

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	67 (1967)
<b>Artikel:</b>	Demographische Aspekte des Gastarbeiterproblems in mathematischer Formulierung
<b>Autor:</b>	Kaiser, Ernst
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-966945">https://doi.org/10.5169/seals-966945</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Demographische Aspekte des Gastarbeiterproblems in mathematischer Formulierung

*Von Ernst Kaiser, Bern*

Professor Dr. Walter Sacher zum 70. Geburtstag gewidmet

## Zusammenfassung

Die durch die Gastarbeiter verursachten grossen Wanderungsüberschüsse erfordern eine Ergänzung der herkömmlichen mathematischen Bevölkerungstheorie. In diesem Sinne werden in einem ersten Kapitel sowohl das direkte Problem der Bevölkerungsprognosen als auch das Umkehrproblem der Erneuerung überprüft, was zu verschiedenen Integralgleichungen der Wanderung führt, wovon deren zwei ein allgemeines und eine weitere ein vereinfachtes Bevölkerungsmodell betreffen. Dem zweiten Kapitel ist die Erörterung der Wanderungseinflüsse auf die Altersstruktur vorbehalten; hiezu wird eine Störungsfunktion definiert und deren Darstellung für eine relativ-stabile Bevölkerung gegeben.

## Einleitung

Dass die grosse Zahl der Gastarbeiter die demographische Struktur des Schweizervolkes verändert hat, braucht wohl nicht speziell gesagt zu werden. Gehören denn nicht z.B. von rund 3 Millionen Beitragspflichtigen der AHV gegenwärtig im Jahresdurchschnitt etwa deren 0,6 Millionen dem Bestand der «Kontrollpflichtigen ausländischen Arbeitskräfte» an, wie die amtliche Statistik sich ausdrückt. Das sind 3,5mal mehr als im Einführungsjahr 1948 der AHV. Die Wanderungsüberschüsse der vergangenen zwei Jahrzehnte waren demnach beträchtlich. Gerade diese Feststellung führt uns dazu, der *Berölderungstheorie unter Berücksichtigung der Wanderungseinflüsse* einige eher problem-aufdeckende als lösungssuchende Gedanken zu widmen. Die traditionelle Theorie begnügt sich nämlich – abgesehen von einigen Ausnahmen, wie z.B. in jüngerer Zeit W. Sacher [1]<sup>1</sup>, P. Thullen [3] und G. Wünsche [4] – mit der Hypothese, dass die Auswanderungen durch entsprechende

---

<sup>1</sup> Eckige Klammern: vgl. Literaturnachweis im Anhang.

Einwanderungen neutralisiert werden, und zwar auf jeder Altersstufe; diese Hypothese war über weite Zeitspannen auch wirklichkeitsnahe.

Bekanntlich ist ein wichtiger Sektor der Bevölkerungstheorie, nämlich die *Erneuerungstheorie*, besonders von namhaften Schweizer Mathematikern gefördert worden. Im wesentlichen beginnt die Forschungskette im Jahre 1926 mit *Christian Moser* und findet ihr Reifestadium etwa 30 Jahre später mit *Walter Sacher*, und zwar mit der meisterhaften Gesamtschau des Problemes in seinem Lehrbuch [1]: ein reichhaltiges Literaturverzeichnis stellt uns nicht weniger als 70 Autoren vor; vor allem aber wird hier die Erneuerungstheorie mit neuem Gedankengut durchdrungen, nicht zuletzt dank der Einführung stochastischer Aspekte.

Freuen wir uns, dass die nachstehenden Ausführungen zum eingangs erwähnten Problem der Wanderungseinflüsse auf die Bevölkerungsstruktur mit der Erneuerungstheorie eng verbunden sind und so dem Jubilar eine sinnvolle, wenn auch bescheidene Ehrung zugedacht werden kann. Die *Methodik* beruht vorwiegend in der Verwendung von Entwicklungsintensitäten, wobei das Problem konsequent unter Zuhilfenahme eines modifizierten Lexis-Schemas durchdacht wird. Das erste Kapitel handelt von Fragen der zeitlichen Entwicklung einer Bevölkerung und das zweite von deren Altersstruktur.

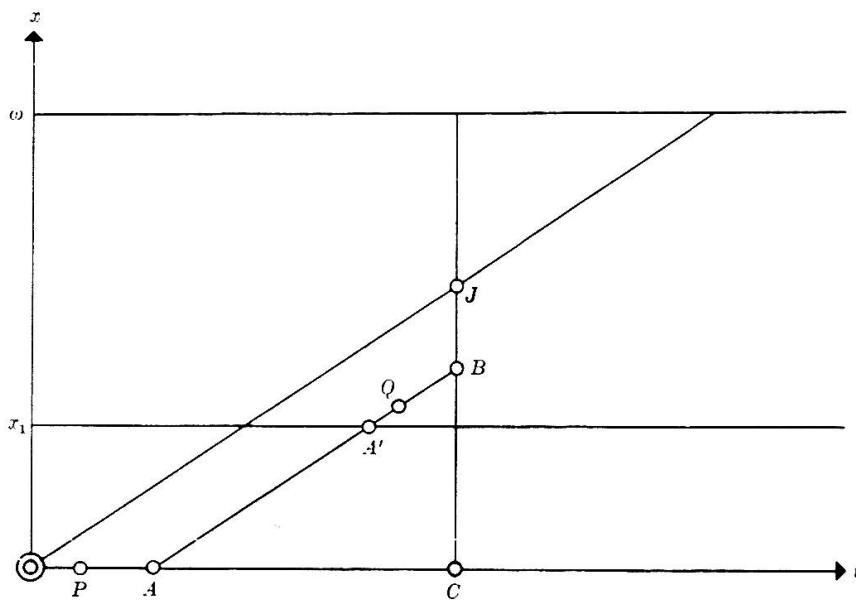
## I. Probleme der Bevölkerungsentwicklung

### 1. Entwicklungsmodelle

1.1. Die *Variablenebene* ist identisch mit dem bereits erwähnten Schema von Lexis, in welchem die *Zeit t* und das *Alter x* die beiden orthogonalen Koordinatenachsen liefern. Die Differenz der beiden Variablen definiert die *Geburtszeit z*, was zu folgender Gleichung der diagonalen Lebenslinien führt:

$$(1) \quad x = t - z, \quad \text{mit } z \geq 0,$$

wovon eine in nachstehender Zeichnung durch die Strecke AB dargestellt wird. Die Bedeutung der hervorgehobenen Punkte ergibt sich aus den beigegebenen Koordinatenpaaren. Die beiden Horizontalen  $x = 0$  und  $x = x_1$  können als *Erneuerungssachsen* bezeichnet werden (Geburten bzw. Zugang der Gastarbeiter im Mindestalter  $x_1$ ).



Koordinaten der eingezeichneten Punkte, d.h. Definition der nachstehend gebrauchten Bezeichnungsweise:

$$\begin{array}{llll} A(z, o) & A'(z', x_1) & B(t, x) & C(t, o) \\ P(\zeta, o) & Q(\xi; z) & J(t, x=t) . \end{array}$$

1.2. Die Geburtenzahl  $G$  hat einer bekannten Integralgleichung zu genügen. Es seien:

- $p(o, y; z)$  die generationsabhängige Wahrscheinlichkeit für ein neugeborenes Mädchen, das Alter  $y$  zu erreichen,
- $h(y, t)$  die Wahrscheinlichkeit für eine im Zeitpunkt  $t$  lebende  $y$ -jährige Frau, verheiratet zu sein,
- $f(y, t)$  die auf eine im Zeitpunkt  $t$  lebende  $y$ -jährige Ehefrau entfallende Anzahl aller Mädchengeburten ( $t$ -abhängige Fruchtbarkeit für Mädchengeburten).

Dermassen lautet die *Integralgleichung der Mädchengeburten* (meistens Integralgleichung der Bevölkerungstheorie genannt) wie folgt:

$$(2) \quad G(t) = \int_{z_1}^{z_2} G(z) p(o, y; z) h(y, t) f(y, t) dz,$$

wobei hier analog zu (1)  $y = t - z$  gilt;  $z_1$  und  $z_2$  entsprechen so den Fruchtbarkeitsgrenzen  $y_2$  und  $y_1$ . Die Lösung dieser homogenen

Gleichung 2. Art wurde unter vereinfachten Annahmen, welche auf Fredholm'sche Gleichungen führen, schon in vielen bemerkenswerten Abhandlungen erörtert, wobei als Kernfunktion das Produkt  $K = p h f$  auftritt. Die Lösungstechnik beruht in der Regel auf den Faltungskernen  $K(t-z)$ , welche jedoch in (2) erst dann erscheinen, wenn für  $p$  generationsunabhängige Sterbetafeln und für  $h$  und  $f$  Zeitunabhängigkeit vorausgesetzt werden können, Vereinfachungen, die bei Berücksichtigung der Gastarbeiterbestände sich kaum rechtfertigen lassen.

Der *Einfluss der Gastarbeiter* auf die erwähnten Zusammenhänge ist nämlich nicht unerheblich. Zunächst dürfte sich die *Einwirkung auf  $h$  und besonders auf  $f$*  statistisch nachweisen lassen, was in der numerischen Bestimmung dieser Funktion berücksichtigt werden kann. Noch wichtiger ist aber die Feststellung, dass die Geburtenzahl  $G(t)$  nicht nur den früheren Geburtenzahlen  $G(z)$  entstammt, sondern auch den erst später zugewanderten Ausländerinnen. Eigentlich müsste deshalb für diese *zweite Komponente von  $G(t)$*  eine spezielle Gleichung aufgestellt werden, in welcher im einfachsten Erneuerungsmodell  $G(z)$  durch  $N(z', y'_1)$  ersetzt wird (Ziff. 1.3.). Nun lässt sich statistisch belegen, dass die Geburten dieser zweiten Komponente zur Hauptsache nur kurzfristig in der Schweiz bleiben und deshalb einer Bevölkerungsprognose auf weite Sicht nicht einverlebt werden dürfen. Diese Bemerkung wird eine Vereinfachung der Integralgleichung der Wanderung gestatten (vgl. Ziff. 2.2.).

Ist einmal  $G$  bestimmt, so lassen sich daraus auch die *Knabengeburten* bestimmen, denn es besteht bekanntlich eine auffallende Konstanz im massgebenden Verhältnis «Knabengeburten:Mädchengeburten», welches immer nahe bei 1,05 liegt. Dann kann auch die hiernach verwendete *relative Veränderungsintensität  $\gamma$  der Geburten* definiert werden, indem gilt:

$$(2') \quad \gamma(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} .$$

1.3. *Bevölkerungsflächen  $L(t, x)$ .* Wir ordnen jedem Punkt  $t, x$  der Variablenebene eine Funktion  $L(t, x)$  zu, die im Zeitpunkt  $t$  die auf das Alter  $x$  entfallende Bevölkerungsdichte definiert. Die zu ermittelnde Fläche kann ausgehend von gewissen Anfangsbeständen auf den Erneuerungssachsen ausschliesslich durch *Entwicklungsintensitäten* bestimmt werden, und zwar durch das bereits eingeführte horizontal wirkende  $\gamma$  sowie durch:

$$(3) \quad \lambda(\xi; z) = -\mu(\xi; z) + \varphi(\xi; z)$$

$$(3') \quad \varphi(\xi; z) = \varepsilon(\xi; z) - \alpha(\xi; z),$$

worin die generationsabhängigen, diagonal wirkenden relativen Veränderungsintensitäten betreffend *Sterblichkeit* ( $\mu$ ), *Einwanderung* ( $\varepsilon$ ) und *Auswanderung* ( $\alpha$ ) vorkommen. Die demographische *Gesamtintensität*  $\lambda$  ist demnach additiv zerlegbar und ebenso ihre *Wanderungskomponente*  $\varphi$ , was der einschlägigen Theorie von Karup entspricht. All diese Funktionen mögen mindestens eine Ableitung besitzen. Die *Bestimmungsgleichungen der Fläche L* lauten dann:

$$(4) \quad \frac{L'(\zeta, o)}{L(\zeta, o)} = \gamma(\zeta),$$

$$(4') \quad \frac{L'(\xi; z)}{L(\xi; z)} = \lambda(\xi; z).$$

Die *allgemeine Lösungsfläche*  $L(t, x)$  ergibt sich aus diesem System von 2 linearen Differentialgleichungen durch 2 sukzessive Integrationen auf der Geburtenachse  $x = o$  und auf der diagonalen Lebenslinie  $z = \text{const}$ . Sofern für  $e^f$  die neuere Notation  $\exp f$  verwendet wird, nimmt die Flächengleichung folgende Gestalt an:

$$(5) \quad L(t, x) = L(z_o, 0) \exp \left[ \int_{z_0}^z \gamma(\zeta) d\zeta + \int_o^x \lambda(\xi; z) d\xi \right],$$

worin die Geburtenzahl  $G(z)$  implizit erscheint, nämlich durch:

$$(5') \quad G(z) = L(z_o, 0) \exp \int_{z_0}^z \gamma(\zeta) d\zeta.$$

Es handelt sich hier um einen sehr allgemeinen kausalen Zusammenhang, der sowohl der deterministischen als auch der stochastischen Betrachtungsweise zugrunde gelegt werden kann. Tatsächlich werden Einwanderungen und Auswanderungen auf allen Altersstufen betrachtet. Gemäss einer allgemeinen *Theorie zusammengesetzter Entwicklungsmodelle* lassen sich Zusammenhänge wie (5) nicht nur durch additive Zerlegung der Intensitäten, sondern auch durch additive Zerlegung der

Bestandesdifferenzen  $\Delta L$  darstellen. Dermassen ist es möglich, die absoluten Veränderungszahlen, wie z.B. die Einwanderungszahl  $E(\xi; z)$  und die Auswanderungszahl  $A(\xi; z)$  in die Gleichungen einzuführen, wovon wir unter Ziff. 2.2. hiernach Gebrauch machen werden.

Zum Auffinden nicht allzu komplizierter Lösungen der Erneuerungsprobleme kann noch folgende *vereinfachte Lösungsfläche*  $L(t, x)$  in Erwägung gezogen werden, bei welcher die Einwanderungen  $N(z')$  immer mit dem konstanten Alter  $x_1$  erfolgen, d.h. auf der Erneuerungsachse  $x = x_1$ . Aus  $N$  resultieren übrigens horizontal wirkende Veränderungsintensitäten  $v(z')$ , dies wie üblich mittels logarithmischer Ableitungen. Die angekündigte Gleichung der Lösungsfläche lautet nun:

$$(5'') \quad L(t, x) = G(z) \exp \left[ - \int_0^x \mu d\xi \right] + N(z') \exp \left[ - \int_{x_1}^x (\mu + \alpha) d\xi \right];$$

darin kommt auch zum Ausdruck, dass die Auswanderungen erst nach dem Alter  $x_1$  einsetzen. Im übrigen gilt  $z' = z - x_1$ . Für  $x < x_1$  verschwindet die zweite Komponente rechts.

Für beide Lösungsflächen, die allgemeine und die vereinfachte, können *relativ-stabile Entwicklungsmodelle* definiert werden. Hiefür nehmen wir an, dass die horizontal wirkenden Entwicklungsintensitäten  $\gamma$  und  $\nu$  konstant bleiben und überdies  $\lambda$  und seine Komponenten generationsunabhängig sind. In diesem Zusammenhang darf nochmals auf die Arbeiten Thullen's [3] verwiesen werden. Solche Modelle werden hier für die Erörterung des Problems der Altersstrukturen herangezogen (Ziff. 4 hiernach).

**1.4. Die Globalbevölkerung  $\bar{L}(t)$ .** Sind die Bevölkerungsflächen bestimmt, so ist es ein leichtes, die entsprechenden Globalbestände in einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  zu berechnen; es gilt nämlich

$$(6) \quad \bar{L}(t) = \int_0^\omega L(t, x) dx .$$

Selbstredend muss für  $L(t, x)$  einer der Ausdrücke (5), (5'') oder eine andere analoge Relation eingesetzt werden, womit erhellt, dass auch die Gesamtbevölkerung mittels der verschiedenen Entwicklungsintensitäten dargestellt werden kann. Unter Ziff. 4 hiernach werden wir insbesondere relativ-stationäre Modelle verwenden. An dieser

Stelle sei noch erwähnt, dass ausgehend von (6) auch die *Entwicklungsintensitäten der Gesamtbevölkerung* ermittelt werden können, und zwar immer gemäss dem gleichen Verfahren:

$$(6') \quad \bar{\lambda}(t) = \frac{\bar{L}'(t)}{\bar{L}(t)}.$$

Falls vom Zeitpunkt  $z_0 = t - \omega$  hinweg die Entwicklungsintensitäten des stabilen Modells wirken, ergibt sich unter Berücksichtigung des allgemeinen Modells (5) ohne weiteres:

$$(6'') \quad \bar{\lambda} = \gamma.$$

Damit wäre das *direkte Problem der Bevölkerungstheorie* andeutungsweise gelöst. Es besteht eben darin, aus gegebenen Erneuerungszahlen (Geburten und Einwanderungen) mit Hilfe aller demographischen Entwicklungsintensitäten den mutmasslichen künftigen Verlauf der Gesamtbevölkerung  $\bar{L}$  zu ermitteln und ebenso deren Umschichtungen nach Alter und Geschlecht; versteht es sich doch von selbst, dass solche Berechnungen für Männer und für Frauen getrennt durchgeführt werden müssen.

## 2. Umkehrprobleme

**2.1. Die Integralgleichung der Erneuerung** liefert das erste und zugleich klassische Umkehrproblem. Auf eine Landesbevölkerung angewandt, geht es darum, aus einem vorgegebenen Verlauf der Gesamtbevölkerung  $\bar{L}(t)$  und bei bekannten Sterblichkeits- und Wanderungsverhältnissen jene *unbekannte Geburtenzahl*  $G(z)$  zu finden, welche die Erhaltung des erwähnten Bestandes  $\bar{L}$  gewährleistet. Hiezu betrachten wir vorerst lediglich den nicht aus dem Anfangsbestand  $\bar{L}(0)$  stammenden Bevölkerungsteil  $B(t)$ , der wie folgt bestimbar ist (bezüglich obere Integrationsgrenze vgl. Zeichnung unter Ziff. 1.1.):

$$) \quad B(t) = \int_0^t L(t, x) dx = \int_0^t \left[ G(z) \exp \int_0^x \lambda(\xi; z) d\xi \right] dx = \int_0^t G(z) K(x, z) dx.$$

Die Variablensubstitution  $x = t - z$  führt schliesslich auf:

$$(7') \quad B(t) = \int_0^t G(z) K(t-z, z) dz.$$

Damit sind wir bei der klassischen Integralgleichung der Erneuerung angelangt, einer Volterra-Gleichung 1. Art. Da aber *in der Kernfunktion auch die Wanderungsintensitäten* vorkommen, dürfte die Annahme der Generationsunabhängigkeit, welche zu Faltungskernen führt, nicht wirklichkeitsnahe sein. Leider wird das Aufsuchen der Lösung erschwert, denn die mit den Faltungskernen einhergehende Laplace-Transformation kann so nicht unmittelbar zum Zuge kommen. Immerhin sind auch andere gangbare Lösungsmethoden bekannt, wie u.a. W. Sacher im eingangs erwähnten Lehrbuch zeigt [1].

*2.2. Die allgemeinen Integralgleichungen der Wanderungen.* Tatsächlich können verschiedene Gleichungen zu diesem Problem aufgestellt werden. Bei allen wird die Entwicklung der Gesamtbevölkerung  $\bar{L}(t)$  vorgegeben und ebenso Geburtenzahl und Sterblichkeit. Zu bestimmen ist dann eine die *Wanderungselemente enthaltende unbekannte Funktion*, welche die Erhaltung der vorgegebenen globalen Bevölkerungsentwicklung gewährleistet. Je nach der Wahl solcher Elemente nimmt die Integralgleichung verschiedene Gestalt an.

Die *allgemeine Integralgleichung der Wanderung* lässt sich ohne viel Mühe herleiten, sofern anstelle der Intensitätsfunktionen  $\varepsilon$  und  $\alpha$  die absolute *Wanderungsdifferenz*  $W(\xi; z) = E(\xi; z) - A(\xi; z)$  als *unbekannte Funktion* in die Bestimmungsgleichung eingeht, ( $E$  Einwanderungen,  $A$  Auswanderungen). Betrachten wir lediglich den weder aus der Eintrittsgeneration  $\bar{L}(0)$  noch aus den Geburten  $G(z)$  stammenden Teil  $\bar{H}(t)$  der im Zeitpunkt  $t$  beobachteten Gesamtbevölkerung  $\bar{L}(t)$ . Wird die Altersgliederung des Gesamtbestandes  $\bar{H}(t)$  berücksichtigt, so ergeben sich zunächst dessen Komponenten  $H(t, x)$ . Man möge sich dabei an die unter Ziff. 1.2. aufgeführte Bemerkung hinsichtlich der beiden Komponenten der Geburtenzahl erinnern. Folgende Integralbeziehungen sind dann offensichtlich:

$$(8) \quad H(t, x) = \int_{x_1}^x W(\xi; z) \exp \left[ - \int_{\xi}^x \mu(\iota; z) d\iota \right] d\xi ,$$

$$(8') \quad \bar{H}(t) = \int_{x_1}^t \int_{x_1}^x W(\xi; z) \exp \left[ - \int_{\xi}^x \mu(\iota; z) d\iota \right] d\xi dx ,$$

$$(8'') \quad \bar{H}(t) = \int_{x_1}^t \int_{x_1}^x W(\xi; z) K(\xi, x; z) d\xi dx ,$$

dies jedesmal mit  $z = t - x$ . In der Tat erscheint so  $W$  als Unbekannte in einer bivariablen Integralgleichung, die allerdings nicht einem klassischen Typus angehören dürfte.

Immerhin sollte es möglich sein, eine *Lösungsschar solcher Gleichungen* anzugeben. Indem wir eine kürzlich von G. Pacioni [2] in Erinnerung gerufene Integralbeziehung etwas verallgemeinern, könnte nämlich unter gewissen Bedingungen folgende Lösungsschar in Betracht kommen:

$$(8'') \quad W(\xi; z) = \frac{c(\xi, x; z) \bar{H}(t)}{\int \int_{x_1 x_1}^t c(\xi, x; z) K(\xi, x; z) d\xi dx},$$

wobei  $c$  eine willkürliche Funktion sei. Durch Einsetzen von (8'') in (8'') dürfte unsere Vermutung erhärtet werden. Die angedeuteten Lösungen müssten wohl Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden, allenfalls unter Berücksichtigung von geeigneten Nebenbedingungen. Sofern Generationsunabhängigkeit zulässig, würden dabei verschiedene Vereinfachungen eintreten, insbesondere wäre die Unbekannte  $W$  nur noch monovariabel. Es wäre auch denkbar, nur die Eintrittsfunktion  $E$  als Unbekannte und die Abgangsfunktion  $A$  als gegeben zu betrachten.

Noch ein Wort zum Sinne dieser Wanderungsgleichungen.  $\bar{H}$  darf hier als *Gesamtzahl der Gastarbeiter* gedeutet werden; sie wird durch wirtschaftliche Bedürfnisse bestimmt, und die Kenntnis der Lösungen für  $W$  würde gestatten, die Wanderungsüberschüsse entsprechend zu planen. Die Wirtschaft ist aber nicht nur daran interessiert, über einen gewissen Bestand von Gastarbeitern zu verfügen, sondern auch den *Einsatz besonders befähigter Altersgruppen* zu verlangen. Die Idee ist deshalb naheliegend, a priori die gewünschte Altersstruktur zu geben. Dadurch wäre jedoch in Gleichung (8) die  $t$ -abhängige Entwicklung  $H(t, x)$  für ein bestimmtes Alter  $x$  vorgegeben. Die Unbekannte  $W$  wäre dann anhand einer *eingeschränkten Integralgleichung* vom Typus:

$$(8*) \quad H(t, x) = \int_{x_1}^x W(\xi; z) K(\xi, x; z) d\xi$$

zu bestimmen, in der natürlich immer  $z = t - x$  gilt. Eine derartige Gleichung dürfte nach G. Pacioni [2] unter gewissen Bedingungen eine von einer willkürlichen Funktion  $c(\xi, x; z)$  abhängige Lösungsschar:

$$(8'') \quad W(\xi; z) = \int_{x_1}^x c(\xi, x; z) H(t, x) \\ \int_{x_1}^x c(\xi, x; z) K(\xi, x; z) d\xi$$

besitzen. Die Mannigfaltigkeit der Lösungen liesse sich wahrscheinlich durch Vorgabe gewisser, für die Praxis sinnvoller Nebenbedingungen einschränken. Wir denken z.B. an die Bindung der zeitlich variierenden Altersstrukturen, indem diese sogar konstant bleiben könnten.

*2.3. Eine spezielle Integralgleichung der Wanderungen.* Es wird wohl zweckmässig sein, vorerst jene Vereinfachungen zuzulassen, welche dem Bevölkerungsmodell im Sinne der Gleichung (5'') zugrunde liegen. Berücksichtigt man diese vereinfachte Bevölkerungsfläche und betrachtet wiederum lediglich den nicht aus dem Anfangsbestand  $L(0)$  stammenden Bevölkerungsteil  $B(t)$ , so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$(9) \quad B(t) = \int_0^t G(z) \exp \left[ - \int_0^x \mu d\xi \right] dx + \int_{x_1}^t N(z') \exp \left[ - \int_{x_1}^x (\mu + \alpha) d\xi \right] dx, \text{ d.}$$

$$(9') \quad B(t) = J(t) + \int_{x_1}^t N(z') K(x, z) dx.$$

Wird noch  $B - J = H$  gesetzt und überdies die Variablensubstitution  $x = t - z' + x_1$  vorgenommen, so erhalten wir schliesslich:

$$(9'') \quad H(t) = \int_{x_1}^t N(z') K(t-z, z) dz', \text{ mit } z = z' + x_1.$$

Damit haben wir aber eine vereinfachte Integralgleichung für die Einwanderungszahl  $N$  vor uns; sie ist wie die Erneuerungsgleichung eine Volterra-Gleichung 1. Art. Die Bestimmung der unbekannten Funktion  $N$  setzt nicht nur die Kenntnis des gesamten Bevölkerungsbestandes, der Geburtenzahl und der Sterblichkeit voraus, sondern jene der Auswanderungsintensitäten  $\alpha$ . Somit wäre zunächst eine Dekrementtafel für die Gesamtbevölkerung zu erstellen. Noch eine Bemerkung zur Unbekannten  $N$ . Wie unter Ziff. 1.2. dargelegt, würde  $N$  zu einer zweiten Komponente der Geburtenzahl  $G$  führen, welche  $N$ -abhängige Komponente so auch in  $G$  von (9) erscheinen und die Struktur der Integralgleichung erheblich komplizieren würde. Dank der unter

Ziff. 1.2. begründeten Vereinfachung kann diese Klippe, wenigstens in einer mehr oder weniger guten Näherung, umgangen werden.

Bei *weiteren theoretischen Untersuchungen* wäre zu empfehlen, für  $\alpha(x; z)$  sehr einfache analytische Annahmen zu treffen, z. B.  $\alpha$  als lineare Funktion von  $x$  einzusetzen oder gar als konstant anzunehmen. Möglicherweise würden auch plausible Annahmen über  $A(z''; x_2)$ <sup>1</sup> zu interessanten Ergebnissen führen. Parallel dazu wären auch einfache globale Bevölkerungsentwicklungen  $\bar{L}(t)$  in Rechnung zu stellen, wobei z. B. die Anwendung der logistischen Funktion sinnvoll wäre. Aus solchen Modellen liessen sich für die Praxis wohl richtungsweisende Erkenntnisse ermitteln.

## II. Probleme der Altersstruktur

### 3. Störung einer Tafelstruktur durch Geburt und Wanderung

*3.1. Normierte Altersverteilungen.* Es sollen nun verschiedene Altersstrukturen miteinander verglichen werden, nämlich jene der vorausberechneten Gesamtbevölkerung und jene der ihr zugrunde liegenden Sterbetafeln. Dermassen kann der Einfluss von Geburt und Wanderung auf die Altersstruktur einer Bevölkerung eruiert werden. Altersverteilungen lassen sich jedoch nur in relativer Form miteinander vergleichen, weshalb zunächst folgende *normierte x-abhängige Häufigkeitsfunktionen* definiert seien. Bisher kam dem Alter  $x$  vorwiegend die Rolle einer Entwicklungsvariablen zu, hier hingegen jene einer Verteilungsvariablen, was in den Formeln entsprechend hervorgehoben sei:

$$(10) \quad a(x; t) = \frac{l(x; t)}{\bar{l}(t)},$$

$$(10') \quad b(x; t) = \frac{L(x; t)}{\bar{L}(t)}.$$

Der Sinn von  $b$  als einer mit  $t$  variierenden *relativen Altersstruktur der Gesamtbevölkerung* ist mit Hilfe der Formeln (5) und (6) ohne weiteres verständlich, dagegen bedarf die den verwendeten Sterbetafeln entsprechende *relative Altersstruktur a* noch einiger Erläuterungen. Anstelle von

---

<sup>1</sup> Vgl. 1.3. Anwendungszahl  $A(\xi; z)$  mit  $\xi = x_2$  = konstantes Auswanderungsalter.

$t$  kann auch  $z + x$  geschrieben werden, so dass  $l(x; t) = \bar{l}(x; z)$  als Überlebensordnung der Generation  $z = t - x$  erscheint. Es gilt nämlich:

$$(10'') \quad l(x; t) = l(0) \exp \left[ - \int_0^x \mu(\xi; z) d\xi \right], \text{ woraus}$$

$$(10''') \quad \bar{l}(t) = \int_0^\omega l(x; t) dx.$$

$\bar{l}(t)$  ist demnach das *Ergebnis verschiedener Generationentafeln*, wobei immer die gleiche konstante Ausgangsbasis  $l(0; z) \equiv l(0) = \text{const.}$  gewählt werden darf.

3.2. *Definition des Störungsfaktors  $m(t, x)$ .* Tatsächlich wird die sich aus den Generationentafeln, d.h. die allein durch Sterblichkeit bedingte Altersstruktur durch den Einfluss der Geburten und der Wanderungen gestört. Setzen wir:

$$(11) \quad b(x; t) = a(x; t) m(t, x),$$

so ergibt sich der erwähnte Störungsfaktor  $m$  ohne weiteres aus (10) und (10'):

$$(11') \quad m(t, x) = \frac{L(x; t)}{\bar{L}(t)} \frac{\bar{l}(t)}{l(x; t)}.$$

$m$  kann somit allein mit Hilfe grundlegender Entwicklungsintensitäten berechnet werden, da die gleichen Ausgangsbestände  $L(z_o, 0)$  bzw.  $l(0)$  in Zähler und Nenner erscheinen.

#### 4. Stabile Altersstrukturen

4.1. *Relativ-stabile Entwicklungsmodelle.* Bereits unter Ziff. 1.3. und 1.4. war von solchen Entwicklungsmodellen die Rede ( $\gamma$  konstant,  $\lambda = -\mu + \varepsilon - \alpha$  generationsunabhängig). Die einschlägigen Formeln des *relativ-stabilen Bevölkerungsmodells* wurden jedoch nicht explizit aufgeführt, was hier nachgeholt sei, und zwar ausgehend von (5) und (6):

$$(12) \quad L(t, x) = L(z_o, 0) \exp \left[ (z - z_o) \gamma + \int_0^x \lambda(\xi) d\xi \right],$$

$$(12') \quad \bar{L}(t) = L(z_o, 0) \exp (t - z_o) \gamma \int_0^\omega \exp (-\gamma x + \int_0^x \lambda d\xi) dx.$$

Die *stabilen Überlebensordnungen* sind identisch mit den generationsunabhängigen Sterbetafeln. Dermassen genügt es, in den beiden For-

meln (10'') und (10''') die Parameter  $t$  bzw.  $z$  wegzulassen. Wichtig ist dabei die Feststellung, dass  $\bar{l}(t) = \bar{l} = \text{const.}$  wird.

Setzen wir die erwähnten stabilen Entwicklungsgrössen in die Formeln (10) und (10') ein, so ergibt sich hieraus ohne weiteres die *Zeitunabhängigkeit von  $a(x)$  und  $b(x)$* , was den Ausdruck stabiler Altersstrukturen rechtfertigt.

**4.2. Störung einer stabilen Tafelstruktur.** Wie sieht nun der gemäss Formel (11') zu berechnende *Störungsfaktor  $m$*  aus, falls die soeben aufgezeigten stabilen Entwicklungsmodelle herangezogen werden. Die Berechnung führt zunächst auf einen umfangreichen Bruch; es können jedoch manche Kürzungen vorgenommen werden, insbesondere wenn die in (3) gezeigte Zerlegung  $\lambda = -\mu + \varphi$  berücksichtigt wird. Im übrigen wird man Zähler und Nenner durch  $\bar{l}$  dividieren, so dass im Nenner-Integral  $\int_0^\omega$  die Altersstruktur  $a(x)$  der Sterbetafel als Gewichtungsfunktion eingeht, was interessante Mittelbildungen gestatten wird. Solchermassen ergibt sich zunächst der Ausdruck:

$$(13) \quad m(x) = \frac{\exp \left[ -\gamma x + \int_0^x \varphi d\xi \right]}{\int_0^\omega \exp \left[ -\gamma x + \int_0^x \varphi d\xi \right] a(x) dx},$$

für welchen noch eine einfachere Ausdrucksform gegeben sei, und zwar als Folge nachstehender *Mittelbildungen*:

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi(\xi) d\xi &= x \bar{\varphi}(x) \\ \int_0^\omega \exp \left[ -\gamma x + x \bar{\varphi}(x) \right] a(x) dx &= M \left\{ \exp \left[ -\gamma x + x \bar{\varphi}(x) \right] \right\} = \exp \left[ \bar{x}(-\gamma + \bar{\varphi}) \right]. \end{aligned}$$

Dabei wird  $\bar{x}$  zunächst aus  $\int_0^\omega \exp(-\gamma x) a(x) dx = \exp(-\gamma \bar{x})$  bestimmt und alsdann  $\bar{\varphi}$  aus  $\exp[\bar{x}(-\gamma + \bar{\varphi})] = M$ . So gelangen wir schliesslich für  $m(x)$  zur Form:

$$(13') \quad m(x) = \exp \{ x [\bar{\varphi}(x) - \gamma] - \bar{x} [\bar{\varphi} - \gamma] \}.$$

Diese Formel gibt nun etlichen Aufschluss für den *Vergleich der Altersstrukturen  $a(x)$  und  $b(x)$* . Hier einige Hinweise für eine geeignete Diskussionsweise:

- Neutralisieren sich die Wanderungen auf jeder Altersstufe, so wird  $\varphi = \bar{\varphi} = \bar{\bar{\varphi}} = 0$  und es ergibt sich  $m(x) = \exp[-\gamma(x-\bar{x})]$ , eine bereits früher veröffentlichte Formel [5]. Bei ständigem Zuwachs der *Geburtenzahl* ( $\gamma > 0$ ) dokumentiert (11) eine Verjüngung der Bevölkerung gegenüber der Überlebensordnung und bei ständiger Abnahme ( $\gamma < 0$ ) eine entsprechende Überalterung.
- Wird dagegen die Annahme  $\gamma = 0$  getroffen, kann der *Einfluss der Wanderung* herauskristallisiert werden. Allerdings wird hiefür eine nähere Betrachtung der Funktion  $\varphi(\xi)$  und ebenso der Mittel  $\bar{x}$ ,  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\bar{\varphi}}$  notwendig. So können z.B. massive Eintritte in höheren Altersstufen eine Überalterung bewirken und massive Austritte eine Verjüngung. Der Einfluss der Wanderungen auf die Altersstruktur ist somit weniger eindeutig als jener der Geburtenzahl. Es dürfte aufschlussreich sein, die Untersuchungen durch die Wahl elementarer Funktionen für  $\varphi(\xi)$  weiterzuführen, indem z.B. zunächst lineare Abhängigkeit vorausgesetzt wird.

\* \* \*

Unsere Ausführungen mögen gezeigt haben, dass das demographische Problem der Gastarbeiter der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht werden kann, dass aber noch manche offene Fragen einer theoretischen Lösung entgegengeführt werden müssen. Die deterministische Behandlung des Problems ergibt sich ohne weiteres durch die aufgezeigten kausalen Zusammenhänge, wogegen diese Zusammenhänge für die stochastischen Aspekte der Frage lediglich als Ausgangsbasis dienlich sein können. Es ist zu hoffen, dass die so gewonnenen theoretischen Erkenntnisse auch den Fragen des öffentlichen Lebens nutzbar gemacht werden können, insbesondere bei der finanziellen Planung unserer AHV.

## Literaturnachweis

- [1] *Walter Sacher*: «Versicherungsmathematik», Springer-Verlag. Erster Teil 1955.  
Zweiter Teil 1958.
- [2] *Goffredo Pacioni*: «Das Verfolgungsschema in der Versicherungsmathematik und in der Ökonometrie» (Verhandlungsberichte der IV. Internationalen Konferenz der Versicherungsmathematiker und Statistiker der Sozialen Sicherheit, Paris, Oktober 1966).
- [3] *Peter Thullen*: a) «Über den relativen Beharrungszustand einer Bevölkerung» (Mitteilungen, 1958, Heft 2);  
b) «Über die Eintritts- und Abnahmeintensitäten einer Bevölkerung ...» (Mitteilungen, 1960, Heft 2).
- [4] *Günther Wünsche*: «Belastungsquote und vorzeitiger Abgang» (Verhandlungsberichte der IV. Internationalen Konferenz der Versicherungsmathematiker und Statistiker der Sozialen Sicherheit, Paris, Oktober 1966).
- [5] *Ernst Kaiser*: «Equations fonctionnelles des mathématiques sociales» (Revue internationale d'actuariat et de statistique de la Sécurité Sociale, 1962).

## Résumé

Etant donné les importants excédents migratoires dus à l'arrivée des travailleurs étrangers, il est souhaitable de compléter les théories mathématiques usuelles de la science démographique. C'est dans ce sens qu'un premier chapitre est consacré, non seulement au problème direct de la projection d'une population, mais aussi au problème inverse du renouvellement, ce qui permet d'introduire plusieurs équations intégrales, dont deux concernant un modèle général de la population, une autre relative à un modèle simplifié. L'objet d'un deuxième chapitre réside dans l'étude de l'influence migratoire sur la structure d'âge, ceci à l'aide d'une fonction perturbatrice appliquée, en particulier, à un modèle de stabilité relative.

## Summary

The excedent migrations due to the arrival of foreign workers being more and more important, it would be desirable to complete the ordinary mathematical theories of the demographic science. A first chapter is dealing with this subject, not only with the direct problem of the projection of a population, but also with the inverse problem of the renewal, factor which gives the possibility to introduce several integral equations, two of them concerning a general model of population, one being inherent to a simplified model. A second chapter deals with the study of the migratory influence on the age structure, thanks to the disturbing function particularly applied to a model of relative stability.

## Riassunto

Data l'importanza dell'eccesso d'immigrazione dovuto all'arrivo dei lavoratori stranieri, era necessario completare le usuali teorie matematiche della scienza demografica. A tale scopo un primo capitolo è consacrato, non solo al problema diretto della proiezione di una popolazione, ma anche al problema inverso del rinnovamento. Questo ci permette d'introdurre diverse equazioni integrali, di cui due concernenti un modello generale della popolazione ed un'altra relativa ad un modello semplificato. L'oggetto di un secondo capitolo consiste nello studio dell'influenza immigratoria sulla struttura d'età e ciò a mezzo di una funzione perturbatrice applicata, in particolare, ad un modello relativamente stabile.