

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 66 (1966)

Artikel: Über einfache und kombinatorische Potenzmittel

Autor: Jecklin, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966940>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Über einfache und kombinatorische Potenzmittel

Von H. Jecklin, Zürich

Herrn Prof. Walter Saxer zum 70. Geburtstag

Zusammenfassung

Die gebräuchlichen elementaren Mittelwerte sind lediglich Spezialfälle einer unendlichen Vielfalt von Möglichkeiten, auf algebraischem Wege Mittelwerte zu bilden. Die gewöhnlichen Potenzmittel insbesondere (einfache und verallgemeinerte) sind eine Unterklasse der kombinatorischen Potenzmittel. Diese formen, als Funktionen ihrer Exponenten aufgefasst, ein interessantes Bündel von Flächen, deren Anzahl gleich der Anzahl der zu mittelnden Grössen ist. Aus den Niveauverhältnissen dieses Gebildes lassen sich in einfacher Weise mancherlei Ungleichungssätze ableiten.

Der vorliegende Aufsatz bildet eine Ergänzung zur Arbeit «Die elementaren Mittelwerte», erschienen in Band 47, Heft 1 dieser Mitteilungen, und die im Text vorkommenden Seitenhinweise beziehen sich auf jene Abhandlung. Die nachstehenden Ausführungen sind jedoch unabhängig für sich lesbar und verständlich.

Es sei gegeben eine Reihe von n positiven reellen Grössen

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n, \quad (1)$$

wobei der triviale Fall, dass alle n Grössen einander gleich sind, ausgeschlossen sein soll. Man versteht dann unter einem einfachen Potenzmittel einen Mittelwert der Gestalt

$$M(l) = \left(\frac{\sum a_i^l}{n} \right)^{\frac{1}{l}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad -\infty < l < +\infty. \quad (2)$$

Es ist leicht einzusehen, dass $M(l)$ ein Mittelwert ist, d. h. dass

$$a_1 < M(l) < a_n, \quad (3)$$

denn für $0 < l$ gilt wegen (1) sicher

$$n a_1^l < \sum a_i^l < n a_n^l,$$

also
$$a_1 < \left(\frac{\sum a_i^l}{n} \right)^{\frac{1}{l}} < a_n,$$

und weil $\frac{a_1}{a_i} \leq 1$, resp. $\frac{a_n}{a_i} \geq 1$, gilt für $l < 0$ sicher

$$a_1^l \sum \frac{1}{a_i^l} < n < a_n^l \sum \frac{1}{a_i^l}$$

also
$$a_1 < \left(\frac{n}{\sum 1/a_i^l} \right)^{\frac{1}{l}} = \left(\frac{\sum a_i^{-l}}{n} \right)^{-\frac{1}{l}} < a_n,$$

und für $l = 0$ ist $\left(\frac{n}{n} \right)^{\frac{1}{0}}$ gleich dem geometrischen Mittel $(\prod a_i)^{1/n}$, (Seite 144).

Nehmen wir vorerst an, der Exponent l sei eine ganze Zahl, so gilt für die Reihe der einfachen Potenzmittel (Seite 142):

$$\begin{aligned} a_1 < \dots < \left(\frac{n}{\sum a_i^{-l}} \right)^{\frac{1}{l}} < \dots < \left(\frac{n}{\sum a_i^{-2}} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{n}{\sum a_i^{-1}} < (\prod a_i)^{1/n} < \frac{\sum a_i}{n} \\ < \left(\frac{\sum a_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} < \dots < \left(\frac{\sum a_i^{l-1}}{n} \right)^{\frac{1}{l-1}} < \left(\frac{\sum a_i^l}{n} \right)^{\frac{1}{l}} < \dots < a_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Es gilt jedoch ganz allgemein für $l > k$

$$\left(\frac{\sum a_i^l}{n} \right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (5)$$

wobei weder l noch k ganze Zahlen sein müssen, was auf Grund einfacher Umformungen etwa folgender Art einzusehen ist. Nachdem bezüglich der zu mittelnden Grössen a_i lediglich vorausgesetzt ist, dass sie positiv reell sein sollen, können wir beispielsweise a_i ersetzen durch $a_i^{1/k}$, $k < l$, ganz. Es geht dann (5) über in

$$\left(\frac{\sum a_i^{l/k}}{n} \right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a_i}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\sum a_i^{l/k}}{n} \right)^{\frac{k}{l}} > \frac{\sum a_i}{n}, \quad l \text{ und } k \text{ ganz, } k < l. \quad (6)$$

Gemäss (4) ist $\left(\frac{\sum a_i^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} > \frac{\sum a_i}{n}$, $l > 1$, ganz.

Ersetzen wir hier a_i durch $a_i^{1/l}$, so folgt

$$\left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^{\frac{1}{l}} > \frac{\sum a_i^{1/l}}{n}$$

also
$$\frac{\sum a_i}{n} > \left(\frac{\sum a_i^{1/l}}{n}\right)^l \tag{7}$$

oder
$$\frac{\sum a_i}{n} > \left(\frac{\sum a_i^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}, \text{ sofern } \frac{1}{l} = m < 1.$$

Setzen wir in (6) $a_i^{1/l}$ anstelle von a_i , $l > 1$, ganz, so haben wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sum a_i^{1/k}}{n}\right)^k &> \frac{\sum a_i^{1/l}}{n}, \\ \left(\frac{\sum a_i^{1/k}}{n}\right)^k &> \left(\frac{\sum a_i^{1/l}}{n}\right)^l, \quad k \text{ und } l \text{ ganz, } k < l. \end{aligned} \tag{8}$$

Es gilt demzufolge ganz allgemein für $l > 1$ (9)

$$\left(\frac{\sum a_i^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} > \frac{\sum a_i}{n} > \left(\frac{\sum a_i^{1/l}}{n}\right)^l > \left(\frac{\sum a_i^{1/\infty}}{n}\right)^\infty = \left(\frac{\sum a_i^0}{n}\right)^{\frac{1}{0}} = (\prod a_i)^{1/n}.$$

Setzen wir für ein numerisches Beispiel $n = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, so ist das arithmetische Mittel 6.5, das geometrische Mittel 6, und für $l = 2$ ergibt

sich $\left(\frac{\sum \sqrt{a_i}}{n}\right)^2 = \left(\frac{2+3}{2}\right)^2 = 6.25$. Dies ist aber das arithmetische

Mittel zwischen 6.5 und 6, und in der Tat gilt speziell für $n = 2$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \right) = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{ab} + \frac{b}{4} = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2.$$

Wir können nunmehr (2) als Funktion von l auffassen, die für $-\infty \leq l \leq +\infty$ das Intervall von a_1 bis a_n stetig durchläuft. Die Bildkurve tendiert für $l \rightarrow -\infty$ asymptotisch gegen a_1 , für $l \rightarrow +\infty$ gegen a_n , und hat dazwischen einen Wendepunkt. Nachdem das Intervall $[a_1, a_2]$ von (2) stetig durchlaufen wird, kann jeder Mittelwert (kombinatorisches, transzendentes, trigonometrisches Mittel usw.) in beliebiger Näherung durch ein einfaches Potenzmittel approximiert werden.

In der Reihe (4) erkennen wir bekannte Mittelwerte, wie das quadratische, das arithmetische, das geometrische, das harmonische Mittel. Es ergeben sich aber aus der Reihe auch ohne weiteres elementare Ungleichungssätze und deren Verallgemeinerungen, zu deren Verifikation man sich ansonst der Ungleichungen von Steffensen-Jensen bedient. Zum Beispiel aus

$$\left(\frac{\sum a_i^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} > \frac{\sum a_i}{n} > \left(\frac{\sum a_i^{1/l}}{n}\right)^l, \quad l > 1, \text{ ganz,}$$

folgt für $l = 2$ einerseits

$$\frac{\sum a_i^2}{n} > \left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^2 \quad (10)$$

und andererseits
$$\sqrt{\frac{\sum a_i}{n}} > \frac{\sum \sqrt{a_i}}{n} \quad (11)$$

oder in Worten: Das arithmetische Mittel der Quadrate von n positiven Grössen ist grösser als das Quadrat des arithmetischen Mittels dieser Grössen, und: Die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel von n positiven Grössen ist grösser als das arithmetische Mittel der Quadratwurzeln dieser Grössen.

Die sich ebenfalls unmittelbar ergebende Verallgemeinerung lautet: Das arithmetische Mittel der t -ten Potenzen von n positiven Grössen ist grösser als die t -te Potenz des arithmetischen Mittels dieser Grössen, und: Die t -te Wurzel aus dem arithmetischen Mittel von n positiven Grössen ist grösser als das arithmetische Mittel der t -ten Wurzeln dieser Grössen.

Anderes Beispiel: Es gilt

$$\sqrt[3]{\frac{\sum a_i^3}{n}} > \sqrt[2]{\frac{\sum a_i^2}{n}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\sum a_i^3}{n}\right)^2 > \left(\frac{\sum a_i^2}{n}\right)^3, \quad (12)$$

d. h.: Bei n positiven Grössen ist das Quadrat des durchschnittlichen Kubus grösser als der Kubus des durchschnittlichen Quadrates.

Die einfachen Potenzmittel bilden eine Sonderklasse der einfachen kombinatorischen Potenzmittel. Zu deren Bildung geht man aus von den elementarsymmetrischen Funktionen der n positiven Grössen a_i ,

nämlich

$$\begin{aligned}
 {}_1s &= \sum a_i, & i &= 1, 2, \dots, n; \\
 {}_2s &= \sum a_i a_k, & i &\neq k; \\
 {}_3s &= \sum a_i a_k a_l, & i &\neq k \neq l; \\
 &\vdots & & \\
 &\dots & & \\
 {}_ns &= a_1 a_2 \dots a_n = \prod a_i.
 \end{aligned}$$

Es besteht also ${}_t s$ aus $\binom{n}{t}$ Summanden, die je ein Produkt von t verschiedenen a_i sind. Nunmehr bilden wir Potenzsummen und bezeichnen die Potenzsumme von ${}_t s$ vom Grad k mit ${}_t p_k$. Beispielsweise

$$\begin{aligned}
 {}_1 p_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
 {}_1 p_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \\
 &\vdots & \dots \\
 {}_2 p_1 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \\
 {}_2 p_2 &= (a_1 a_2)^2 + (a_1 a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} a_n)^2 \\
 &\vdots & \dots \\
 {}_n p_1 &= a_1 a_2 \dots a_n \\
 {}_n p_2 &= (a_1 a_2 \dots a_n)^2 \\
 &\vdots & \dots
 \end{aligned}$$

Die Potenzsummen der elementarsymmetrischen Funktionen sind also homogene Funktionen der Grössen a_i vom Grad $tk = l$.

Unter einem einfachen kombinatorischen Potenzmittel verstehen wir nunmehr einen Mittelwert der Gestalt

$$M(t; k) = \left(\frac{{}_t p_k}{\binom{n}{t}} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad l = tk. \quad (13)$$

Es ist beispielsweise für $t = 2, k = 2$,

$$M(2; 2) = \left\{ \frac{1}{\binom{n}{2}} \left((a_1 a_2)^2 + (a_1 a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} a_n)^2 \right) \right\}^{\frac{1}{4}}.$$

Für $k = 1$ ergibt sich aus (13) die Gruppe der einfachen kombinatorischen Mittel

$$M(t) = \left(\frac{{}_t s}{\binom{n}{t}} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad (14)$$

und es wurde bereits gezeigt (Seite 125), dass (15)

$$\frac{\sum a_i}{n} = \frac{1^S}{n} > \left(\frac{2^S}{\binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} > \dots > \left(\frac{i^S}{\binom{n}{t}} \right)^{\frac{1}{t}} > \dots > \left(\frac{n^S}{\binom{n}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = (\prod a_i)^{1/n}.$$

Es werden somit bei n Grössen a_i zwischen das arithmetische und das geometrische Mittel $n-2$ kombinatorische Mittelwerte eingeschoben. Auch hieraus ergeben sich ohne weiteres bekannte elementare Ungleichungssätze und deren Verallgemeinerungen. So ist z. B. nach (4) und (15)

$$\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}} > \frac{\sum a_i}{n} > \sqrt{\frac{\sum a_i a_m}{\binom{n}{2}}}$$

also (16)

$$\frac{1}{n} \sum a_i^2 > \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum a_i a_m, \quad i \neq m,$$

für $n = 2$ der bekannte Satz: $\frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) > a_1 a_2$.

Wenn wir in (13) den Index t festhalten, so ergibt sich eine Klasse von Mittelwerten, die bei stetiger Änderung von k eine ähnliche Kurve erzeugen, wie die Klasse der einfachen Potenzmittel, was ohne weiteres einzusehen ist. Denn für $t = 2$ beispielsweise erhalten wir Mittelwerte der Gestalt

$$M(2; k) = \left(\frac{\sum (a_i a_m)^k}{\binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Setzen wir $\sqrt{a_i a_m} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, \binom{n}{2}$, so haben wir

$$M(2; k) = \left(\frac{\sum b_j^{2k}}{\binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2k}},$$

also ein einfaches Potenzmittel. Es geht für $k \rightarrow -\infty$ asymptotisch gegen $\sqrt{a_1 a_2}$ und für $k \rightarrow +\infty$ gegen $\sqrt{a_{n-1} a_n}$, und für $k = 0$ resultiert auch hier das geometrische Mittel.

Es existieren also für n zu mittelnde positive Grössen a_i jeweils n Klassen von einfachen kombinatorischen Potenzmitteln. Die erste Klasse ist identisch der Klasse der gewöhnlichen einfachen Potenz-

mittel (2), die zweite Klasse basiert auf der Kombinationsmöglichkeit von Zweiergruppen der a_i ohne Wiederholung, die dritte auf jener von Dreiergruppen usw., und die n -te Klasse wird vollinhaltlich durch das geometrische Mittel repräsentiert, denn wir erhalten aus

$$M(n;k) = \left(\frac{n^k P_k}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad l = nk, \quad (17)$$

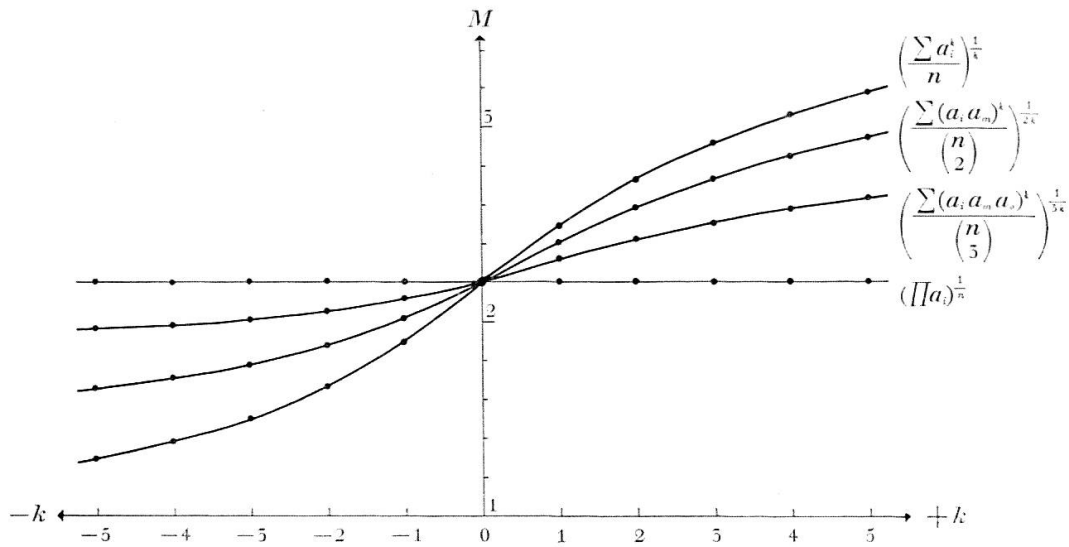
für jede Potenz k das gewöhnliche geometrische Mittel

$$M(n;k) = [(a_1 a_2 \dots a_n)^k]^{1/nk} = (\prod a_i)^{1/n}.$$

In nachstehender Tabelle sind für $n = 4$ mit den Werten $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ für einige Positionen die Mittelwerte (13) in roher Rechnung auf zwei Kommastellen angeführt, und die figürliche Darstellung zeigt den Verlauf der entsprechenden Kurven in der Nähe des Koordinatennullpunktes.

k	$\left(\frac{\sum a_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$	$\left(\frac{\sum (a_i a_m)^k}{\binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2k}}$	$\left(\frac{\sum (a_i a_m a_o)^k}{\binom{n}{3}} \right)^{\frac{1}{3k}}$	$((a_1 a_2 a_3 a_4)^k)^{1/4k}$
5	3.18	2.95	2.64	2.21
4	3.07	2.86	2.59	2.21
3	2.92	2.74	2.52	2.21
2	2.74	2.60	2.43	2.21
1	2.50	2.42	2.32	2.21
0	2.21	2.21	2.21	2.21
-1	1.92	2.03	2.13	2.21
-2	1.68	1.89	2.06	2.21
-3	1.50	1.79	2.02	2.21
-4	1.39	1.72	1.99	2.21
-5	1.31	1.67	1.97	2.21

Die Kurven der Figur schneiden sich im Punkt des geometrischen Mittels, und letzteres beansprucht in der Gestalt (17) eine Gerade für sich.



Diese Sonderstellung des geometrischen Mittels wird noch augenfälliger, wenn wir zur umfassenderen Klasse der verallgemeinerten kombinatorischen Potenzmittel übergehen. Zu diesen gelangen wir, wenn wir jede Grösse a_i mit einer Potenz ihrer selbst, also mit a_i^m , als Gewicht versehen. Es geht dann (13) über in

$$M(s; t, m) = \left(\frac{s^t t + m}{s^t p_m} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad l = st. \quad (18)$$

Für $s = 1$ ist dies die Klasse der verallgemeinerten einfachen Potenzmittel

$$M(k, l) = \left(\frac{\sum a_i^{k+l}}{\sum a_i^k} \right)^{\frac{1}{l}} \quad (19)$$

welche bei stetiger Variation von k und l eine Potenzfläche bedecken, die bereits eingehend beschrieben wurde (Seite 145). Sie ist in ihren Niveauverhältnissen dadurch gekennzeichnet, dass

$$\begin{aligned} M(k, l) &= M(k + l, -l) \\ M(k, l) &< M(k + t, l) \\ M(k, l) &< M(k, l + t) \\ M(k, l) &< M(k + t, l + t) \\ M(k, l + t) &< M(k + t, l). \end{aligned}$$

Mit $k = 0$, d.h. Schnitt mit der auf die l -Achse senkrechten Ebene, resultiert das einfache Potenzmittel (2).

Für $s = 2, 3, \dots, (n-1)$ erhalten wir die Flächen der verallgemeinerten kombinatorischen Potenzmittel, auf welchen jeweils mit $k = 0$ die betreffende Kurve der einfachen kombinatorischen Potenzmittel (13) liegt. Die n -te Klasse schliesslich, $s = n$, wird durch eine horizontale Ebene mit dem Niveau des geometrischen Mittels repräsentiert. Denn es ist dann (18) für $t \neq 0$

$$M(n; t, m) = \left(\frac{{}_n p_{t+m}}{{}_n p_m} \right)^{\frac{1}{nt}} = \left(\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)^{t+m}}{(a_1 a_2 \dots a_n)^m} \right)^{\frac{1}{nt}} \\ = ((a_1 a_2 \dots a_n)^t)^{1/nt} = (\prod a_i)^{1/n},$$

und für $t = m = 0$ wird (18) in allen Klassen, wie nach bekannter Methode gezeigt werden kann (Seite 143), gleich dem geometrischen Mittel. Denn bezeichnen wir mit $[a_j]$ den einzelnen Summanden der Potenzsumme ${}_s p_t$, so erhält man aus (18) mit $t = m = 0$ vorerst

$$M(s; 0, 0) = (\prod [a_j])^{\frac{1}{s \binom{n}{s}}}.$$

Das Produkt $\prod [a_j]$ hat total $\binom{n}{s} s$ Faktoren, von welchen jedoch nur n voneinander verschieden sind, Man kann also auch schreiben

$$\prod [a_j] = \prod a_i^{\binom{n}{s} \frac{s}{n}}$$

und folglich wird

$$(\prod [a_j])^{\frac{1}{s \binom{n}{s}}} = \left(\prod a_i^{\binom{n}{s} \frac{s}{n}} \right)^{\frac{1}{s \binom{n}{s}}} = (\prod a_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Wir erhalten also, wenn wir t und m in (18) stetig variieren, mit $s = 1, 2, \dots, n$ ein Flächenbündel von n Flächen, die sich auf einer horizontalen Linie mit dem Niveau des geometrischen Mittels schneiden. Dieses Bündel stellt ein geometrisch sehr interessantes Gebilde dar, ist jedoch der analytischen Behandlung nicht leicht zugänglich.

Résumé

Les moyennes élémentaires usuelles ne sont que des cas spéciaux de l'infinie multiplicité de possibilités de construire des moyennes à l'aide d'opérations algébriques. Les moyennes exponentielles communes (simples et généralisées) en particulier, forment une sous-classe des moyennes exponentielles combinatoires. Celles-ci forment en tant que fonctions de leurs exposants une intéressante famille de surfaces dont le nombre est égal au nombre des grandeurs dont on veut déterminer la moyenne. Plusieurs sortes d'inégalités peuvent se déduire simplement du comportement moyen de cette construction.

Summary

The usual, elementary mean values are simply special cases of an infinite number of possibilities in which averages can be formed by employing algebraic methods. In particular, the common exponential means (simple and generalised) are a subclass of the combinatorial ones. Conceived as functions of their exponents, they form an interesting bundle of surfaces, the number of which is the same as that of the quantities that are to be averaged. From the relationships within this configuration several propositions on inequalities can be easily derived.

Riassunto

I valori medi elementari usuali sono unicamente casi speciali di una molteplicità infinita di possibilità per formare valori medi algebricamente. In particolare i medi esponenziali comuni (semplici e generalizzati) sono una sottoclasse dei medi esponenziali combinatori. Questi formano, quali funzioni dei loro esponenti, un interessante fascio di superfici, il cui numero è pari al numero delle grandezze da rendere medie. Dai rapporti inerenti a questa formazione derivano in modo semplice diverse inuguaglianze.