

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	67 (1967)
<b>Artikel:</b>	Charakteristische Funktionen : Idee und neuere Entwicklungen
<b>Autor:</b>	Berghoff, W.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-966946">https://doi.org/10.5169/seals-966946</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Charakteristische Funktionen

## Idee und neuere Entwicklungen

*Von W. Berghoff, Zürich*

### Zusammenfassung

Im ersten Teil werden verschiedene Integraltransformationen einschliesslich der charakteristischen Funktion eingeführt, der Zusammenhang der letztern mit der Fourierreihe skizziert und die Beziehungen zu der Potenz- und Laurentreihe angedeutet. Es folgen Bemerkungen über die Konvergenz und eine Anzahl Anwendungsbeispiele. Der zweite Teil erklärt kurz die Produktzerlegung der charakteristischen Funktion, streift das Problem der unzerlegbaren und der unbegrenzt zerlegbaren Verteilungen und gibt abschliessend ein Beispiel für die ausserordentliche Leistungsfähigkeit der charakteristischen Funktion bei der Lösung statistischer Probleme.

### 1. Einleitung

Immer häufiger werden in der reinen und angewandten Mathematik gewisse Integraloperatoren zur rationellen und oft eleganten Lösung verschiedenster Aufgaben herangezogen. Dies gilt besonders auch für die Gebiete der mathematischen Statistik und der Versicherungsmathematik, sofern sich die letztere auf die Kollektivrisikotheorie stützt.

Vom Standpunkt des Praktikers aus gesehen, handelt es sich hier um mathematische Spezialgebiete, deren Zugang nur mit einem Aufwand gewonnen wird. Das bewog den Verfasser, den im Zürcher Kolloquium der Versicherungsmathematiker gehaltenen Vortrag in den «Mitteilungen» zu publizieren und damit einem weiten Kreis zugänglich zu machen.

### 2. Integraloperatoren und charakteristische Funktion

In der Theorie der Verteilungsfunktionen ist es oft von Vorteil, statt dieser Funktionen selbst, gewisse Integraltransformationen [2]<sup>1)</sup>, sogenannte Erwartungswerte von der Form

<sup>1)</sup> [ ] siehe Literaturverzeichnis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) dF(x)$$

zu betrachten.

Der Kern  $K(t, x)$  hat im allgemeinen eine der Formen, wenn  $t$  ganz-zahlig und positiv ist

$$K(t, x) = \frac{x^t}{t!} \frac{(x-t)!}{(x-t)^t}$$

und für kontinuierliches  $t$

$$K(t, x) = \frac{e^{tx}}{t^t} e^{itx}.$$

Das erste Beispiel mit dem Kern  $x^t$  ergibt die wohlbekannte Darstellung der Momente, während die Form mit dem Kern  $e^{itx}$  *charakteristische Funktion* [5] genannt wird ( $i^2 = -1$ ,  $x$  und  $t$  reell).

Die allgemeinste Kerndarstellung mit der  $e$ -Funktion ergibt sich, wenn der Exponent des Kerns  $e^{itx}$  auf beliebige komplexe Werte erweitert wird. Damit gelangt man zum Kern  $e^{st}$  der Laplace-Transformation mit  $s = x + iy$ . Wird der Realteil von  $s$  Null gesetzt, so folgt erneut der Kern

$e^{iyt}$  der Fourier-Transformierten oder charakteristischen Funktion.

Seine Zerlegung in die Winkelfunktionen

$$e^{iyt} = \cos y t + i \sin y t$$

liefert ferner für verschwindenden Real- bzw. Imaginärteil

$\sin y t$  den Kern der Sinustransformierten und  
 $\cos y t$  denjenigen der Cosinustransformierten.

Dass auch die beiden letztgenannten Transformationen nicht nur theoretischen Wert besitzen, folgt schon daraus, dass charakteristische Funktionen symmetrischer Verteilungen immer in eine cos-Transformierte

ausarten. Je nach Art der zu bearbeitenden Verteilungsfunktionen wird deshalb mit Vorteil die eine oder andere dieser Transformierten gewählt.

Alle vier Transformationen besitzen dieselbe wichtige Eigenschaft. Sie ermöglichen eine ein-eindeutige Abbildung in einen Bildraum, in dem gewisse transzendenten Operationen algebraisiert werden. Es sei deshalb erlaubt, je nach Eignung einmal die eine und einmal die andere zu verwenden.

Die anschaulichsten Darstellungen liefert die Laplace-Transformation, da sie eine vollständige analytische Funktion darstellt, auf die die weittragenden Sätze der Funktionentheorie angewendet werden können. Auch erlaubt sie sehr anschauliche Darstellungen auf der Gauss'schen Ebene, weshalb wir uns im ersten Teil dieser Publikation, wo es um das Sichtbarmachen der Grundidee geht, hauptsächlich auf sie stützen werden, Sie hat aber auch Mängel. Ihre Konvergenz ist oft erst gesichert, wenn das Intervall von  $-\infty$  bis  $\infty$  auf 0 bis  $\infty$  oder noch mehr eingeschränkt wird.

In ihr enthalten ist die Fourier-Transformation, deren absolute Konvergenz für Verteilungsfunktionen ausnahmslos gesichert ist, denn es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| |dF(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} |dF(x)| = 1$$

weil  $e^{itx}$  den Vektor auf dem Einheitskreis, und das letzte Integral die immer auf die Einheit normierte Verteilungsfunktion bedeuten.

### 3. Charakteristische Funktion und Fourier-Reihe

Einen ersten Einblick in das Fourier-Integral gewinnt man, wenn von der Darstellung einer Funktion als Fourier-Reihe ausgegangen wird [4]. Der Ansatz der Fourier-Reihe lautet

$$f(x) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v x + b_v \sin v x).$$

Obwohl die Glieder dieser Reihe transzendenten Funktionen sind, lassen sich erstaunlich vielgestaltige, auch nicht transzendenten Funktionen durch sie darstellen. Als einfache Beispiele seien erwähnt

die Gerade  $f(x) = x$  mit dem Bild

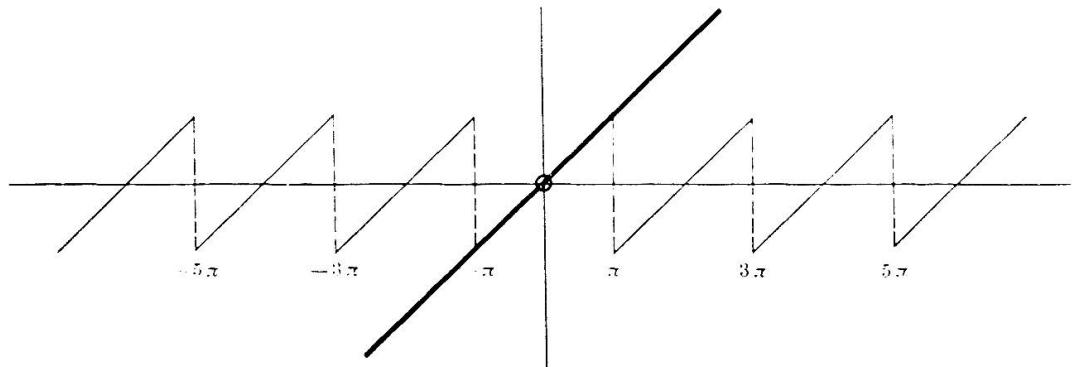


Fig. 1

und die Darstellung einer Konstanten

$f(x) = c$  für ein bestimmtes Intervall.

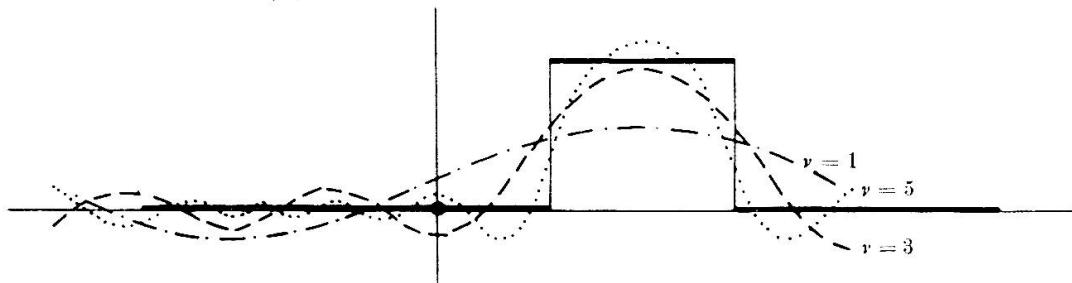


Fig. 2

Entsprechend der Periodizität von  $\sin$  und  $\cos$  sind diese Darstellungen im allgemeinen periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Darum ergab sich für  $f(x) = x$  das Bild einer periodischen Funktion.

An der Darstellung der Konstanten  $f(x) = c$  lässt sich sehr schön zeigen, wie die schrittweise Annäherung durch eine Überlagerung von Sinusschwingungen zustande kommt (Fig. 2).

Eine erste Erweiterung der Fourier-Reihe wird durch die Substitution  $x = \frac{l}{2\pi} y$  erreicht. Das erweitert das Periodizitätsintervall von  $2\pi$  auf ein beliebiges Intervall  $l$ . Für grosse  $l$  reduziert sich dadurch unsere Darstellung auf die eine, fest ausgezogene Gerade (Fig. 1).

Werden für die Koeffizienten  $a_\nu$  und  $b_\nu$  ihre Bestimmungsintegrale in die Fourier-Reihe eingesetzt

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \nu t \cdot \cos \nu x \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \nu t \cdot \sin \nu x \, dt$$

und der Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  vollzogen, so resultiert das sogenannte Fouriersche Integraltheorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos a(x-t) dt da$$

oder etwas umgeschrieben

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ax da \int_0^\infty f(t) \cos at dt.$$

Die Integrale  $\int f(t) \cos vt \cos vx dt + \int f(t) \sin vt \sin vx dt$  reduzieren sich nach dem Cosinus-Additionstheorem auf das Integral  $\int f(t) \cos a(x-t) dt$  und die Summe  $\sum_{v=1}^{\infty}$  geht in das äussere Integral  $\int da$  über.

Aus dieser Darstellung der Cosinustransformierten wird eine der wichtigsten Eigenschaften unserer Transformationen, ihre Umkehrbarkeit klar erkennbar.

Ausgehend von der  
Originalfunktion

ergibt sich vermittels des Cosinusoperators  
die Bildfunktion

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos at f(t) dt = \varphi(a)} & \\ & \downarrow & \\ f(x) & \xleftarrow{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos ax \varphi(a) da} & \end{array}$$

wieder die Original-  
funktion.

und daraus, wenn nochmals die Cosinus-  
transformation angewendet wird

Praktisch werden die Integrationen in den meisten Fällen nicht durchgeführt. Entweder benutzt man Tabellen, in denen Original- und Bildfunktionen einander gegenübergestellt sind, oder es werden eine Anzahl Sätze verwendet wie etwa der

Ähnlichkeitssatz,  
Verschiebungssatz,  
Dämpfungssatz,  
Integrations- oder  
Differentiationsatz,

mit deren Hilfe direkt an der Bildfunktion abgelesen werden kann, welche Veränderungen die Originalfunktion erfährt und umgekehrt.

#### 4. Laplace-Transformation, Potenz- und Laurentreihe

Eine etwas einfachere, dafür weniger tiefgreifende aber um so anschaulichere Einführung, diesmal der Laplace-Transformierten, gibt Doetsch in seinem dreibändigen Handbuch [1].

Er geht aus von der Darstellung einer Funktion als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$$

und verallgemeinert diese Entwicklung indem er den ganzzahligen Exponenten  $r$  durch eine beliebige aufsteigende Reihe nicht negativer Zahlen  $\lambda_r$  ersetzt. Der Faktor  $z^{\lambda_r}$  wird im allgemeinen vieldeutig sein, weil die  $\lambda_r$  gebrochene Zahlen sind. Um diese Vieldeutigkeit zu beseitigen, denkt man sich am besten die Reihenglieder auf der unendlich vielblätterigen Riemannschen Fläche des Logarithmus aufgetragen. Die Transformation  $z = e^{-s}$  bildet die Glieder dieser Reihe auf eine rechte Halbebene ab. Das Resultat ist die Reihe von Dirichlet

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}.$$

Von hier aus ist es nur noch ein kleiner Schritt, die diskreten  $\lambda_r$ -Werte durch eine kontinuierliche Variable  $t$ , die  $a_r$  durch eine kontinuierliche Funktion  $f(t)$  und die Summation durch ein Integral zu ersetzen, womit man zur Laplace-Transformierten

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{gelangt ist.}$$

Eine dritte Möglichkeit der Einführung des Laplace-Integrals geht aus von der Laurententwicklung einer Funktion

$$f(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r z^r$$

und endet mit der Einführung des zweiseitigen Laplace-Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

### 5. Konvergenzverhältnisse

Sollen alle diese Betrachtungen mathematisch fundiert sein, so ist es unumgänglich, einige Bemerkungen über die Konvergenzverhältnisse dieser Darstellungen zu machen.

Potenzreihen konvergieren immer absolut und gleichmässig innerhalb eines Kreises. Ausserhalb des Kreises sind sie immer divergent. Auf dem Konvergenzkreis hat es im allgemeinen Punkte von beiden Arten.

Beim Laplace-Integral sind die Konvergenzverhältnisse viel komplizierter, denn das uneigentliche Integral über

$$e^{-s} = e^{-x} e^{-iy}$$

konvergiert offenbar nur für  $x > 0$ , d.h., bezogen auf die Gauss'sche Ebene, in einer rechten Halbebene. Dabei braucht die Grenze für absolute und bedingte Konvergenz nicht zusammenzufallen. Ja es kommt sogar vor, dass Funktionen über die Grenze der bedingten Konvergenz hinaus bis zu einer dritten Grenze analytisch fortgesetzt werden können.

analytisch fortsetz-  
bares Gebiet

$\gamma$

bedingte  
Konvergenz

$\beta$

absolute  
Konvergenz

$\alpha$

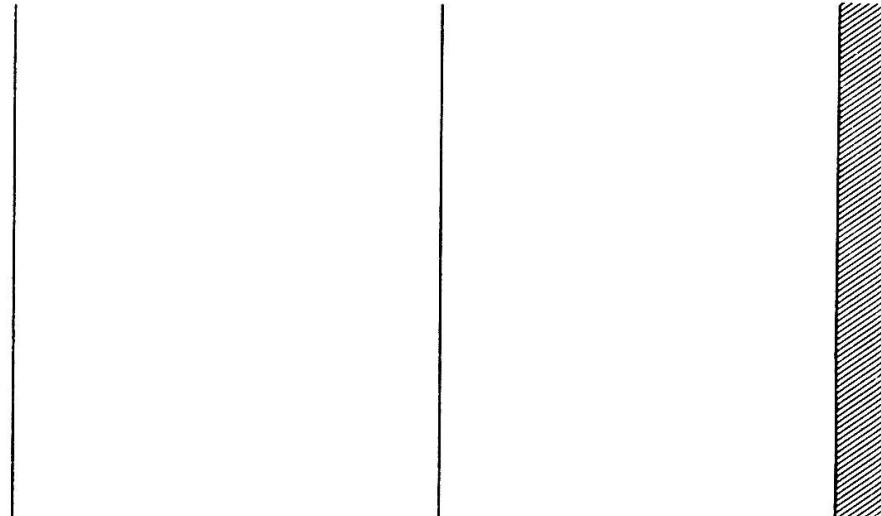


Fig. 3

Bei der Potenzreihe kann es auf dem Konvergenzkreis konvergente und divergente Punkte haben. Konvergiert jedoch beim Laplace-Integral auch nur ein Punkt auf dem Rande absoluter Konvergenz  $a$ , so konvergiert es absolut auf der abgeschlossenen Halbebene, d. h. also mit Einschluss des Randes  $a$ . Das gleiche gilt jedoch nicht für die bedingte Konvergenz. Hier verhält sich die Laplace-Transformation wieder wie die Potenzreihe.

Genauer: Das Gebiet absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine offene oder abgeschlossene Halbebene, zu der der Rand  $a$  ganz oder gar nicht gehört. Zum Gebiet bedingter Konvergenz gehört  $\beta$  ganz, teilweise oder gar nicht.

Das hat vor allem seine Bedeutung für die Auswertung des Umkehrintegrals. Das Umkehrintegral, mit dem aus der Bildfunktion wieder die Originalfunktion gewonnen wird, hat die Form

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{ts} f(s) ds.$$

Entsprechend den Konvergenzbetrachtungen erfolgt seine Auswertung längs einer Senkrechten zur reellen Achse. Konvergiert die Umkehrfunktion beispielsweise längs der ganzen imaginären Achse mit Ausnahme des Nullpunktes, so kann die Konvergenz auch im Ursprung durch eine halbkreisförmige Deformation des Integrationsweges wieder hergestellt werden, da ja dadurch der Wert des Cauchy-Integrales nicht ändert (Fig. 4).

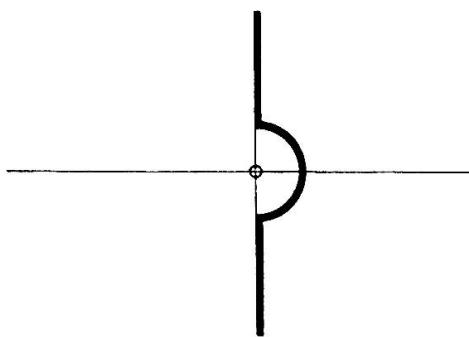


Fig. 4

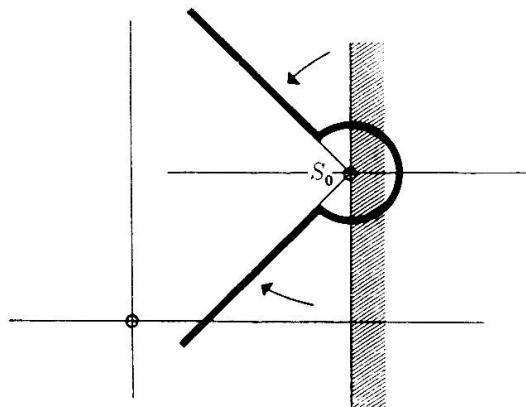


Fig. 5

Die Methode der Deformation des Integrationsweges wird ganz allgemein verwendet zur Verbesserung der Konvergenzverhältnisse. Wird

nämlich die Vertikale durch irgendeinen Punkt  $s_0$  beidseitig nach links abgebogen, so steigert sich die Konvergenz des Umkehrintegrals wegen des Faktors  $e^{st}$  sehr rasch (Fig. 5). Auch können oft mittels der Methode der Integrationswegdeformation Umkehrintegrale mit abzählbar vielen Polen beliebiger Ordnung ausgewertet werden (Fig. 6). Es ist einfach schrittweise ein Pol nach dem andern mittels seiner Laurententwicklung in die Rechnung einzubeziehen [6].

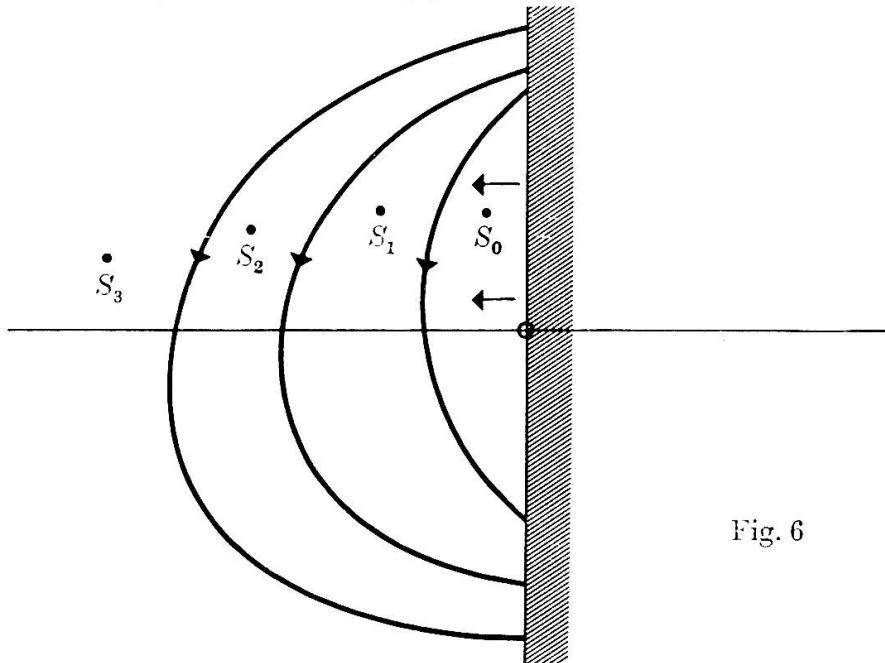


Fig. 6

Diese wenigen Bemerkungen mögen genügen, um einen gewissen Einblick in die meistens als lästig empfundenen, für die Lösung bestimmter Probleme jedoch hochwichtigen und oft entscheidenden Betrachtungen über die Konvergenz zu gewinnen, und es soll nun anhand einiger Beispiele der praktische Wert der Transformationen demonstriert werden.

## 6. Anwendungsbeispiele

An erster Stelle ist das wohlbekannte Faltungsintegral zu nennen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der mathematischen Statistik treten sehr oft Integrale von der Form

$$\int f(x) g(t-x) dx$$

auf. Je nach der Beschaffenheit der Funktionen  $f$  und  $g$  sind solche Ausdrücke oft nur sehr schwer oder überhaupt nicht integrierbar. In vielen

dieser Fälle leisten dann die behandelten Transformationen scheinbar fast mühelos Erstaunliches, verwandelt sich doch die transzendenten Operation der Faltung in ihrem Bildraum in eine ganz gewöhnliche Multiplikation. Am besten ist das einzusehen, wenn man mit der Betrachtung von hinten, das heisst mit der *Multiplikation* im Bildraum anfängt. Die *L*-Transformierte der Funktion  $f(t)$  mal der *L*-Transformierten von  $g(t')$

$$\int e^{-st} f(t) dt \cdot \int e^{-st'} g(t') dt'$$

ist (absolute und gleichmässige Konvergenz vorausgesetzt) gleich dem Doppelintegral

$$\int \int e^{-s(t+t')} f(t) g(t') dt dt'.$$

Wird  $t + t' = \tau$  gesetzt, so folgt

$$\int \int e^{-s\tau} f(t) g(\tau-t) dt d\tau$$

was wegen der Konvergenzvoraussetzungen auch

$$\int e^{-s\tau} \left[ \int f(t) g(\tau-t) dt \right] d\tau$$

geschrieben werden kann.

Die Verwandlung der Faltung im Bildraum in eine gewöhnliche Multiplikation ist also keine Wunderalgebra, die durch die Verwendung des Komplexen oder durch die Verwendung uneigentlicher Integrale mit den Grenzen  $\infty$  zustande kommt, sondern ein rein zufälliges Sonderergebnis der elementaren Rechengesetze. Durch die Substitution  $t + t' = \tau$ , welche die Faltung erzeugt, wird auch der Exponent des Kerns  $e^{-s\tau}$  unverändert erhalten, und bei der Funktion  $g(t')$  entsteht gerade die für die Faltung notwendige Substitution  $g(\tau - t)$ . Theoretisch wäre es möglich, statt der Basis  $e$  eine beliebige Basis zu verwenden. Praktisch zeigt sich aber rasch, dass nur  $e$  rationell zum Ziel führt.

Andere Kerne kommen nicht in Frage, da nur die vier eingangs erwähnten bei der Faltung die Eigenschaft der Unverändertheit aufweisen. Wird der Kern überhaupt weggelassen, so resultiert ein Doppelintegral, statt des einfachen Integrals. Die Verwendung des Komplexen verbessert die Konvergenzverhältnisse und erlaubt die Verwendung der

sehr weittragenden Gesetze der Funktionentheorie im Bildraum. Die Verwendung uneigentlicher Integrale mit der Grenze  $\infty$  hat neben anderem den Vorteil, dass die Bildfunktionen einfach werden. So hat zum Beispiel

die Bildfunktion  
der Einheitssprung im Nullpunkt, d.h. die Konstante  $\frac{1}{s}$

die  $e$ -Funktion  $e^{at}$   $\frac{1}{s-a}$

und

die Potenz  $t^a$   $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

was einmal mehr auf die Frage führt, ob aus dieser Abbildung, in der die Konstante, die  $e$ -Funktion und die Potenz durch so ähnliche Ausdrücke dargestellt sind, nicht noch mehr herauszuholen wäre.

Weitere sehr interessante Verwendungsmöglichkeiten für die  $L$ -Transformierte sollen an ein paar einfachen Beispielen illustriert werden.

Die vier nicht sehr leicht zu überblickenden elliptischen  $\vartheta$ -Funktionen haben als  $L$ -Transformierte elementare hyperbolische Funktionen. Daraus lassen sich Faltungsrelationen herleiten, die auf andere Weise nur schwer zu finden sind. So ist zum Beispiel, um nur die einfachsten zu nennen

$$\vartheta_2(o, t)^* \vartheta_3(o, t) = 1 \quad \text{oder}$$

$$\vartheta_3(o, t)^{*2} - \vartheta_0(o, t)^{*2} = 1.$$

Statt die Faltungsintegrale anzuschreiben, ist es üblich, sie durch einen Stern anzudeuten. Der Exponent  $*2$  bedeutet, dass die Funktion mit sich selbst zu falten ist.

Mit Hilfe der  $L$ -Transformierten können auch Lösungen von Differentialgleichungen gefunden werden.

Ein ganz einfaches Beispiel sei folgendes:

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y'(t) + c Y(t) = F(t)$$

hat im Bildraum die Form

$$s \cdot y(s) - Y_0 + c y(s) = f(s)$$

Funktionen im Originalraum sind mit grossen, im Bildraum mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Die Ableitung ist verschwunden, da  $Y'(t)$  nach dem Differentiationssatz im Bildraum übergeht in den Ausdruck

$$s y(s) - Y_0,$$

wobei  $Y_0$  eine Konstante, den Anfangswert von  $Y(t)$  bedeutet.

Elementare Algebra ergibt nun im Bildraum die Lösung

$$y(s) = f(s) \frac{1}{s + c} + Y_0 \frac{1}{s + c}$$

Die Rücktransformation in den Originalraum, die anhand einer Tabelle gefunden werden kann, lautet

$$Y(t) = F(t) * e^{-ct} + Y_0 e^{-ct}$$

Das erstaunlichste am Ganzen ist, wie sich das Anfangswertproblem durch den Differentiationssatz sozusagen von selber erledigt.

Zum Schluss soll noch eine Integralgleichung Erwähnung finden, die mit Hilfe der  $L$ -Transformation eine elegante Lösung findet.

Die in der Erneuerungstheorie auftretende Volterrasche Integralgleichung zweiter Art

$$F(t) = G(t) + \int_0^t K(t-\tau) F(\tau) d\tau$$

hat im Bildraum die einfache Form

$$f(s) = g(s) + k(s) \cdot f(s)$$

Daraus errechnet sich die Lösungsgleichung

$$f(s) = \frac{g(s)}{1 - k(s)}.$$

Nun ist zuerst zu überlegen, ob die rechte Seite der Gleichung überhaupt eine  $L$ -Transformierte darstellt. In der Form

$$f(s) = g(s) \cdot \frac{1}{1 - k(s)}$$

bedeutet nach unserer Faltungsalgebra die Multiplikation eine Faltung. Ihr würde demnach eine Operation im Originalraum entsprechen.

Weiter kann der Faktor  $\frac{1}{1-k(s)}$  als geometrische Reihe geschrieben werden

$$1 + k(s) + k^2(s) + \dots$$

Auch diese findet eine Darstellung im Originalraum, da die Addition in beiden Räumen unverändert erhalten bleibt und die Potenzen wiederholte Faltungen darstellen. Einzig das erste Glied 1 ist aus verschiedenen Gründen keine  $L$ -Transformierte. Diesem Mangel wird miteinem Kunstgriff abgeholfen. Wird nämlich die Bildgleichung erweitert auf

$$f(s) = g(s) + \frac{k(s)}{1-k(s)} \cdot g(s),$$

so lautet die geometrische Reihe

$$k(s) + k^2(s) + \dots$$

und ist damit im Originalraum darstellbar. Nach unserer Faltungs-algebra muss demnach die Lösung im Originalraum lauten

$$F(t) = G(t) + \left\{ K(t) + \sum_{v=2}^{\infty} K(t)^{*v} \right\} * G(t)$$

Die Sache sieht sehr einfach aus. Denkt man sich aber dazu die Konvergenzuntersuchungen, von denen bereits eine Andeutung gemacht wurde und dann vor allem die tatsächliche Rücktransformation der Bildgleichung, die rasch sehr umfangreich wird, dann ist die Wunder-algebra wieder auf das richtige Mass zurückgeführt.

## 7. Faktorenzerlegung

Dem Titel dieser Arbeit folgend soll nun von einigen neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der charakteristischen Funktionen die Rede sein.

Als erstes ist das Problem der Faktorenzerlegung zu nennen [2].

Der Faltungssatz hat gezeigt, dass das Produkt zweier charakte-ristischer Funktionen immer wieder eine charakteristische Funktion er-

gibt. Es *gibt* also charakteristische Funktionen, die in Faktoren zerlegt werden können.

Ferner kann jede charakteristische Funktion  $f(t)$  als Produkt von zwei charakteristischen Funktionen

$$f_1(t) = e^{int} \text{ und } f_2(t) = f(t) e^{-int}$$

geschrieben werden.

Diese Zerlegung von  $f(t)$ , bei der einer der Faktoren  $e^{int}$  ist, wird eine triviale Zerlegung genannt. Um triviale Produktzerlegungen auszuschliessen, ist folgende Festsetzung getroffen worden:

Eine charakteristische Funktion wird zerlegbar genannt, wenn sie in der Form

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$$

geschrieben werden kann, bei der keiner der Faktoren  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  nur aus dem ausgearteten Glied  $e^{int}$  besteht.

$f_1(t)$  und  $f_2(t)$  sind dann Faktoren von  $f(t)$ . Eine charakteristische Funktion dagegen, die nur triviale Zerlegungen zulässt, heisst unzerlegbar.

Der Vollständigkeit halber ist noch zu zeigen, dass es auch unzerlegbare Funktionen gibt.

Das einfachste Beispiel ist eine diskrete Verteilung mit zwei Unstetigkeiten.

Bei diskreten Verteilungen besteht für die Anzahl der Sprünge die einfache Abschätzung

$$m + n - 1 \leq N \leq n \cdot m$$

$N$  ist die Anzahl der Unstetigkeiten der Gesamtverteilung  $F(x)$

$m$  diejenige von  $F_1(x)$

$n$  diejenige von  $F_2(x)$

Soll die Zerlegung nicht trivial sein, so müssen  $m$  und  $n$  mindestens je 2 sein. Dazu ist nach Voraussetzung  $N = 2$ . Werden diese Werte in obige Ungleichung eingesetzt so folgt

$$2 + 2 - 1 = 3 \leq 2$$

was unmöglich ist. Einer der Faktoren  $m$  und  $n$  muss also 1 sein, was heisst, dass unsere Verteilung mit 2 Sprüngen nur eine triviale Zerlegung zulässt, also unzerlegbar ist.

Die Produktzerlegung der charakteristischen Funktionen hat gewisse Parallelen mit der Zerlegung von Zahlen in Primfaktoren. Diese Verwandtschaft geht aber nicht sehr weit, ist doch schon die eindeutige Zerlegbarkeit, eine fundamentale Eigenschaft der ganzen Zahlen, bei unserer Zerlegung nicht gewährleistet. So kann

$$f(t) = \frac{1}{6} (1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it})$$

in die beiden Faktoren

$$f_1(t) = \frac{1}{3} (1 + e^{2it} + e^{4it}) \quad \text{und}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{it})$$

zerlegt werden. Gleichzeitig gilt aber auch

$$g_1(t) = \frac{1}{3} (1 + e^{it} + e^{2it}) \quad \text{und}$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{3it})$$

was durch ausmultiplizieren leicht verifiziert werden kann.

## 8. Unzerlegbare und unbegrenzt zerlegbare Funktionen

Im Hinblick auf die Teilbarkeit ist wohl die wichtigste Klasse der charakteristischen Funktionen diejenige der unbegrenzt teilbaren Funktionen. Sie haben offenbar die Form

$$f(t) = [f_n(t)]^n;$$

$f_n(t)$  ist einzig durch die Funktion  $f(t)$  bestimmt und hat die Form

$$f_n(t) = \sqrt[n]{f(t)},$$

wobei der Hauptzweig der Wurzel zu nehmen ist.

Beispiele für solche Funktionen sind die Normalverteilung

$$f(t) = \exp \left\{ iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}$$

bei der

$$f_n(t) = \exp \left\{ \frac{i\mu t}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} \right\} \text{ ist,}$$

die Poissonverteilung mit

$$f(t) = \exp \{ \lambda(e^{it} - 1) \} \quad \text{und}$$

$$f_n(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{n} (e^{it} - 1) \right\}$$

und die Gammaverteilung mit

$$f(t) = [1 - (it/\theta)]^{-\lambda} \quad \text{und}$$

$$f_n(t) = [1 - (it/\theta)]^{-\frac{\lambda}{n}}$$

De Finetti ist es gelungen, ein notwendiges und hinreichendes Theorem aufzustellen [2], von welcher Form eine unbegrenzt teilbare charakteristische Funktion sein muss. Es lautet

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \{ p_m [g_m(t) - 1] \}$$

Die  $p_m$  sind natürliche Zahlen und die  $g_m(t)$  sind charakteristische Funktionen.

## 9. Theorem von Linnik

Zum Schluss sei noch an einem Beispiel kurz skizziert, was die Be- trachtung der Eigenschaften der charakteristischen Funktionen im Bildraum für das Auffinden der Eigenschaften der Verteilungsfunk- tionen im Originalraum zu leisten vermag.

Vor einigen Jahren hat Yu. V. Linnik [8], ein Russe, folgendes sehr allgemeine und tiefliegende Theorem bewiesen:

Gegeben sind

### 1. 2 Linearformen

$$L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_r X_r \quad \text{und}$$

$$L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_r X_r$$

mit den unabhängigen und identisch verteilten stochastischen Variablen  $X_1, \dots, X_r$  und der gemeinsamen Verteilungsfunktion  $F(x)$

2. eine Bestimmungsfunktion

$$G(z) = |a_1|^z + \dots + |a_r|^z - |b_1|^z - \dots - |b_r|^z$$

$G(z)$  ist eine ganze Funktion der komplexen Variablen  $z$ .

3. Ferner sei

$$\max(|a_1|, \dots, |a_r|) \neq \max(|b_1|, \dots, |b_r|) \text{ und}$$

4.  $\gamma$  die grösste reelle Nullstelle von  $G(z)$ .

5. Hat dann  $F(x)$  Momente bis zur Ordnung 2  $m$

$$\text{mit } m = \left[ \frac{\gamma}{2} + 1 \right]$$

6. so ist  $F(x)$  eine *Normalverteilung*.

Die Grundidee des Beweises ist, etwas summarisch, die folgende:

Die Voraussetzung, die stochastischen Variablen  $X_1, \dots, X_r$  seien unabhängig und identisch verteilt, erlaubt für die charakteristischen Funktionen den Ansatz

$$f(a_1 u) f(a_2 u) \dots f(a_r u) = f(b_1 u) f(b_2 u) \dots f(b_r u)$$

Zu diesen Funktionen werden Majoranten gebildet und nachgewiesen, dass innerhalb eines horizontalen und eines vertikalen Streifens die Anzahl der Pole endlich bleibt und die Ordnung der Pole eine feste obere Grenze nicht übersteigt. Die Umgebung des Ursprungs verlangt noch eine besondere Betrachtung.

In einem nächsten Schritt wird das Rücktransformations-Integral der Bildfunktion herangezogen, aus dessen funktionentheoretischen Eigenschaften die Abschätzungen mittels Residuenrechnung schrittweise verschärft werden. Auch gelingt es, das aus dem Schnitt des horizontalen und vertikalen Streifens gebildete Rechteck mit Hilfe der Eigenschaften des Cauchy-Integrals weiter einzuschränken. Gleichzeitig werden die Anzahl und die Ordnung der Pole herabgesetzt.

Das Heranziehen der Voraussetzung über die Momente erlaubt schliesslich den Nachweis, dass  $f(u)$  von der Form

$$f(u) = \exp \{ B_1 u^{2m_1} + \dots + B_r u^{2m_r} \} \text{ sein muss.}$$

Ein Theorem von J. Marcinkiewicz [3], nachdem in einer charakteristischen Funktion von der Form  $\exp P(t)$  das Polynom  $P(t)$  höchstens vom 2ten Grade sein kann, beschliesst den Beweis, denn damit bleibt für  $F(x)$  als mögliche Funktion nur noch die Normalverteilung übrig.

Lukacs und Laha haben in ihren «Applications of characteristic functions» [3] eine Anzahl Sätze zum Beweis zusammengestellt und diesen damit zu skizzieren versucht. Die 91 Seiten umfassende englische Übersetzung der russischen Originalarbeit ist im Literaturverzeichnis unter [8] zu finden.

### Literaturverzeichnis

- [1] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, 3 Bände, Birkhäuser-Verlag, Basel 1956.
- [2] Lukacs, E.: Characteristic functions, no. 5 of Griffin's statistical monographs and courses, Charles Griffin & Company limited, London 1960.
- [3] Lukacs, E. and Laha R.G.: Applications of characteristic functions, no. 14 of Griffin's statistical monographs and courses, Charles Griffin and Company limited, London 1964.
- [4] Ostrowsky, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Band III, Birkhäuser-Verlag, Basel 1954.
- [5] van der Waerden, B.L.: Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin 1957.
- [6] Nevanlinna, R. und Paatero, U.: Einführung in die Funktionentheorie, Birkhäuser-Verlag, Basel 1965.
- [7] Berghoff, W.: Laplace-Transformation und K. Wettenschwilers spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 65. Band, Heft 1, 1965.
- [8] Linnik, Yu. V.: Linear forms and statistical criteria, Selected translations in mathematical statistics and probability, volume 3, American mathematical society, Providence, Rhode Island, 1962.

## Résumé

Dans la première partie l'auteur introduit diverses transformations intégrales au sein des fonctions caractéristiques, il donne un aperçu du lien qui unit celles-ci avec les séries de Fourier ainsi que de leurs rapports avec les séries de puissances et de Laurent. Des remarques sur la convergence ainsi que quelques exemples d'application sont ensuite donnés. La seconde partie traite sommairement de la décomposition en facteurs des fonctions caractéristiques, fait allusion au problème des fonctions non divisibles et de celles indéfiniment divisibles. Pour terminer, l'auteur donne un exemple qui illustre l'aide puissante que peut fournir la fonction caractéristique à la solution de problèmes de statistique.

## Summary

In the first part of his paper the author introduces various integral transformations within the characteristic functions, outlines the links between the latter and the Fourier series and points out their relations to the power and Laurent series. Then follow some notes on convergence and some examples of application. The second part deals briefly with the factorization problem of characteristic functions and refers to the problem of undivisible and infinitely divisible functions. Finally the author gives an example on the great efficiency of the characteristic functions while resolving statistical problems.

## Riassunto

Nella prima parte del suo lavoro, l'autore introduce diverse trasformazioni integrali fra le funzioni caratteristiche, fa cenno ai legami fra queste e le serie di Fourier e indica i rapporti con le serie di potenze e di Laurent. Seguono poi osservazioni sulla convergenza e qualche esempio di applicazione. La seconda parte tratta brevemente lo scomponimento in fattori delle funzioni caratteristiche ed il problema delle funzioni non divisibili o divisibili illimitatamente. Per concludere l'autore dà un esempio che illustra l'efficace aiuto che possono dare le funzioni caratteristiche nel risolvere problemi di statistica.

