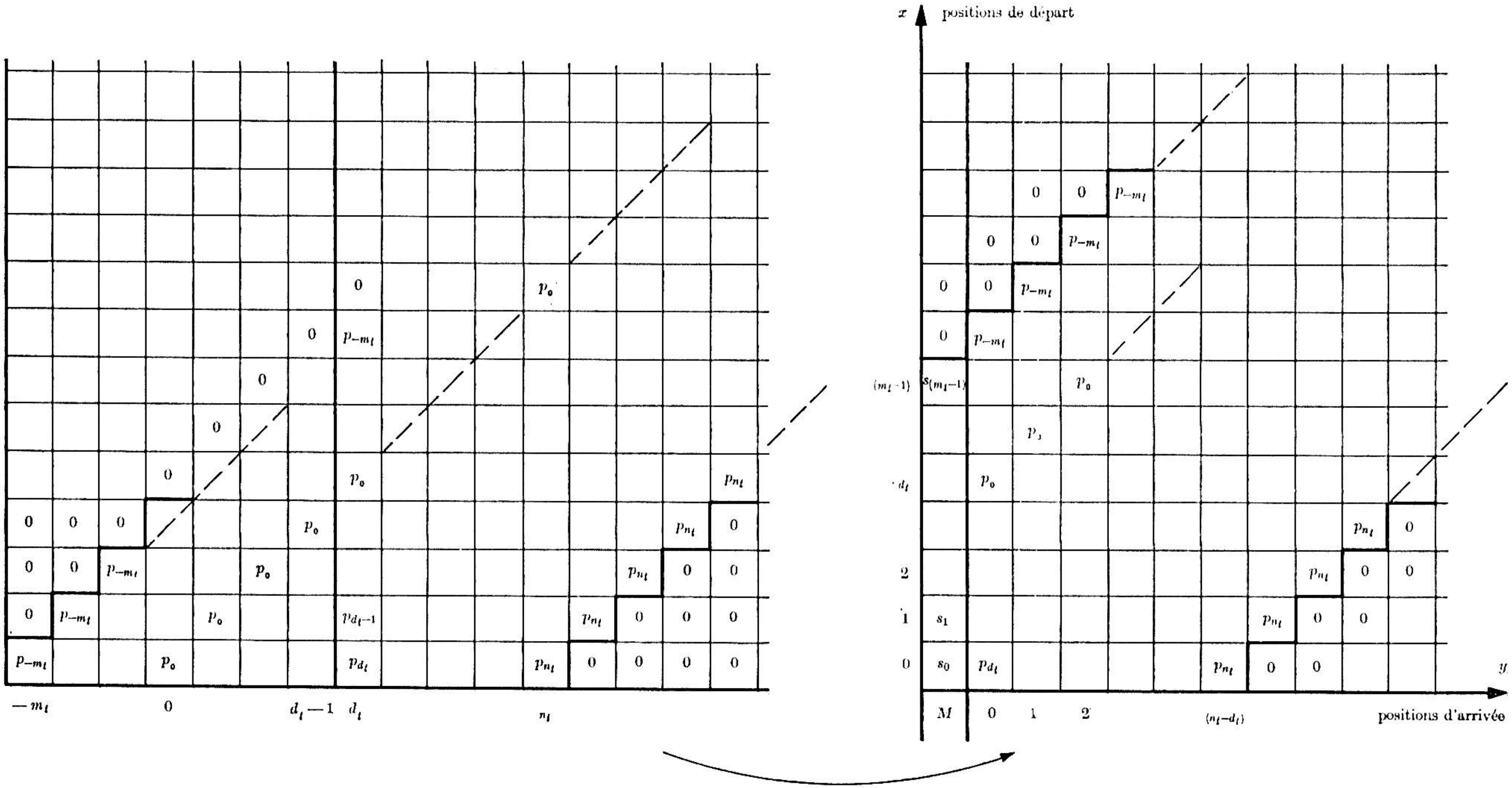


Tableau 1

Tableau 2

Construction de la matrice des probabilités de passage

Donc le mobile occupe les positions

$$\left.\begin{array}{lllll} & \text{de décès } M, & \text{de survie } 0, 1, 2, \ldots & x \ldots \\ \text{avec les probabilités} & q_M(t) & p_0(t) \ldots & p_x(t) \ldots \end{array}\right\} \quad (III_t)$$

Nous pouvons adjoindre au système (III_t) une variable aléatoire X_t car

$$q_M(t) + \sum_0^{\infty} p_x(t) = 1.$$

La suite infinie $X_0 X_1 \ldots X_t X_{t+1} \ldots$ définit le processus stochastique lié aux déplacements du mobile. Le calcul numérique de la suite (III_t) constitue le premier problème effectif de la théorie opérationnelle du risque.

2° Algorithme de calcul

Deuxième fait remarquable, un algorithme de calcul lie uniformément la succession des suites X_t.

1° En effet, la variable X_0 est imposée par les conditions initiales:

$$q_M = 0 \qquad p_{x \neq x_0} = 0 \qquad p_{x_0} = 1$$

puisque le mobile part de la position x_0.

2° Considérons le produit matriciel définit par le tableau 3.

La partie centrale reproduit (II_t), on y ajoute une ligne horizontale, 10 ... 0, qui exprime que l'état M de «décès» est un état absorbant.

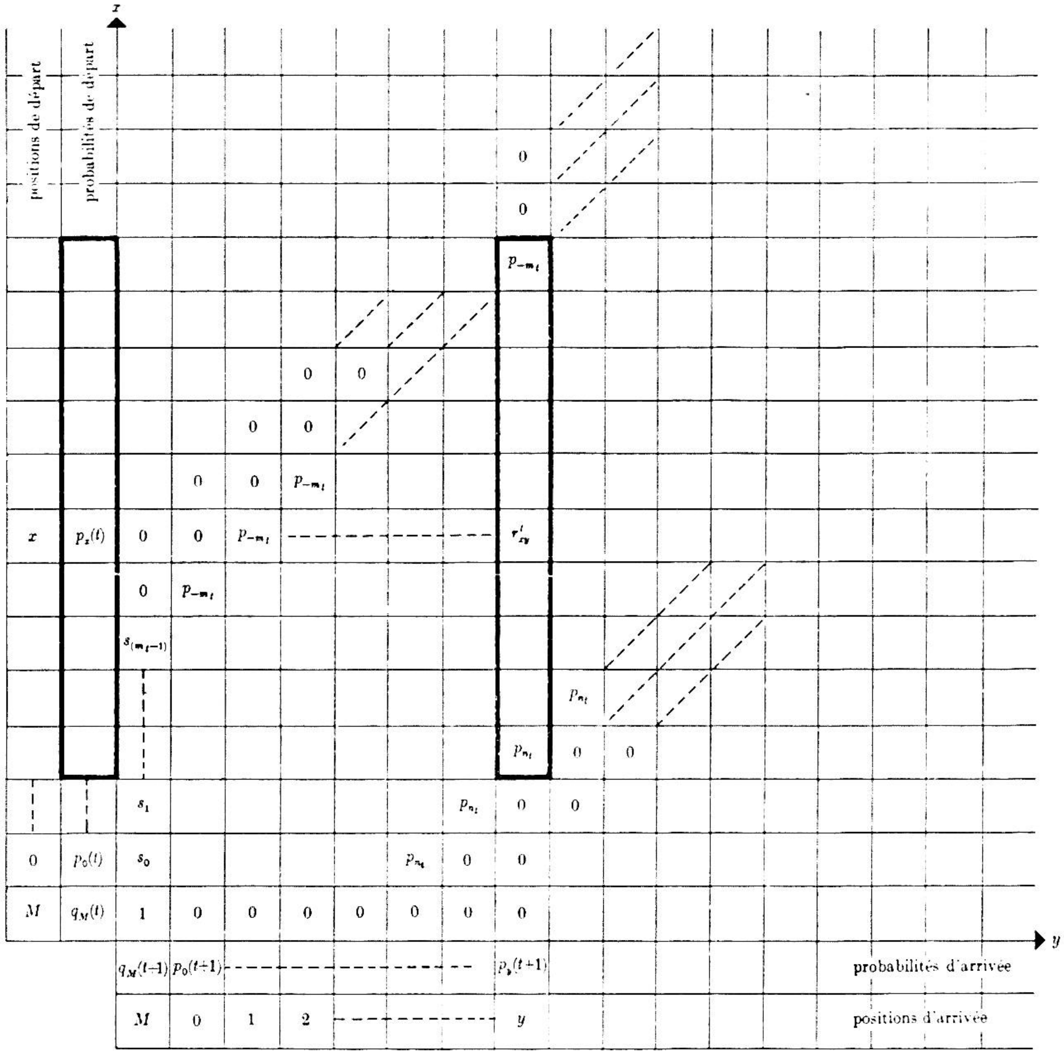
a) A gauche, en 1e colonne on introduit les valeurs de X_t;

b) on effectue la multiplication «colonne par colonne» et on somme les résultats (voir encadrements du tableau 3);

c) ceux-ci sont inscrits dans la dernière ligne horizontale, qui donne dans l'ordre les valeurs de la variable X_{t+1}.

La démonstration est immédiate car: on a les *formules rétrospectives de décomposition*

$$\left|\begin{array}{l} q_M(t+1) = q_M(t) + \sum_x p_x(t)\, r_{xM} \\ p_y(t+1) = \sum_x p_x(t)\, r_{xy} \end{array}\right| \qquad (IV_t)$$



L'algorithme de structure Tableau 3

En conclusion

- *d'une part à partir des données, on construit toujours de la même manière la matrice (II_t);*
- *d'autre part, à partir de cette matrice, on calcule toujours par le même algorithme la succession des variables X_t.*

Ces deux propriétés invariantes définissent la structure du jeu.

C. Le jeu de l'assureur ou les opérations de risque

α) Le but

Nous avons au point A ci-dessus définit ce que nous entendons par les opérations de risque concrètes, que l'assureur accepte en réalité.

D'autre part au point B, nous avons examiné un jeu sur un graphe, obtenu en acceptant des règles de jeu bien définies. Nous en avons déduit des lois caractéristiques, invariantes qui constituent la structure du jeu sur le graphe.

Si nous parvenons à établir que toute opération de risque de l'assureur est isomorphe à un jeu sur un graphe, qui satisfait aux règles imposées, nous aurons une abstraction fidèle des opérations d'assurances, telles qu'elles sont considérées dans cette note. Par dualité les jeux de l'assureur sont des représentations concrètes du jeu indiqué sur un graphe.

Du coup nous aurions un *double résultat:*

- avant tout, *la structure commune de toutes les opérations de risque* serait mise en lumière, puisqu'elle coïnciderait avec celle de l'ensemble des jeux qui satisfont aux règles prescrites;
- ensuite: nous aurions *une méthode générale pour étudier les propriétés communes de toutes les opérations de risque*, puisque toute propriété valable du jeu abstrait se traduit par une propriété isomorphe pour le jeu de l'assureur.

β) Les règles d'isomorphisme

Nous introduisons quatre règles (les règles de l'assureur)

a. 1. – Point essentiel: *la valeur x représente le fonds de réserve – stock monétaire – qui est adjoint à un ensemble T de risques:*

- le montant de ce fonds est, par convention, un multiple entier x d'une unité monétaire donnée;
- l'existence d'un tel fonds constitue un phénomène de congestion, il résulte du jeu auquel l'assureur souscrit et de la politique générale qu'il décide de suivre;
- le jeu de l'assureur est un enchaînement de parties; la $(t+1)^e$ partie correspond au jeu financier de l'exercice $(t, t+1)$.

a. 2. – Nous supposons que *la prime demandée par contrat de la classe T est le même multiple π_t de l'unité monétaire. Celle-ci peut varier d'exercice en exercice* (politique de tarification).

Si au temps t l'effectif de la classe T est e_t, la rentrée de fonds – supposée faite au début de l'exercice – fait passer le fonds monétaire à une position maximale $x + \pi_t e_t$.

Nous identifions avec le modèle abstrait en posant:

$$n_t = \pi_t e_t.$$

a. 3. – Nous supposons de plus que la *dotation par sinistre survenu est également un multiple Δ_t de la même unité monétaire.* L'assureur c'est-à-dire le premier département n'est pas libre de le fixer. C'est en fait, le second département qui doit donner le montant Δ_t.

D'autre part, à chaque ensemble de risques T constitué au temps t, correspond une variable aléatoire globale S_t, qui donne par:

$$\begin{cases} r_j(t) = \text{prob (nombre total des sinistres} = j) \\ r_j(t) \geqq 0 \qquad \sum_0^{k_t} r_j(t) = 1 \end{cases}$$

les probabilités de devoir payer $0, 1, \ldots, k_t$ dotations.

Nous supposons k_t fini, c'est-à-dire qu'un nombre maximal de sinistres peut intervenir par exercice. *Cette convention est réaliste* car si $k_t = \infty$, le risque ne serait plus assurable. De plus, à cause de l'approximation numérique (calculs à effectuer en machine électronique) les $r_j(t)$ sont pratiquement nuls à partir d'un certain j.

Dès lors fin d'exercice et dans le cas défavorable le fonds monétaire passe à la position minimale $(x + \pi_t e_t - k_t \Delta_t)$.

Nous identifions avec le modèle abstrait en posant:

$$m_t = k_t \Delta_t - \pi_t e_t.$$

La valeur de m_t est le solde «le plus défavorable» en cas de réserve nulle au début d'exercice.

Le système (I_t) du jeu abstrait est complètement défini puisque le fonds monétaire prendra les «positions»

$$\begin{cases} x + n_t \ldots\ldots x + n_t - \Delta_t \ldots \quad \ldots x + n_t - k_t \Delta_t \\ r_0(t) \quad 0 \ldots 0 \quad r_1(t) \quad 0 \ldots \ldots 0 \quad r_{k_t}(t) \end{cases}$$

Le système (I_t) possède *une forme plus particulière* du fait que chaque terme $r_j(t)$ est suivi de $(\Delta_t - 1)$ zéros (à cause des dotations fixes).

Notons que la politique commerciale de l'assureur – par l'acceptation ou le refus des propositions – modifie la variable globale S_t.

a. 4. – Il nous reste à identifier l'alternative finale.

L'assureur constatera fin d'exercice que le fonds monétaire dont il dispose atteint ou n'atteint pas le *niveau critique* d_t, conventionnellement exigé à priori des opérations d'assurances de l'ensemble T. Si ce niveau est atteint, il sera prélevé sur le fonds le montant d_t qui servira à payer dividendes, bonus, participations bénéficiaires, ristournes de primes, etc.

La suite des niveaux critiques d_t fixera la «politique de participation» de l'assureur.

Dès lors la règle de décision fin d'exercice sera:

- ou bien le montant du fonds monétaire atteint le niveau d_t; dans ce cas l'assureur prélève d_t et le solde final constitue la valeur x de la réserve pour l'exercice suivant.
- ou bien le montant du fonds monétaire n'atteint pas d_t; l'assureur convient de mettre fin au jeu et de revoir éventuellement son comportement c'est-à-dire les politiques qu'ils a admises avant de reprendre le suivant.

Les règles d'isomorphisme $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ identifient le jeu réel au jeu sur le graphe et la structure des opérations de risque est ainsi mise en lumière.

D. Considérations finales

L'assureur subit le jeu qu'il accepte, aux conditions qu'il fixe par ses méthodes de tarification et de participation. Par une théorie opérationnelle, il faut pouvoir prévoir l'avenir et s'adapter à la réalité. En développant la théorie précédente, nous avons eu un double objectif:

1° définir un algorithme général susceptible d'être mis sur ordinateur
2° permettre de tenir compte de tous les facteurs d'action.

En fait, nous n'avons pas établi une théorie mathématique compliquée mais bien un ensemble de règles automatiques, tout à fait générales qui permettent de calculer effectivement l'évolution du jeu, dès que les «politiques» ont été fixées. Changer ces «politiques» ne modifie en rien la méthode de calcul, mais elles changeront automatiquement la valeur de la suite des variables, qui définiront les résultats probables de l'assureur.

Dans notre conception d'une théorie opérationnelle du risque, toutes les «politiques» imaginables constituent des «facteurs d'entrée» qui transformées par l'algorithme général (de structure) donnent comme «résultats de sortie» des suites correspondantes de variables aléatoires des résultats.

On pourrait croire que le but principal de la théorie opérationnelle est de définir les «politiques» qui sont «admissibles» sur le plan commercial. C'est là certes un objectif très important. Mais une limitation de ce genre ne se justifie pas, car nous démontrerons dans une prochaine note que des problèmes importants de la théorie du risque correspondent précisément à des «politiques» qu'un assureur ne peut offrir à un assuré.

Zusammenfassung

Die erste Abhandlung des Autors über diesen Gegenstand erschien im Herbstheft 1965 der «Mitteilungen». Der vorliegende zweite Teil vermittelt Angaben über die allgemeine Struktur der Risikoprobleme. Dazu wird ein Isomorphismus zwischen den Versicherungsoperationen und einem stochastischen Spiel hergestellt.

Summary

The Author's first note on this subject was published in this Bulletin of October 1965. This second paper aims to disclose the common structure of risk problems. The means used are the establishment of an isomorphism between insurance operations and a stocastic game.

Riassunto

L'Autore da seguito ad una sua prima nota pubblicata in questo Bollettino dell'Ottobre 1965. Questo secondo lavoro vuole rivelare la struttura comune ai problemi sul rischio. Il risultato è ottenuto mediante un isomorfismo fra le operazioni assicurative ed un giuoco stocastico.