

# De l'usage du calcul opérationnel en assurance sur la vie

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **66 (1966)**

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966941>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## De l'usage du calcul opérationnel en assurance sur la vie

*Par Marc-Henri Amsler, Lausanne*

### Résumé

Le calcul opérationnel, basé sur la transformation de Laplace, est utilisé, traditionnellement, dans la théorie des équations différentielles.

Il permet, comme l'indique cet article, de démontrer également les relations fondamentales des mathématiques d'assurance sur la vie.

En cherchant à délimiter, expliciter et résoudre les problèmes posés par l'assurance sur la vie, les actuaires ont créé une méthode, développé un langage mathématique capable tant de les seconder dans leurs raisonnements théoriques que de les aider à obtenir les valeurs numériques indispensables à l'exercice de leur métier. Les difficultés rencontrées n'ont pas été et ne sont pas avant tout d'ordre mathématique; elles résident plus dans le choix des bases techniques, statistiques et économiques. Les actuaires-vie n'ont pas été mis, p.ex., dans la nécessité de faire appel, de façon notable, aux mathématiques supérieures, ni aux mathématiques appliquées, créées pour résoudre les problèmes soulevés par la technique. Chacun sait qu'un tournant se dessine actuellement, sur ce point, depuis que les problèmes d'assurance choses et dommages sont à l'ordre du jour.

L'outil que représente l'appareil mathématique, s'il n'a pas été le centre des préoccupations de l'actuaire, n'a pas moins été l'objet de soins constants. La présente communication est consacrée à cet appareil mathématique, qui, partant de la découverte, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, des nombres de commutation par Barrett et Tetens, a permis de mettre en formules, de façon satisfaisante, la plus grande partie des phénomènes rencontrés par le technicien de l'assurance sur la vie. Nous nous proposons d'aborder les problèmes actuariels-vie d'un point de

vue différent de celui qu'on rencontre ordinairement dans les manuels. Nous ferons usage d'une méthode très générale, empruntée aux mathématiques appliquées et fort appréciée des ingénieurs pour la résolution pratique d'un bon nombre de leurs problèmes: la méthode du calcul opérationnel.

Conçu par Heaviside à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle pour résoudre des problèmes d'oscillations électriques, le calcul opérationnel a trouvé sa justification par des travaux théoriques ultérieurs, spécialement par ceux de Doetsch; il est actuellement d'un usage courant dans la technique de résolution des équations différentielles, cette forme mathématique par laquelle se concrétisent bon nombre de problèmes posés par la technique.

Le calcul opérationnel repose, en fait, sur une astuce mathématique qui permet de remplacer la résolution de certaines équations différentielles par celle d'équations algébriques, plus aisées à maîtriser. Cette astuce est connue sous le nom de transformation de Laplace. Pour l'ingénieur, la transformation de Laplace n'est qu'un outil, la transformée d'une fonction qu'une abstraction, commode à manipuler. L'actuaire, lui, manie la transformation de Laplace à journée faite, et, la plupart du temps, sans le savoir. C'est, en effet, par une transformation de Laplace que l'actuaire passe d'une succession de prestations échelonnées dans le temps à la valeur actuelle de ces prestations; la détermination de la transformée de Laplace, si elle n'est qu'un détour utile pour l'ingénieur, représente pour l'actuaire, bien souvent, l'objet même de son étude.

Dans les pages qui suivent, nous exposerons, sur la base d'exemples concrets tirés des mathématiques financières et des mathématiques d'assurance sur la vie, l'essentiel, pour l'actuaire, du calcul opérationnel et de la théorie de la transformation de Laplace. Afin de conserver à cette théorie sa forme originale, nous avons représenté les phénomènes d'assurance sous leur forme continue. Nos considérations seront, ainsi, d'un intérêt plutôt théorique. Dans un travail ultérieur, nous adapterons la méthode du calcul opérationnel aux exigences spécifiques des problèmes actuariels, à savoir au caractère discontinu des phénomènes d'assurance. De plus, pour ne pas compliquer inutilement les développements, nous nous sommes limité aux considérations conduisant aux primes pures, à l'exclusion de l'élément chargements pour frais de gestion.

### § 1. Les fonctions de Dirac

Le modèle mathématique caractérisant l'état d'assuré se définit aisément à partir de la notion de fonction de Dirac. Les fonctions de Dirac sont bien connues de l'ingénieur, moins de l'actuaire; nous en rappellerons rapidement les définitions et propriétés.

Considérons la fonction de la variable indépendante  $t$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/\varepsilon & \text{pour } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{pour } t > \varepsilon \end{cases}$$

représentée par la figure 1. L'intégrale de cette fonction sur un domaine comprenant l'intervalle  $(0, \varepsilon)$  est égale à 1. Lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, l'amplitude de la fonction au voisinage de l'origine tend vers l'infini. La limite de cette fonction pour  $\varepsilon = 0$  est connue sous le nom de fonction « choc unitaire » ou « impulsion unitaire ». On la représente par le symbole  $1(t)$ .

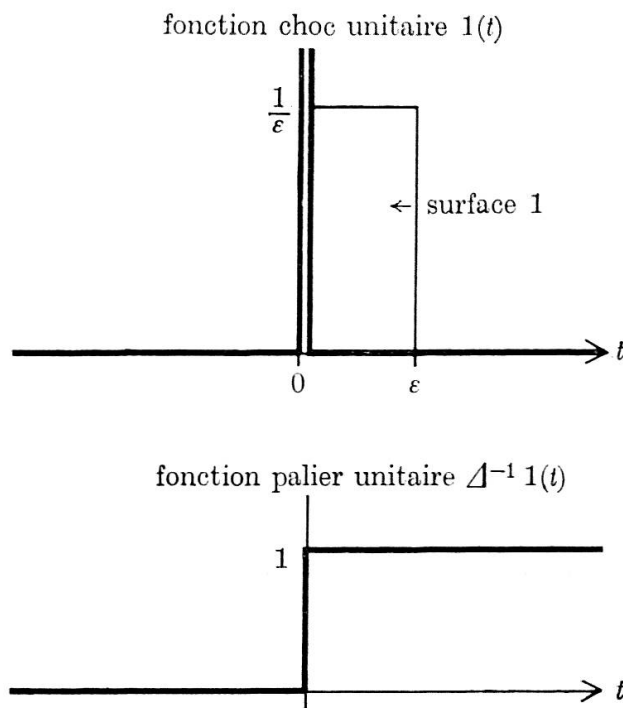


Figure 1

L'intégrale de la fonction choc unitaire définit la fonction « palier unitaire »

$$\Delta^{-1} 1(t) = \int_{-\infty}^t 1(t) dt,$$

fonction nulle pour  $t < 0$ , égale à l'unité pour  $t > 0$ . Elle présente un saut de hauteur +1 à l'origine (fig. 1). Nous utiliserons ici le symbole usuel  $\Delta$  pour caractériser l'opération de la dérivation et le symbole  $\Delta^{-1}$  pour caractériser l'intégration. On a en particulier

$$\Delta \{ \Delta^{-1} 1(t) \} = 1(t) \tag{1.1}$$

exprimant que la fonction choc unitaire est, en un certain sens, la dérivée de la fonction palier unitaire.

Les fonctions  $1(t)$  et  $\Delta^{-1} 1(t)$  sont connues sous l'appellation de fonction de Dirac, du nom de celui qui a reconnu leur utilité. On peut définir, par dérivation et intégration répétées, des fonctions d'ordre quelconque (entier) positif ou négatif de la fonction choc unitaire.

Remarquons que les deux fonctions  $1(t)$  et  $\Delta^{-1} 1(t)$  sont continues pour toute valeur de  $t$ , sauf à l'origine où elles présentent chacune une discontinuité. L'origine porte le nom de « point singulier » ou de « singularité » de la fonction. Par des translations, il est possible de définir des fonctions, dites fonctions de Dirac translattées, avec singularité en un point quelconque de l'axe des  $t$ : la fonction  $1(t-n)$ , par exemple, est partout nulle sauf au point  $t = n$  où elle est infinie.

La fonction

$$R_n(t) = \Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n),$$

dont nous ferons largement usage, admet, elle, la valeur 1 pour  $t$  compris entre 0 et  $n$ , s'annule pour toute autre valeur de  $t$  (fig. 2). Nous l'appellerons fonction palier unitaire temporaire<sup>1)</sup>.

En multipliant une fonction continue  $C(t)$  par la fonction palier unitaire temporaire, il est possible d'isoler la portion de la fonction continue correspondant à l'intervalle de temps considéré. L'expression

$$F(t) = C(t) [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] \tag{1.2}$$

<sup>1)</sup> Cette fonction fournit une représentation analytique commode pour la rente temporaire certaine.

est en effet identique à  $C(t)$  entre les valeurs  $t = 0$  et  $t = n$ , mais s'annule en dehors de cet intervalle (fig. 2).

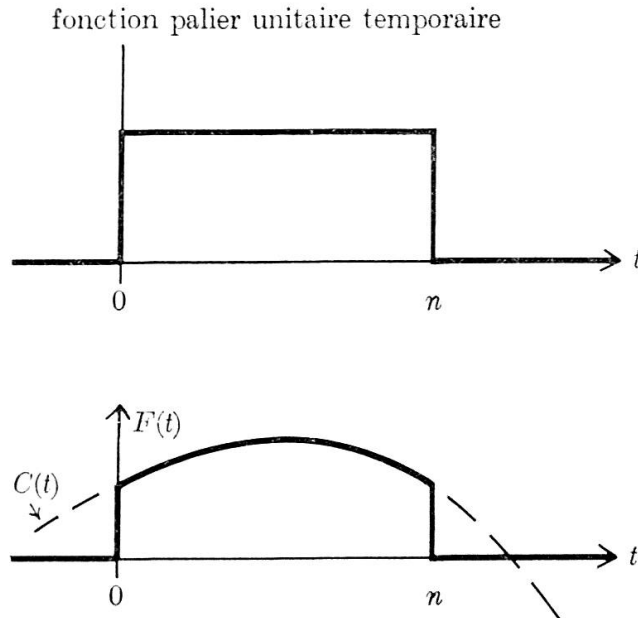


Figure 2

La fonction  $F(t)$  définie ci-dessus, portion de la fonction continue  $C(t)$ , peut être dérivée et intégrée au même titre que la fonction  $C(t)$  en tout point intérieur de l'intervalle  $(0, n)$ . Pour nos besoins, nous ferons usage d'une notion de dérivation légèrement plus générale, englobant également les points de discontinuité: la notion de dérivation que nous utiliserons, symbolisée par l'opérateur  $\Delta$ , est identique à la notion de dérivation usuelle  $\frac{d}{dt}$  en tout point régulier, c'est-à-dire en tout point à l'exception des points où la fonction présente des singularités; aux points où la fonction présente des sauts, l'opération  $\Delta$  engendre une fonction de Dirac de type  $1(t)$  d'intensité égale à la hauteur du saut. Pour la fonction  $F(t)$  définie par (1.2), par exemple, nous aurons

$$\Delta F(t) = C(0) \cdot 1(t) + \frac{dC(t)}{dt} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] - C(n) \cdot 1(t-n). \quad (1.3)$$

Les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> termes correspondent aux sauts de hauteur  $+C(0)$  en  $t = 0$  et  $-C(n)$  en  $t = n$  de la fonction  $F(t)$ . Le deuxième terme est identique à la dérivée de  $C(t)$  sur l'intervalle  $(0, n)$ , il est nul en dehors de cet intervalle (fig. 3).

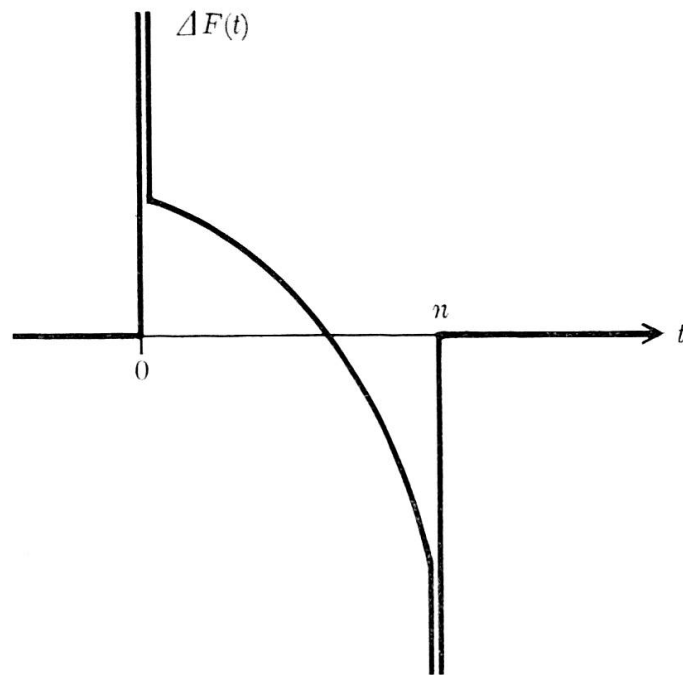


Figure 3

Au vu de cette définition, on dit que l'opérateur  $\Delta$  transforme  $F(t)$  en sa «fonction bordure», ce concept de bordure définissant, en un certain sens, le pourtour de la fonction  $F(t)$ , y compris les sauts.

Il serait facile de définir l'opérateur  $\Delta$  dans toute sa généralité. Nous ne ferons pas usage de cette généralisation.

L'opération inverse, qui fait passer de la dérivée  $\Delta F(t)$  à la fonction elle-même  $F(t)$  est appelée intégration. Elle est représentée par le symbole  $\Delta^{-1}$ . On a

$$\Delta^{-1}\{\Delta F(t)\} = F(t).$$

L'avantage de l'opérateur  $\Delta^{-1}$  sur l'opérateur usuel  $\int$  de l'intégration réside essentiellement dans le fait que la présence de la fonction de Dirac  $1(t)$  supplée à l'introduction d'une constante d'intégration. Les opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta^{-1}$  permettent de plus un symbolisme plus poussé du calcul opérationnel. C'est dans cette acception du concept «dérivée» que doit être comprise la propriété (1.1) de la fonction impulsion unitaire d'être la dérivée de la fonction palier unitaire.

## § 2. Le modèle mathématique des assurances sur la vie

Les engagements stipulés par un contrat d'assurance sur la vie se réfèrent à l'assuré de deux façons différentes: ils sont liés soit à l'état

(ou qualité) du candidat «d'être assuré», soit aux phénomènes modifiant cet état. Parmi les obligations dépendant de l'état «être assuré», citons celle, pour l'assuré, de payer des primes, celle, pour l'assureur, de verser des rentes, p. ex. Les prestations liées à la modification de l'état d'assuré sont, en particulier, les primes uniques à verser lors de l'acquisition de la qualité d'assuré, les prestations en capital échéant lors de la perte de cette qualité par suite de décès, de résiliation du contrat.

Mathématiquement, la qualité «d'être en vie» s'exprime par le symbole  ${}_t p_x$  représentant, pour une personne d'âge  $x$ , la probabilité de posséder encore cette qualité «être en vie» après un laps de temps  $t$ . La probabilité  ${}_t p_x$  permet de définir l'état, pour une personne, «d'être assurée», entre les époques  $t = 0$  et  $t = n$ :

$$A(t) = {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)], \quad (2.1)$$

l'expression entre crochets étant la fonction palier unitaire temporaire définie au paragraphe précédent.  $A(t)$  se nomme la fonction d'état «être assuré» (fig. 4); le symbole  $A$  choisi rappelle la première lettre du mot assuré.

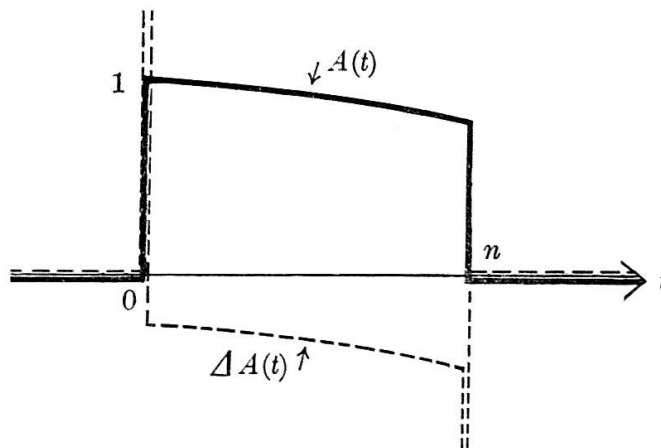


Figure 4

La modification de l'état «être assuré» s'exprimera, mathématiquement, par la fonction correspondant à la dérivée  $\Delta A(t)$  de la fonction  $A(t)$ :

$$\Delta A(t) = 1(t) + \frac{d({}_t p_x)}{dt} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] - {}_n p_x \cdot 1(t-n) \quad (2.2)$$

conformément aux règles établies au paragraphe précédent (fig. 4).



La valeur de  $\Delta A(t)$  entre  $t = 0$  et  $t = n$  représente, au signe près, l'intensité de probabilité, pour l'assuré d'âge  $x$ , de décéder au moment  $t$ . En effet, de la définition classique de  ${}_t p_x$ :

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(\tau) d\tau} \quad \text{où } \mu(\tau) = \text{taux instantané de décès,}$$

on tire

$$\frac{d}{dt} {}_t p_x = - \left[ \frac{d}{dt} \int_x^{x+t} \mu(\tau) d\tau \right] e^{-\int_x^{x+t} \mu(\tau) d\tau} = -\mu(x+t) {}_t p_x.$$

L'expression  $\mu(x+t) {}_t p_x$  représente bien l'intensité annoncée. Le terme  $\frac{d({}_t p_x)}{dt}$  est négatif.

Pour  $t = 0$  et  $t = n$ , la fonction  $A(t)$  présente des sauts de hauteur  $+1$  et  $-{}_n p_x$ ; la dérivée  $\Delta A(t)$  de  $A(t)$  sera ainsi représentée en ces points par des fonctions choc unitaire d'intensité  $+1$  et  $-{}_n p_x$ .

Les prestations entre assuré et assureur dépendent, comme nous l'avons dit plus haut, soit de l'état «être assuré» (représenté par la fonction  $A(t)$ ), soit de la modification de cet état (représentée par la fonction  $\Delta A(t)$ ). Nous désignerons par  $U_0(t)$  la prestation, échue au moment  $t$ , liée à l'état «être assuré» et par  $U_1(t)$  la prestation, au moment  $t$  également, liée à la modification de cet état. Les espérances mathématiques seront, par unité de temps,

$$U_0(t) \cdot A(t) \quad \text{et} \quad U_1(t) \cdot \Delta A(t). \quad (2.3)$$

Nous choisirons les signes des fonctions  $U_0(t)$  et  $U_1(t)$  de façon à ce que les espérances mathématiques définies par (2.3) soient positives s'il s'agit de prestations de l'assuré à l'assureur, négatives dans le cas d'une prestation de l'assureur au profit de l'assuré. La somme des deux expressions (2.3) représente l'espérance mathématique d'une prestation quelconque au moment  $t$ , soit l'excédent, au moment  $t$ , des prestations de l'assuré sur celles de l'assureur:

$$U(t) = U_0(t) \cdot A(t) + U_1(t) \cdot \Delta A(t). \quad (2.4)$$

$U(t)$  est donc une fonction du temps  $t$ .

L'équivalence entre les prestations de l'assuré et celles de l'assureur s'exprime par la propriété suivante de la fonction  $U(t)$ :

Principe d'équivalence: la fonction  $U(t)$  est économiquement neutre.

Nous préciserons plus bas le sens exact de cette propriété, dont la signification n'échappe évidemment à aucun actuaire.

### *Résumé*

Le modèle mathématique de l'assurance sur la vie est représenté:

1° par les fonctions d'état être assuré  $A(t)$  et modification d'état  $\Delta A(t)$ , définies par les expressions (2.1) et (2.2),

2° par les fonctions prestations  $U_0(t)$  et  $U_1(t)$  liées à  $A(t)$  et  $\Delta A(t)$ .  
L'espérance mathématique d'une prestation quelconque est

$$U(t) = U_0(t) \cdot A(t) + U_1(t) \cdot \Delta A(t),$$

3° par le principe d'équivalence:  $U(t)$  est une fonction économiquement neutre.

### § 3. Le calcul opérationnel de Heaviside appliqué aux problèmes actuariels

Voici, sur la base d'un exemple simple, l'essentiel du symbolisme créé par le calcul opérationnel de Heaviside<sup>1)</sup>.

Considérons l'exemple actuariel simple de l'assurance vie entière d'un capital décès  $C = 1$  financé par des primes périodiques. Dans ce cas particulier la fonction d'état (2.1) prend la forme ( $n = \infty$ )

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= {}_t p_x \cdot \Delta^{-1} 1(t) \\ \Delta A(t) &= 1(t) + \frac{d({}_t p_x)}{dt} \Delta^{-1} 1(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

<sup>1)</sup> Le symbole  $\Delta$  défini au § 1 représente ce qu'on appelle un opérateur mathématique: appliqué à la fonction  $A(t)$ , l'opérateur  $\Delta$  transforme, dans notre cas, la fonction d'état en sa fonction modification d'état. Le calcul mathématique qui fait intervenir des opérateurs de ce genre se nomme calcul opérationnel. La notion de calcul opérationnel ne doit pas être confondue, en particulier, avec celle de recherche opérationnelle.

Le calcul opérationnel utilise des expressions dans lesquelles interviennent des fonctions, à l'instar du calcul ordinaire, et des opérateurs. L'expression (2.4) définissant la fonction  $U(t)$  en est un exemple. Le calcul opérationnel définit également la notion d'équation opérationnelle et la notion de solution d'une telle équation.

Les fonctions prestations  $U_0(t)$  et  $U_1(t)$ , liées aux états  $A(t)$  et  $\Delta A(t)$ , sont, pour  $t \geq 0$ , définies par

$$U_0(t) = P = \text{const. (prime périodique constante } P),$$

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \quad (\text{pas de prestation en acquérant} \\ & \text{la qualité d'assuré)} \\ 1 & \text{pour } t > 0 \quad (\text{capital 1 en cas de perte de} \\ & \text{la qualité d'assuré).} \end{cases}$$

La fonction excédent  $U(t)$  définie par (2.4) devient

$$U(t) = U_0(t) \cdot A(t) + U_1(t) \cdot \Delta A(t) = P A(t) + \frac{d({}_t p_x)}{dt} \Delta^{-1} 1(t).$$

En tirant de (3.1) la valeur du 2<sup>e</sup> terme du membre de droite, on obtient

$$U(t) = P A(t) + \Delta A(t) - 1(t). \quad (3.2)$$

La prime  $P$  est déterminée par le principe d'équivalence  $U(t) = 0$ , c'est-à-dire

$$P A(t) + \Delta A(t) - 1(t) = 0.$$

En mettant en évidence la fonction  $A(t)$ , on obtient en considérant l'opérateur  $\Delta$  comme une grandeur algébrique ordinaire:

$$(P + \Delta) A(t) - 1(t) = 0$$

c'est-à-dire

$$P + \Delta = \frac{1(t)}{A(t)}$$

enfin

$$P = \frac{1(t)}{A(t)} - \Delta. \quad (3.3)$$

Si l'on donne maintenant à la fonction unitaire  $1(t)$  le sens ordinaire du nombre 1 et l'on remplace les lettres majuscules  $A$  et  $\Delta$  par des minuscules  $a$  et  $\delta$ , on retombe sur la formule, bien connue des actuaires, de la prime périodique de l'assurance capital-décès

$$P = \frac{1}{a} - \delta, \quad (3.4)$$

où  $a$  = valeur actuelle de la rente viagère liée à l'état  $A(t)$ .

Que le lecteur remarque le parfait tour de passe-passe réalisé par le calcul opérationnel! Qu'il ne nous accuse néanmoins pas de charlatanisme, le paragraphe suivant apportera la justification du procédé.

Le passage de l'expression opérationnelle (3.3) à l'expression algébrique (3.4) surprend au premier abord. Il n'est pas entièrement fortuit : la fonction d'état «être assuré»  $A(t)$  cède la place à la valeur actuelle  $\bar{a}_x$  de la rente viagère liée à cet état, ici rien de surprenant. La substitution de l'opérateur mathématique  $\Delta$  par le taux d'intérêt  $\delta$  mérite, elle, qu'on en approfondisse la signification.

C'est par des cheminements de ce genre qu'Heaviside trouva la solution d'un grand nombre de problèmes restés sans réponse à son époque. Heaviside établit un symbolisme qui lui permit simplement de trouver des résultats. N'étant pas mathématicien, il ne sut lui-même justifier son procédé ; il se contenta de confronter ses résultats avec l'expérience, repoussant purement et simplement ceux d'entre eux qui n'étaient pas conformes aux observations. Aussi le manque de démonstrations et la nature plus que problématique de ses astuces de calcul lui valurent de nombreuses critiques.

Nous ajoutons encore que nous avons légèrement complété le procédé imaginé primitivement par Heaviside, en ce sens que nous avons fait intervenir – comme l'ont montré les travaux de Doetsch – les conditions initiales, sous la forme de la fonction choc unitaire de Dirac. Sous cette forme, le calcul opérationnel livre les solutions exactes des problèmes posés, ce qui ne fut pas toujours le cas dans la forme que lui donna Heaviside.

#### § 4. Justification du calcul opérationnel par la transformation de Laplace

La transformation de Laplace établit une correspondance entre deux fonctions  $F(t)$  et  $f(\delta)$  de deux variables indépendantes  $t$  et  $\delta$ .  $F(t)$  est dite fonction objet dans la transformation,  $f(\delta)$  fonction image. Le passage de la fonction objet à la fonction image s'effectue au moyen de l'intégrale de Laplace

$$f(\delta) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} F(t) dt. \quad (4.1)$$

$f(\delta)$  est appelée également la transformée de Laplace de  $F(t)$ . La correspondance entre  $F(t)$  et  $f(\delta)$  est, pour les fonctions usuelles, biunivoque ; elle s'écrit symboliquement

$$f(\delta) = L\{F(t)\} \quad \text{réciproquement} \quad F(t) = L^{-1}\{f(\delta)\}.$$

Le symbole  $L$  – rappelant le nom de Laplace – représente un opérateur mathématique.

Quelle signification peut-on donner aux fonctions  $F(t)$  et  $f(\delta)$ ? Dans la théorie des équations différentielles, la fonction objet  $F(t)$  tire sa signification du problème même à résoudre. C'est une fonction de la variable indépendante  $t$ , dans la majorité des cas une fonction du temps; quant à la fonction objet  $f(\delta)$  et à la variable  $\delta$ , on ne peut que difficilement préciser leur nature: ce sont des grandeurs auxiliaires.

En sciences actuarielles, si  $F(t)$  représente des prestations (continues) échelonnées dans le temps, la fonction  $f(\delta)$  définie par (4.1) est la valeur actuelle de ces prestations, calculée au taux (instantané) d'intérêt  $\delta$ . La transformée  $f(\delta)$  possède pour l'actuaire – comme nous l'avons relevé au début de cette communication – non seulement une signification bien précise, mais représente un des buts mêmes de ses recherches.

Les fonctions  $F(t)$  doivent satisfaire à certaines conditions très générales, par exemple à des conditions d'intégrabilité, pour pouvoir être transformées par l'opérateur  $L$ . La bibliographie indiquée à la fin de la présente note renseignera le lecteur sur ce point. Les fonctions qui intéressent l'actuaire sont, elles, de nature fort simple; elles satisfont à ces conditions très générales. C'est le cas, en particulier, des fonctions d'état  $A(t)$  et  $\Delta A(t)$  introduites au paragraphe précédent pour définir l'état «être assuré».

Voici, à titre d'exemple, les transformées des fonctions de Dirac définies au premier paragraphe; elles sont des plus simples:

$$\begin{aligned} L\{1(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} 1(t) dt = 1 \\ L\{\Delta^{-1} 1(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} = \delta^{-1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

On démontre facilement que la fonction obtenue par  $k$  intégrations successives de la fonction choc unitaire  $1(t)$ , fonction représentée par le symbole  $\Delta^{-k} 1(t)$ , possède une transformée égale à

$$L\{\Delta^{-k} 1(t)\} = \delta^{-k}.$$

La transformation de Laplace possède des propriétés remarquables. Nous ne mentionnerons ici que celles dont nous aurons besoin par la suite.

1<sup>o</sup> *Transformée d'une somme*

$L$  est un opérateur linéaire, c'est-à-dire.

si 
$$L\{F(t)\} = f(\delta)$$

et 
$$L\{G(t)\} = g(\delta),$$

on a,  $a$  et  $b$  étant des constantes, positives ou négatives,

$$L\{aF(t) + bG(t)\} = aL\{F(t)\} + bL\{G(t)\} = af(\delta) + bg(\delta). \quad (4.3)$$

Cette propriété découle immédiatement de la définition (4.1)

2<sup>o</sup> *Transformée d'une fonction retardée (ou translatée)*

Soit  $F(t)$  une fonction définie sur l'axe positif des  $t$ , identiquement nulle pour  $t < 0$ , et  $f(\delta)$  sa transformée de Laplace. La fonction  $G(t)$  obtenue par translation de  $F(t)$  d'une quantité  $a$  dans la direction des  $t$  positifs :

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < a \\ F(t-a) & \text{pour } t \geq a \end{cases}$$

admet pour transformée

$$g(\delta) = e^{-\delta a} f(\delta). \quad (4.4)$$

L'actuaire trouvera immédiatement la signification de ces deux premières propriétés: la valeur actuelle d'une somme de prestations est égale à la somme des valeurs actuelles des prestations prises isolément, et: la valeur actuelle d'une prestation retardée est égale à la valeur actuelle sans retard multipliée par le facteur d'escompte relatif à la durée du retard.

3<sup>o</sup> *Transformée d'une dérivée*

La transformée de la dérivée, résultat de l'opération  $\Delta$ , définie au premier paragraphe, est :

$$L\{\Delta F(t)\} = \delta \cdot L\{F(t)\} = \delta \cdot f(\delta), \quad (4.5)$$

dans laquelle le point reliant  $\delta$  et  $f(\delta)$  représente la multiplication ordinaire. Cette propriété est fondamentale pour le calcul opérationnel (démonstration ci-après).

4° *Transformée d'une intégrale*

L'intégration, définie par l'opérateur  $\Delta^{-1}$ , est l'opération inverse de la dérivation; on a

$$L\{\Delta^{-1}F(t)\} = \delta^{-1} \cdot L\{F(t)\} = \delta^{-1} \cdot f(\delta). \quad (4.6)$$

En effet, si  $F(t) = \Delta G(t)$ , en passant aux transformées et en utilisant (4.5), on obtient

$$L\{F(t)\} = L\{\Delta G(t)\} = \delta \cdot L\{G(t)\}.$$

Mais comme  $F(t) = \Delta G(t)$  équivaut à  $G(t) = \Delta^{-1}F(t)$ , on a

$$L\{F(t)\} = \delta \cdot L\{\Delta^{-1}F(t)\}$$

c'est-à-dire  $L\{\Delta^{-1}F(t)\} = \delta^{-1} \cdot L\{F(t)\}$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Démonstration de la propriété 3°*

Considérons tout d'abord la fonction

$$F(t) = C(t) \cdot \Delta^{-1}1(t) \quad (4.7)$$

s'identifiant à la fonction  $C(t)$ , continue et dérivable, pour  $t > 0$ , s'annulant pour  $t < 0$  et présentant un saut de hauteur  $C(0)$  à l'origine. La dérivée de cette fonction est, d'après (1.3),

$$\Delta F(t) = C(0) \cdot 1(t) + \frac{dC(t)}{dt} \Delta^{-1}1(t). \quad (4.8)$$

Or on sait que, par intégration partielle:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \frac{dC(t)}{dt} dt = [C(t) e^{-\delta t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \delta e^{-\delta t} C(t) dt.$$

La fonction  $\Delta^{-1}1(t)$  étant identiquement égale à 1 sur l'intervalle zéro à infini peut être ajoutée en facteur sous les signes d'intégration des deux membres. De plus, le premier terme du membre de droite est égal à  $-C(0)$ , c'est-à-dire à la transformée de la fonction  $-C(0)1(t)$ ; en effet

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} C(0) 1(t) dt = C(0).$$

En passant le premier terme du membre de droite, écrit sous cette forme, dans le membre de gauche et en réunissant les deux intégrales, nous trouvons

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[ C(0) \cdot 1(t) + \frac{dC(t)}{dt} \Delta^{-1} 1(t) \right] dt = \delta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [C(t) \cdot \Delta^{-1} 1(t)] dt$$

c'est-à-dire d'après (4.8) et (4.7)

$$L\{\Delta F(t)\} = \delta L\{F(t)\}.$$

La relation (4.5) est ainsi démontrée pour les fonctions de la forme (4.7). Si la fonction de Dirac figurant dans la définition de  $F(t)$  possédait un point singulier, non à l'origine, mais en un point d'abscisse  $a$  (fonction translatée), le raisonnement serait identique:  $F(t)$  est identiquement nulle pour  $t < a$ , présente un saut de hauteur  $C(a)$  au point  $t = a$ , puis s'identifie à  $C(t)$ . L'intégrale de Laplace se réduit à l'intégrale sur l'intervalle  $(a, \infty)$ ; elle peut être traitée comme ci-dessus. Les fonctions dont nous nous occuperons par la suite étant du type (4.7), de type (4.7) translaté ou obtenu par addition d'un nombre fini de telles fonctions, la proposition (4.5) se trouve ainsi démontrée pour les fonctions qui nous intéressent.

La 3<sup>e</sup> propriété de la transformation de Laplace (transformée d'une dérivée) permet maintenant de démystifier le tour de passe-passe, exhibé au § 3, qui a permis d'établir la formule de la prime périodique de l'assurance capital-décès-vie-entière:

L'espérance mathématique  $U(t)$  définie par (3.2) est une fonction du temps. Dire que cette fonction est économiquement neutre (selon le principe d'équivalence émis au § 2), c'est poser que la valeur actuelle de  $U(t)$ , c'est-à-dire la transformée de Laplace

$$u(\delta) = L\{U(t)\}$$

s'annule pour la valeur de  $\delta$  correspondant au taux technique. Comment s'exprime la transformée  $u(\delta)$  de la fonction  $U(t)$  définie par (3.2)? Dans le membre de droite de (3.2),  $P$  est une constante, donc

$$L\{P A(t)\} = P L\{A(t)\}$$



(première propriété de la transformation de Laplace); de plus la fonction d'état  $A(t)$  se transforme en la valeur actuelle de la rente viagère

$$L\{A(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \Delta^{-1} 1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt = \bar{a}_x,$$

la dérivée  $\Delta A(t)$  en  $\delta \bar{a}_x$  (propriété 3) et la fonction de Dirac  $1(t)$  en la constante 1, selon (4.2). Le principe d'équivalence  $u(\delta) = 0$  donne ainsi l'équation, algébrique cette fois,

$$P \bar{a}_x + \delta \bar{a}_x - 1 = 0$$

pour  $\delta =$  taux technique d'intérêt, ce qui conduit immédiatement à la valeur de  $P$  selon (3.4).

Les exemples qui suivent montreront qu'il est parfois préférable d'opérer avec les fonctions du temps  $t$  plutôt qu'avec les valeurs actuelles, c'est-à-dire de développer le calcul opérationnel sous la forme que lui a donné Heaviside, puis de passer, dans une phase ultime, au domaine des fonctions transformées selon Laplace: les valeurs actuelles.

## § 5. Calcul opérationnel et mathématiques financières

Sur la base des trois premières propriétés de la transformation de Laplace (la 4<sup>e</sup> propriété n'est qu'une conséquence de la 3<sup>e</sup>), il est possible d'établir l'essentiel des formules utilisées en mathématiques financières. Ayant choisi intentionnellement, dans ce travail, la méthode continue afin de développer le calcul opérationnel sous sa forme usuelle, nous obtiendrons évidemment les formules des valeurs actuelles de prestations continues. Nous montrerons ultérieurement que ce procédé peut être transposé aux opérations financières telles que l'activité économique les connaît, concentrées à des dates échelonnées de façon discontinue dans le temps.

Quelques exemples suffiront pour démontrer l'efficacité du calcul opérationnel en mathématiques financières.

Le tableau ci-après indique, en 1<sup>e</sup> colonne, les opérations à effectuer sur les fonctions  $F(t)$  définissant les prestations futures, en 2<sup>e</sup> colonne la représentation graphique de  $F(t)$ , en 3<sup>e</sup> colonne les opérations à effectuer sur les fonctions  $f(\delta)$  définissant les valeurs actuelles, en 4<sup>e</sup> colonne les formules des valeurs actuelles correspondant aux prestations  $F(t)$ .

Prestations		Valeurs actuelles	
Opération	$F(t)$	Opération	$f(\delta)$
fonction de Dirac $1(t)$		$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} 1(t) dt =$	1
intégration de la fonction précédente $\Delta^{-1} 1(t)$	 rente perpétuelle constante	multiplication de la fonction précédente par $\delta^{-1}$ (propriété 4)	$\frac{1}{\delta} = \bar{a}_{\infty}$
intégration de la fonction précédente $\Delta^{-2} 1(t)$	 rente perpétuelle croissante	multiplication de la fonction précédente par $\delta^{-1}$ (propriété 4)	$\frac{1}{\delta^2}$
fonction de Dirac translatée $1(t-n)$	 0                      n	multiplication de $f(\delta) = 1$ par $e^{-\delta n}$ (propriété 2)	$e^{-\delta n}$
intégration de la fonction précédente $\Delta^{-1} 1(t-n)$	 rente perpétuelle constante différée	multiplication de la fonction précédente par $\delta^{-1}$ (propriété 4)	$\frac{e^{-\delta n}}{\delta}$
soustraction des fonctions de Dirac et Dirac translatée $1(t) - 1(t-n)$		soustraction des transformées respectives (propriété 1)	$1 - e^{-\delta n}$
intégration de la fonction précédente $\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)$	 rente temporaire constante	multiplication de la fonction précédente par $\delta^{-1}$ (propriété 4)	$\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{n}}$
intégration de la fonction précédente $\Delta^{-2} 1(t) - \Delta^{-2} 1(t-n)$	 rente perpétuelle croissant temporairement	multiplication de la fonction précédente par $\delta^{-1}$ (propriété 4)	$\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta^2}$

Voici un dernier exemple: la détermination de la formule du *cours mathématique d'un emprunt à amortissements constants*.

Taux d'intérêt nominal:  $\delta_0$

Taux d'évaluation:  $\delta$

Valeur nominale: 1

Durée restant à courir:  $n$

Etat de la dette (fig. 5):  $A(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)]$

Variation de cet état:  $\Delta A(t) = 1(t) - \frac{1}{n} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)]$ .

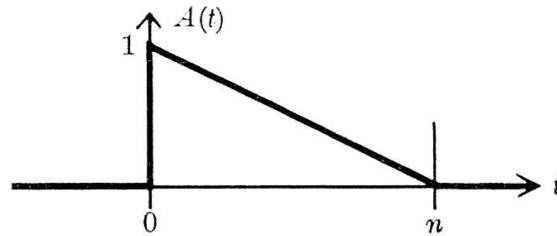


Figure 5

Si l'on désigne par  $R_{\overline{n}|}(t)$  la rente unitaire temporaire (fonction palier unitaire temporaire), c'est-à-dire si l'on pose

$$R_{\overline{n}|}(t) = [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)],$$

on obtient

$$\Delta A(t) = 1(t) - \frac{1}{n} R_{\overline{n}|}(t),$$

c'est-à-dire, en appliquant l'opérateur  $\Delta^{-1}$ , inverse de  $\Delta$ ,

$$A(t) = \Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} \frac{1}{n} R_{\overline{n}|}(t). \quad (5.1)$$

Les prestations futures sont représentées par les fonctions:

remboursements (constants)  $\frac{1}{n} R_{\overline{n}|}(t)$

intérêts  $\delta_0 A(t)$

c'est-à-dire, en utilisant (5.1),  $\delta_0 A(t) = \delta_0 \Delta^{-1} 1(t) - \delta_0 \Delta^{-1} \frac{1}{n} R_{\overline{n}|}(t)$ .

Si l'on pose  $\Delta^{-1} = \frac{1}{\Delta}$ , le total des prestations vaut

$$\frac{\delta_0}{\Delta} 1(t) + \left(1 - \frac{\delta_0}{\Delta}\right) \frac{R_{\overline{n}|}(t)}{n}.$$

Le cours mathématique s'obtient en remplaçant  $\Delta$  par  $\delta$ ,  $1(t)$  par 1 et  $R_{\overline{n}|}(t)$ , la rente temporaire, par  $\bar{a}_{\overline{n}|}$ , sa valeur actuelle :

$$\text{cours mathématique} = \frac{\delta_0}{\delta} + \left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) \frac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{n}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

### § 6. Calcul opérationnel et mathématiques d'assurances sur la vie

Voici tout d'abord, tiré du domaine actuariel, un exemple illustrant la propriété 3 de la transformation de Laplace (propriété de la transformée d'une dérivée).

Le modèle mathématique de l'assurance sur la vie est défini par les fonctions d'état et modification d'état, selon (2.1) et (2.2)

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] \\ \Delta A(t) &= 1(t) + \frac{d({}_t p_x)}{dt} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] - {}_n p_x 1(t-n). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Une prestation constante unitaire  $U_0(t) = 1$  liée à l'état d'assuré est représentée par la fonction  $U_0(t) A(t) = A(t)$ . Sa valeur actuelle est

$$L\{A(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} A(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)] dt$$

c'est-à-dire

$$L\{A(t)\} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt = \bar{a}_{x:\overline{n}|}, \quad (6.2)$$

soit la valeur capitalisée de la rente viagère temporaire.

Le même raisonnement, établi à partir de la fonction modification d'état  $\Delta A(t)$ , conduit à définir une prestation constante unitaire échéant à l'entrée dans l'assurance et à la sortie; cette prestation est représentée par la fonction  $U_1(t) \Delta A(t) = \Delta A(t)$ . Les 3 termes de la seconde expression (6.1) ont un sens très précis :

$1(t)$  = prestation unitaire à l'entrée, positive, donc versée par l'assuré;  
valeur actuelle  $L\{1(t)\} = 1$ .

$\frac{d}{dt} {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-n)]$  = prestation unitaire à la sortie par suite  
de décès durant la période d'assurance, négative selon § 2, donc  
en faveur de l'assuré; valeur actuelle  ${}_n \bar{A}_x$ .

${}_n p_x 1(t-n)$  = prestation unitaire à la sortie, en cas de vie à l'échéance;  
valeur actuelle  ${}_n \bar{E}_x$ .

La valeur actuelle de la prestation unitaire liée à la modification  
de l'état d'assuré vaut donc

$$L\{\Delta A(t)\} = 1 - {}_n \bar{A}_x - {}_n \bar{E}_x = 1 - \bar{A}_{x:\bar{n}} \quad (6.3)$$

où  $\bar{A}_{x:\bar{n}}$  = prime unique de l'assurance mixte.

La propriété fondamentale n° 3 de la transformation de Laplace,  
appliquée à la fonction d'état  $A(t)$ ,

$$L\{\Delta A(t)\} = \delta L\{A(t)\}$$

prend donc la forme, selon (6.3) et (6.2):

$$1 - \bar{A}_{x:\bar{n}} = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}}$$

c'est-à-dire

$$\bar{A}_{x:\bar{n}} = 1 - \delta \bar{a}_{x:\bar{n}}.$$

La formule la plus classique des mathématiques actuarielles se  
révèle ainsi être une conséquence immédiate de la propriété 3 de la  
transformation de Laplace et du calcul opérationnel; elle établit une  
relation entre la valeur actuelle de la rente liée à l'état d'assuré ( $\bar{a}_{x:\bar{n}}$ )  
et la valeur actuelle liée à la perte de cet état ( $\bar{A}_{x:\bar{n}}$ ).

Passons maintenant en revue les formes d'assurance les plus cou-  
rantes et cherchons à établir les formules des primes uniques et péri-  
odiques par la méthode du calcul opérationnel. Nous nous distancerons  
quelque peu du procédé, extrême à vrai dire, de Heaviside qui consiste  
à résoudre l'équation du principe d'équivalence sous la forme  $U(t) = 0$ .  
Nous passerons aussi rapidement que possible à la fonction image  $u(\delta)$   
et à l'équation en valeurs actuelles  $u(\delta) = 0$ .

Pour toutes les formes d'assurance traitées, l'état d'assuré est  
caractérisé par les fonctions  $A(t)$  et  $\Delta A(t)$ , définies par (2.1) et (2.2),  
dans lesquelles la durée  $n$  est à choisir de façon adéquate.

*Assurance mixte*

Prestation liée à l'état d'assuré:  $U_0(t) = P = \text{const.}$   
(prime périodique)

Prestation liée à la modification d'état:  $U_1(t) = Pu, t = 0$   
(prime unique)  
 $= 1, t > 0$   
(capital sortie décès ou vie à l'échéance).

Espérance mathématique (fonction excédent)

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0(t) \cdot A(t) + U_1(t) \cdot \Delta A(t) \\ &= P A(t) + Pu \mathbf{1}(t) + \frac{d}{dt} {}_t p_x [\Delta^{-1} \mathbf{1}(t) - \Delta^{-1} \mathbf{1}(t-n)] - {}_n p_x \mathbf{1}(t-n). \end{aligned}$$

En remplaçant les 2 derniers termes par leur expression tirée de (2.2), on obtient

$$U(t) = P A(t) + Pu \mathbf{1}(t) + \Delta A(t) - \mathbf{1}(t).$$

En valeur actuelle (transformée de Laplace)

$$\begin{aligned} u(\delta) = L\{U(t)\} &= P \bar{a}_{x:\bar{n}} + Pu + \delta \bar{a}_{x:\bar{n}} - 1 \\ &= P \bar{a}_{x:\bar{n}} + Pu - (1 - \delta \bar{a}_{x:\bar{n}}). \end{aligned}$$

Le principe d'équivalence  $u(\delta) = 0$  pour  $\delta =$  taux technique d'intérêt, donne

$$\text{en prime unique } (P = 0): \quad Pu = 1 - \delta \bar{a}_{x:\bar{n}}$$

$$\text{en primes périodiques } (Pu = 0): \quad P = \frac{1}{\bar{a}_{x:\bar{n}}} - \delta.$$

*Assurance de rente viagère différée, sans restitution en cas de décès*

Un développement analogue conduit à

$$u(\delta) = P \bar{a}_{x:\bar{n}} + Pu - {}_n \bar{a}_x.$$

L'équation  $u(\delta) = 0$  fournit les formules usuelles des primes uniques et périodiques.

*Assurance d'un capital différé en cas de vie, sans restitution*

Ici également

$$u(\delta) = P \bar{a}_{x:\bar{n}} + Pu - {}_n \bar{E}_x.$$

*Formes d'assurance en cas de vie avec restitution, en cas de décès, des primes versées, sous déduction des prestations d'assurance touchées*

Le groupe des formes d'assurance en cas de vie avec contre-assurance présente, pour la méthode du calcul opérationnel, un intérêt tout particulier. Alors que la méthode classique livre des formules assez compliquées dans lesquelles interviennent les valeurs  ${}_n(IA)_x$  des prestations variables en cas de décès, le calcul opérationnel conduit à des expressions simples dans leur forme, immédiatement compréhensibles et d'usage aisé pour la détermination de valeurs numériques si l'on dispose d'un calculateur électronique.

Nous avons en vue spécialement le cas de l'assurance de rente viagère différée avec contre-assurance. L'assurance de capitaux en cas de vie avec contre-assurance se traiterait d'une façon semblable.

Si, comme ci-avant,  $U_0(t)$  représente la prestation liée à l'état  $A(t)$  (prestation en cas de vie, primes si  $U_0(t) > 0$ , prestations d'assurance si  $U_0(t) < 0$ ),  $Pu$  la prime unique, le capital de restitution est donné par l'expression

$$C(t) = Pu + \int_0^t U_0(t') dt', \quad (6.4)$$

pour toute valeur de  $t$  rendant le membre de droite positif. Pour les valeurs de  $t$  conduisant à une valeur négative, le capital de restitution est nul.

La valeur de  $t$  pour laquelle le membre de droite s'annule, c'est-à-dire la valeur  $t = k$  pour laquelle

$$C(k) = 0, \quad (6.5)$$

délimite la période durant laquelle la clause de restitution joue.

Durant la période de restitution, de durée  $k$ , le modèle mathématique est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = {}_i p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)] \\ \Delta A(t) = 1(t) + \frac{d}{{}_i p_x} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)] - {}_k p_x 1(t-k) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0(t) = \text{fonction quelconque, intégrable par intervalle} \\ U_1(t) = \begin{cases} Pu = \text{prime unique, à verser par l'assuré, pour } t = 0 \\ C(t) = \text{capital de restitution selon (6.4), pour } 0 < t \leq k. \end{cases} \end{array} \right.$$

La fonction d'excédent

$$U(t) = U_0(t) \cdot A(t) + U_1(t) \cdot \Delta A(t)$$

devient

$$U(t) = U_0(t) {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)] + Pu 1(t) + C(t) \frac{d {}_t p_x}{dt} \cdot [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)], \quad (6.6)$$

le dernier terme de  $U_1(t) \cdot \Delta A(t)$  disparaissant puisque  $C(k) = 0$  selon (6.5).

Cette expression peut être simplifiée de la façon suivante: le facteur multipliant la fonction palier unitaire temporaire provenant des 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> termes est

$$U_0(t) {}_t p_x + C(t) \frac{d {}_t p_x}{dt}; \quad (6.7)$$

or, sur l'intervalle  $(0, k)$ , d'après (6.4),

$$U_0(t) = \frac{dC(t)}{dt};$$

l'expression (6.7) s'écrit donc

$$\frac{dC(t)}{dt} {}_t p_x + C(t) \frac{d {}_t p_x}{dt}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \{C(t) {}_t p_x\}.$$

D'autre part, le coefficient  $Pu$  figurant dans le second terme de (6.6) est égal à la valeur prise par la fonction  $C(t) {}_t p_x$  à l'origine. En effet  ${}_t p_x = 1$  et  $C(t) = Pu$  pour  $t = 0$ , selon (6.4). L'expression (6.6) devient ainsi

$$U(t) = C(t) {}_t p_x 1(t) + \frac{d}{dt} \{C(t) {}_t p_x\} [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]$$

c'est-à-dire, d'après la définition (1.3) de l'opérateur  $\Delta$  (ici  $C(k) = 0$ )

$$U(t) = \Delta \{C(t) {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]\}.$$

Rappelons que la fonction  $U(t)$  ci-dessus représente l'excédent des prestations de l'assuré sur celles de l'assureur durant la période de restitution.



La valeur actuelle  $u(\delta)$  de cette fonction  $U(t)$  est, selon la propriété 3 de la transformation de Laplace

$$u(\delta) = \delta L\{C(t) {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]\}, \quad (6.8)$$

ou,  $\delta$  étant une constante dans la transformation de Laplace,

$$u(\delta) = L\{\delta C(t) {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]\}. \quad (6.9)$$

L'interprétation actuarielle de cette dernière expression est immédiate:

$C(t)$  = capital de restitution,

$\delta C(t)$  = intérêts produits par le capital de restitution

$\delta C(t) {}_t p_x$  = intérêts produits par le capital de restitution si l'assuré est en vie;

le facteur  $[\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]$  intervient pour limiter ces considérations à la période de restitution. Ainsi: la valeur actuelle  $u(\delta)$  de l'ensemble  $U(t)$  des primes et prestations d'assurance (vie et décès) durant la période de restitution est égale à la valeur actuelle des intérêts produits par le capital de restitution.

Nous écrirons (6.8)

$$u(\delta) = \delta \hat{a}_{x:\bar{k}|} \quad (6.10)$$

où  $\hat{a}_{x:\bar{k}|} = L\{C(t) {}_t p_x [\Delta^{-1} 1(t) - \Delta^{-1} 1(t-k)]\}$  = valeur actuelle de la rente temporaire de montant égal au capital de restitution  $C(t)$ .

La propriété énoncée ci-dessus, caractérisée par l'expression (6.10), est valable quelle que soit la fonction  $U_0(t)$ , que les primes et prestations en cas de vie soient constantes ou variables.

Considérons maintenant le cas particulier de la rente viagère constante, différée, avec contre-assurance, financée en partie par prime unique ( $Pu$ ), en partie par primes périodiques ( $P$ ) durant  $n$  années. Les fonctions  $U_0(t)$  et  $U_1(t)$  sont représentées par la figure 6 ( $k$  représente ici la durée complète de restitution, comptée dès le début de l'assurance et non dès le début du versement des rentes).

La valeur actuelle  $u(\delta)$  de la fonction  $U(t)$  durant la période de restitution  $0 < t \leq k$  est égale, selon (6.10), à

$$\delta \hat{a}_{x:\bar{k}|}.$$

Après la période de restitution, le contrat d'assurance est identique à celui d'une rente viagère différée, constante, sans restitution et sans obligation financière de la part de l'assuré; la valeur actuelle de la fonction  $U(t)$  vaut donc

$$-{}_k\bar{a}_x$$

(négatif, car au profit de l'assuré).

La valeur actuelle des prestations  $U(t)$  pour toute la durée du contrat est donc

$$u(\delta) = \delta \hat{a}_{x:\bar{k}|} - {}_k\bar{a}_x.$$

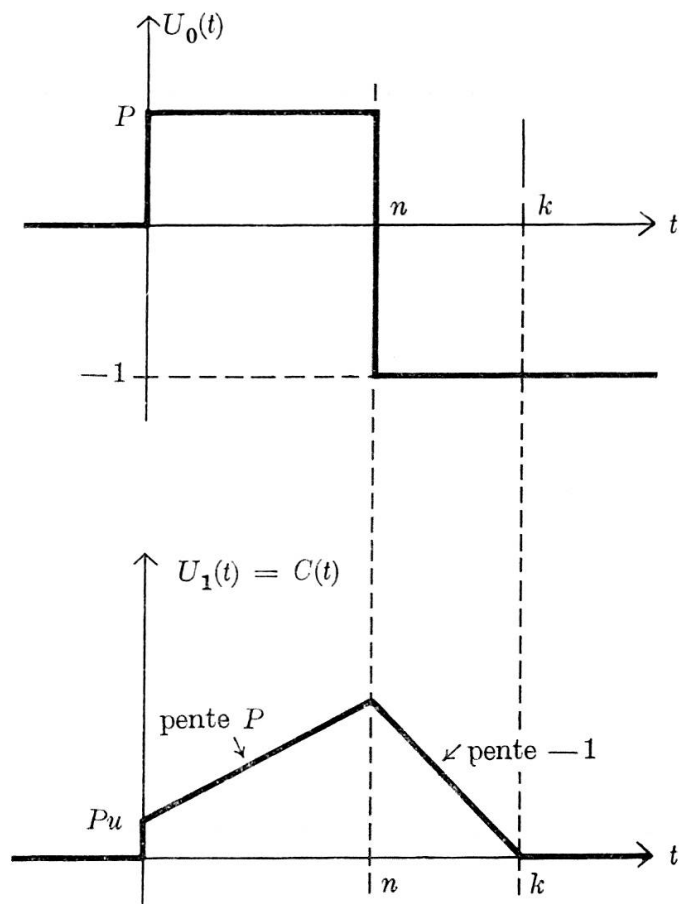


Figure 6

Le principe d'équivalence  $u(\delta) = 0$ , c'est-à-dire

$$\delta \hat{a}_{x:\bar{k}|} - {}_k\bar{a}_x = 0 \tag{6.11}$$

pour  $\delta =$  taux technique d'intérêt, conditionne prime unique et prime

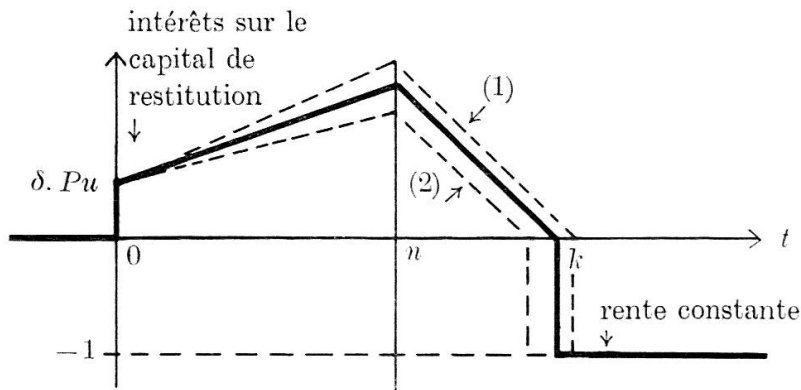
périodique (constante). Cette équation est équivalente à l'équation classique

$$Pu + P \bar{a}_{x:\bar{n}} = Pu \bar{A}_x + P {}_nI\bar{A}_x + {}_n\bar{E}_x \cdot [\bar{a}_{x+n} + (Pu + nP) {}_{k-n}\bar{A}_{x+n} - {}_{k-n}I\bar{A}_{x+n}]. \quad (6.12)$$

Relevons que le sens de l'équation (6.11) apparaît clairement à l'actuaire, indépendamment de sa démonstration par la méthode opérationnelle: les primes uniques et périodiques étant remboursées – sous déduction des rentes touchées – à chaque assuré décédant durant la période de restitution, la rente versée aux assurés en vie après la période de restitution ne peut être financée que par les intérêts réalisés sur le capital de restitution durant la période de restitution, ce qui, mathématiquement, s'exprime bien par l'équation

$${}_k\bar{a}_x = \delta \hat{a}_{x:\bar{k}}.$$

Les équations (6.11) et (6.12) sont, l'une comme l'autre, implicites par rapport aux grandeurs cherchées,  $Pu$  et  $P$ . L'équation (6.11) a l'avantage de permettre un calcul automatique rapide. Pour une prime unique donnée  $Pu$ , par exemple, la prime périodique  $P$  est celle pour laquelle la valeur actuelle de la prestation variable représentée par la figure 7 s'annule:



- (1) correspond à une prime  $P$  trop forte:  $u(\delta) > 0$ ,
- (2) correspond à une prime  $P$  trop faible:  $u(\delta) < 0$ .

Figure 7

La valeur de  $k$  et de  $P$  s'établit par approximation successive, procédé spécialement indiqué pour une exécution sur un calculateur électronique.

## Bibliographie

- Denis-Papin, M. et Kaufmann, A.*: Cours de calcul opérationnel appliqué.  
Ed. Albin Michel (1963).
- Doetsch, G.*: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.  
Traduction française par M. Parodi. Ed. Gauthier-Villars (1959).
- Doetsch, G.*: Handbuch der Laplace-Transformation.  
Birkhäuser-Verlag, Basel (1956).
- Mainigie, L.*: La théorie des opérations viagères.  
Librairie Castaigne, Bruxelles (1922).
- Nixon, F.E.*: Transformation de Laplace. Ed. Dunod, Paris (1964).
- Salles, F.*: Initiation au calcul opérationnel et à ses applications techniques.  
Ed. Dunod, Paris (1961).
- Saxer, W.*: Über die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen.  
Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, Vol 45/1 (1945).
- Stelson, H.E.*: Laplace transforms applied to interest functions.  
Skandinavisk Aktuarietidskrift 1956.
- Turney, T.H.*: Le calcul d'Heaviside. Ed. Dunod, Paris (1950).
- Wagner-Thoma*: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation.  
Joh. Ambr. Barth-Verlag, Leipzig (1962).

## Zusammenfassung

Die auf die Laplacesche Transformation aufgebaute Operatorenrechnung wird meistens in der Theorie der Differentialgleichungen angewandt. Es wird in dieser Abhandlung gezeigt, wie diese Methode zur Herleitung der Grundformeln der Lebensversicherungsmathematik Anwendung finden kann.

## Summary

The operational calculus, based on the Laplace transform, is traditionally used to solve differential equations. This paper would show how to make use of this method to prove the basic mathematical relations of life-insurance.

## Riassunto

Il calcolo operativo, basato sulla trasformazione di Laplace, è tradizionalmente utilizzato nella teoria delle equazioni differenziali. Nel presente lavoro viene dimostrato come tale metodo può essere applicato per dedurre le formule matematiche fondamentali dell'assicurazione sulla vita.

