

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 66 (1966)

Artikel: Über ein neues Mass zur Beurteilung der Glätte von Punktreihen und
dessen Anwendung in der Ausgleichsrechnung

Autor: Hauger, Otto

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966939>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über ein neues Mass zur Beurteilung der Glätte von Punktreihen und dessen Anwendung in der Ausgleichsrechnung

Von Otto Hauger, Basel

Zusammenfassung

Für die Beurteilung von ausgeglichenen Reihen ist die «Glätte» ein wesentliches Merkmal. Die übliche Methode, mit Hilfe von dritten oder höheren Differenzen die Glätte einer Reihe zu bestimmen, führt nicht immer zu vernünftigen Ergebnissen. In einer neuen Definition des Glättemasses werden die Nachteile des «klassischen» Verfahrens weitgehend ausgemerzt; die Ergebnisse nach klassischer und neuer Methode stimmen in einem überwiegenden Teil überein. Anhand eines Ausgleichsverfahrens (Differenzengleichungsverfahren) wird das neue Glättemass praktisch erprobt. Die Lösung des dabei auftretenden mehrdimensionalen Minimumproblems erfolgt mit Hilfe von zwei numerischen Rechenverfahren, die auf einem Computer vom Typ IBM 1620 durchgeführt werden. Die Berechnungen (Sterbetafel SM 1939/44) zeigen, dass das neue Glättemass im allgemeinen vernünftige Werte liefert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	69
<i>A: Die Glätte einer Reihe</i>	
2. Die verschiedenen Definitionen der Glätte.....	70
2.1. Die klassischen Definitionen	70
2.2. Die Glätte einer Kurve nach Bizley	73
3. Bedingungen für ein allgemeines Glättemass für Reihen	75
4. Vorstufen zu einem neuen Glättemass	76
4.1. 1. Versuch	76
4.2. 2. Versuch	80

5. Ein neues Glättemass für diskrete Reihen	83
5.1. Definition	83
5.2. Eigenschaften	86
6. Die Koordinatenformeln und deren Folgerungen	89
6.1. Allgemeine Formeln	89
6.2. Das Verhalten der diskreten Krümmung und Glätte beim Übergang in den kontinuierlichen Bereich	91
6.3. Spezialisierung	98
7. Numerische Beispiele	100
8. Probleme der praktischen Anwendung	105
8.1. Die Wahl der Ersatzreihe	105
8.2. Die globale Glätte einer Reihe	108

*B: Die Ausgleichung von rohen Daten mit Hilfe des DGV
(Differenzengleichungsverfahren)*

9. Das Prinzip der Ausgleichung	110
9.1. Das allgemeine Differenzengleichungsverfahren (DGV)	110
9.2. Die theoretische Lösung der Minimalbedingung	112
10. Numerische Methoden zur Lösung der Minimalbedingung	114
10.1. Ein gemischtes Verfahren (GEM-Verfahren)	114
10.2. Das gesteuerte Linearisierungsverfahren (GELI-Verfahren)	120
11. Die Durchführung der Verfahren auf dem Computer IBM 1620	122
11.1. Ergänzende Formeln	122
11.2. Die Programme der einzelnen Verfahren	124
12. Die Ausgleichung der Sterbetafel SM 1939/44	125
12.1. Untersuchung über die Eindeutigkeit der Lösung	125
12.2. Die Ausgleichung zwischen den Altern 80 und 100	126
12.3. Die Ausgleichung zwischen den Altern 3 und 100	143
13. Zusammenfassung	155
Literaturverzeichnis	157

1. Einleitung

Die für die Beurteilung einer ausgeglichenen Reihe massgebenden Merkmale sind ihre Glätte und ihre Abweichungen von den rohen Beobachtungen. Unser Augenmerk richtet sich in dieser Arbeit ausschliesslich auf das erste Merkmal, auf die Glätte.

In der Literatur, die sich mit der Ausgleichung und deren Beurteilung befasst, sind eingehende Betrachtungen und Untersuchungen über die Glätte nur vereinzelt vorhanden. Natürlich ist das darauf zurückzuführen, dass die übliche Methode, mit Hilfe von dritten oder höheren Differenzen die Glätte einer Reihe zu messen, im allgemeinen als befriedigend anerkannt wird. Diese Methode ist äusserst einfach in ihrer Anwendung, und sie führt bei Ausgleichungen im Versicherungswesen fast immer zu vernünftigen Ergebnissen. Der englische Mathematiker Bizley [1]¹⁾ hat jedoch in seiner Arbeit «A Measure of Smoothness and some Remarks on a new Principle of Graduation» die Mängel dieses klassischen Masses aufgezeigt, und es ist ihm gelungen, ein neues Glättemass zu definieren, welches diese Mängel vermeidet. Die originelle Arbeit von Bizley behandelt jedoch nur kontinuierliche Kurven.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es, für den für die Praxis viel interessanteren Fall der diskreten Reihe ein Glättemass zu finden, welches nicht mehr mit den Mängeln des klassischen Masses behaftet, jedoch in der Anwendung diesem ebenbürtig ist.

Das Differenzengleichungsverfahren, das die ausgeglichenen Werte in der Weise bestimmt, dass die Summe aus der Glätte der ausgeglichenen Reihe und ihren quadratischen Abweichungen von den rohen Daten minimal wird, erlaubt es, das neue Glättemass direkt in einem Ausgleichsprozess zu verwenden. Im allgemeinen ist dieses Minimumproblem nur mit Hilfe numerischer Methoden zu lösen. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden solche Verfahren beschrieben, deren praktische Durchführung jedoch nur mittels einer elektronischen Rechenmaschine möglich ist. Für derartige Berechnungen stand uns der Computer IBM 1620 (60 K) im Rechenzentrum der Universität Basel zur Verfügung.

¹⁾ Die in eckige Klammern [] gesetzten Zahlen weisen auf das Literaturverzeichnis hin.

A: Die Glätte einer Reihe

2. Die verschiedenen Definitionen der Glätte

2.1. Die klassischen Definitionen

Bevor wir uns mit den klassischen Definitionen der Glätte befassen, wollen wir die beiden Begriffe «Reihe» und «Kurve», die wir im folgenden immer wieder verwenden werden, definieren.

Eine «Reihe» ist eine Folge von reellen Zahlenpaaren (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, n$, deren Reihenfolge durch den Index i genau festgelegt ist. Diese Zahlenpaare lassen sich als Punkte in der euklidischen Ebene darstellen.

Unter einer «Kurve» verstehen wir die Menge aller Zahlenpaare $(x(t), y(t))$, wobei t alle Werte des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ annimmt. $x(t)$ und $y(t)$ sind reelle, mindestens dreimal stetig differenzierbare Funktionen. Wir können eine solche Kurve auch als Spur eines Weges in der euklidischen Ebene auffassen.

Es ist allgemein üblich, als lokales Glättemass einer Reihe die absoluten Beträge oder auch die Quadrate von dritten oder höheren Differenzen zu verwenden; also

$$|\Delta^3 y_i| \quad \text{oder} \quad (\Delta^3 y_i)^2.$$

Die entsprechenden Masse für eine Kurve sind

$$\left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right| \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2.$$

Die Summen

$$\sum |\Delta^3 y_i| \quad \text{oder} \quad \sum (\Delta^3 y_i)^2$$

über die ganze Reihe bzw. die Integrale

$$\int \left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right| ds \quad \text{oder} \quad \int \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 ds$$

über die ganze Kurve definieren das globale Glättemass der Reihe bzw. der Kurve. Dabei ist die Reihe bzw. die Kurve um so glätter,

je kleiner diese Werte ausfallen. Diese Glättemasse wollen wir im weiteren als die klassischen bezeichnen.

Da mit steigenden Werten die Glätte abnimmt, sind diese Grössen im eigentlichen Sinne des Wortes keine Glättemasse. Sie messen die Abweichungen von der idealen Glätte, und es wäre deshalb viel logischer, von Unglättemassen zu reden. Trotz dieser sprachlichen Unlogik wollen wir weiterhin den Ausdruck Glättemass dafür verwenden.

Viele Mathematiker und Statistiker ([2], [3], [4], [5]) sind der Ansicht, dass diese klassischen Glättemasse die in der Praxis gestellten Ansprüche zur Genüge befriedigen. Die folgenden Überlegungen, die teilweise der Arbeit von Bizley [1] entnommen sind, zeigen deutlich, dass sie nicht immer vernünftige Ergebnisse liefern müssen.

Betrachten wir die Funktion $y = e^x$ ($x > 0$), so ergibt das lokale klassische Mass $\left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right|$ im Punkt (x, e^x) den Wert e^x . Mit wachsendem x steigt diese Grösse, d.h. die Kurve wird immer weniger glatt. Wenn wir bedenken, dass diese Kurve mit zunehmendem x immer weniger von einem geradlinigen, also von einem ideal glatten Verlauf abweicht, so müssen wir zugeben, dass das klassische Mass in diesem Falle ungeeignet ist.

Die dritte Ableitung der Umkehrfunktion $x = \ln y$ ($y > 1$) hat den Wert $2/y^3$.

Der Verlauf der Glätte dieser Funktion, welche die gleiche Kurve wie oben darstellt, ist in dieser Form durchaus vernünftig. Für den Punkt (x, e^x) erhalten wir den Glättewert $2/e^{3x}$. Je nachdem, von welchem Standpunkt aus die Kurve betrachtet wird, liefert das klassische Glättemass einmal den Wert e^x und einmal den Wert $2/e^{3x}$.

Im nächsten Beispiel liegen die Punkte der Reihe, deren lokale Glätte $\left| \Delta^3 y_i \right|$ wir messen wollen, auf der Kurve

$$y = \frac{1000}{1000 - x}.$$

Wie die Tabelle 1 zeigt, nimmt auch in diesem Falle das Glättemass immer mehr zu, je stärker sich der Verlauf der Reihe einer Geraden nähert.

Tabelle 1

x	$y = \frac{1000}{1000 - x}$	Δy	$\Delta^2 y$	$ \Delta^3 y $
994	166,7			
995	200	33,3		
996	250	50	16,7	16,6
997	333,3	83,3	33,3	50,1
998	500	166,7	83,4	249,9
999	1000	500	333,3	

Aus den beiden Beispielen sehen wir, dass die klassischen Masse nicht mehr genügen, sobald der Verlauf der Kurve bzw. der Reihe zu steil wird.

Neben diesen wichtigsten Glättemassen gibt es noch weitere Kriterien, welche für die Beurteilung der Glätte vorgeschlagen worden sind.

So vertritt Ammeter [5] die Auffassung, dass jede Kurve, die sich durch einen analytischen Ausdruck darstellen lässt, glatt sei, und dass es, wie er auf Seite 32 hinzufügt, «... wohl keinen Sinn (hat), den Unterschied in der Glätte zu untersuchen, welcher zwischen zwei analytischen Kurven, z.B. Parabel und Exponentialkurve, besteht». Natürlich ist es zwecklos, sich über die Glätte einer Kurve zu unterhalten, wenn die Wahl des Kurventyps gar nicht mehr zur Diskussion steht. Hingegen kommt es insbesondere auch im Versicherungswesen häufig vor, dass wir aus mehreren Kurventypen einen auswählen müssen. In einem solchen Falle ist die Frage nach der Glätte der einzelnen Kurven durchaus berechtigt.

Nach Henderson [2] weisen Kurven, welche wenige Parameter in ihrem formelmässigen Aufbau besitzen, einen glatten Verlauf auf. Ebenso vertritt Barnett [6] einen ähnlichen Gedanken, wenn er eine Reihe, die möglichst nahe an den Verlauf einer einfachen mathematischen Funktion kommt, als glatt bezeichnet.

Unserer Ansicht nach lassen alle diese Kriterien dem subjektiven Empfinden einen viel zu grossen Spielraum, und sie sind für quantitative Messungen der Glätte nicht geeignet.

Ein weiteres Mass, auf das Niedermann [7] hingewiesen hat, verlangt von einer glatten Reihe, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(\Delta^{k+1}y_i)^2 \leq (\Delta^k y_i)^2 \quad \text{für alle } i \text{ und } k. \quad (1)$$

oder
$$(\Delta^{k+1}y_i)^2 \leq (\Delta^k y_{i+1})^2$$

Wie wir aus den weiteren Überlegungen sehen werden, ist die Bedingung (1) nur für einen kleinen Teil aller glatten Reihen erfüllt.

Wir betrachten eine Reihe, deren k -te Differenzen an irgendeiner Stelle mit Ausnahme der Randpunkte ein lokales Extremum besitzen. Es existieren also drei Werte $\Delta^k y_m$, $\Delta^k y_{m+1}$ und $\Delta^k y_{m+2}$ derart, dass entweder

$$\Delta^k y_m < \Delta^k y_{m+1} > \Delta^k y_{m+2}$$

oder
$$\Delta^k y_m > \Delta^k y_{m+1} < \Delta^k y_{m+2} \quad \text{gilt.}$$

k kann die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen, wobei wir unter $\Delta^0 y_i$ den Wert y_i verstehen.

Ein derartiges Verhalten ist beispielsweise dann gegeben, wenn die Reihe an irgendeiner Stelle mit Ausnahme der Randpunkte ein lokales Maximum oder Minimum oder einen Wendepunkt besitzt. Es ist wohl selbstverständlich, dass auch solche Reihen glatt sein können.

Ist $\Delta^k y_{m+1}$ ein Extremum im obigen Sinne, dann haben die beiden Grössen $\Delta^{k+1} y_{m+1}$ und $\Delta^{k+1} y_m$ verschiedene Vorzeichen. Berücksichtigen wir die Gleichung

$$\Delta^{k+2} y_m = \Delta^{k+1} y_{m+1} - \Delta^{k+1} y_m,$$

so folgt
$$(\Delta^{k+2} y_m)^2 > (\Delta^{k+1} y_m)^2,$$

und
$$(\Delta^{k+2} y_m)^2 > (\Delta^{k+1} y_{m+1})^2,$$

d.h. die Bedingung (1) ist nicht erfüllt, womit gezeigt ist, dass auch dieses Kriterium nur in beschränktem Masse Gültigkeit besitzt.

2.2. Die Glätte einer Kurve nach Bizley

Der englische Mathematiker Bizley [1] hat, so scheint es uns, das Wesen der Glätte richtig erkannt. Er hat die folgende einfache und treffende Überlegung gemacht.

Stellen wir uns vor, ein Auto fahre mit konstanter Geschwindigkeit auf einem mit hohen Hecken flankierten Weg. Der Weg sei überall so breit, dass das Fahrzeug ungehindert passieren kann. Hat der Fahrzeuglenker nur ganz gemächlich am Steuerrad zu drehen, um auf dem Weg zu bleiben, so sagen wir, der Verlauf des Weges sei glatt. Muss er hingegen schnelle Umdrehungen ausführen, so ist die Wegführung unglatt. Etwas präziser ausgedrückt besagt dies:

Der Weg ist lokal um so glatter, je weniger Umdrehungen der Fahrzeuglenker pro Zeiteinheit am Steuerrad ausführen muss.

In die geometrische Sprache übersetzt bedeutet dieser Satz: Je kleiner die Änderung der Krümmung pro Zeiteinheit ist, um so lokal glatter ist die Kurve. Da aber bei konstanter Geschwindigkeit Zeit und Weg proportional verlaufen, lautet nun die endgültige Fassung:

Sei im Punkte P der Kurve die Änderung der Krümmung $d\tilde{\kappa}(P)$ im Wegintervall ds , so ist der Quotient

$$\tilde{z}(P) = \left(\frac{d\tilde{\kappa}(P)}{ds} \right)^2 \quad \text{oder} \quad \tilde{z}(P) = \left| \frac{d\tilde{\kappa}(P)}{ds} \right|$$

das Mass für die lokale Glätte der Kurve im Punkte P , und es gilt: Je kleiner $\tilde{z}(P)$ ist, um so glatter verläuft die Kurve in P .

Für die Beurteilung der globalen Glätte einer ganzen Kurve K verwendet Bizley den Ausdruck

$$\int_K \tilde{z}(P) ds.$$

Waren bei den klassischen Definitionen alle Polynome bis zu einem gewissen Grade ideal glatt, so haben bei der neuen Definition nur der Kreis und die Gerade das Glättemass 0.

Die wichtigste Eigenschaft des neuen Glättemasses, die sich sofort aus der geometrischen Bedeutung herleiten lässt, ist die Invarianz gegenüber Translationen und Rotationen. Bedenken wir, dass die Glätte eine zur Krümmung analoge geometrische Eigenschaft der Kurve ist, so scheint es uns beinahe selbstverständlich, dass diese Invarianz gilt.

Bizley [1] hat gezeigt, dass alle Vorwürfe, die wir in 2.1. gegenüber den klassischen Methoden erhoben haben, für das neue Mass dahinfallen. Es ist ihm jedoch nicht gelungen, ein entsprechendes Mass auch für diskrete Punktreihen zu finden. Wir wollen nun im weiteren versuchen, ein Mass zu entwickeln, das sich vor allem für

Punktreihen eignet. Dabei wollen wir darauf achten, das neue Mass für die Reihen, soweit es möglich ist, in Einklang mit dem Bizleyschen Mass zu bringen.

3. Bedingungen für ein allgemeines Glättemass für Reihen

Wenn wir im nächsten Abschnitt dazu übergehen, ein Glättemass für diskrete Reihen zu suchen, so sind wir uns im klaren darüber, dass dabei noch mehr Unsicherheitsfaktoren vorhanden sind als für kontinuierliche Kurven. Es ist deshalb von Vorteil, einige allgemeine Bedingungen aufzustellen, anhand deren wir wenigstens bis zu einem gewissen Grad prüfen können, ob ein Vorschlag brauchbar oder unbrauchbar ist. Die nachstehenden Bedingungen sind so minimal gehalten, dass sie nur ein rohes Kriterium für die Beurteilung eines Glättemasses abgeben. Schlussendlich müssen wir immer noch auf Grund unserer Erfahrung und unserer Vorstellung von der Glätte entscheiden, ob ein Mass vernünftig ist oder nicht.

Bedingung A

Die Anzahl der benachbarten Werte, welche beim Messen der Glätte in einem Punkt oder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten mitberücksichtigt werden, soll möglichst klein sein.

Wollen wir die Glätte einer Reihe im Punkte P_i oder zwischen den Punkten P_i und P_{i+1} messen, so verlangt diese Bedingung, dass dazu möglichst wenig weitere Punkte miteinbezogen werden müssen. Einmal soll damit vermieden werden, dass der Formelapparat zu umfangreich und zu kompliziert wird. Sodann wird dadurch die Möglichkeit gegeben, die Glätte einer Reihe bis nahe an ihren Anfang und ihr Ende messen zu können. Es wird unser Bestreben sein, analog der klassischen Methode mit vier Punkten ein Glättemass zu definieren.

Bedingung B

Das Glättemass soll invariant sein gegenüber Kongruenztransformationen (Rotation, Translation).

Mit dieser Bedingung erreichen wir, dass zwei Reihen, deren Bilder auf der euklidischen Ebene kongruent sind, den gleichen Glättewert besitzen, unabhängig davon, wo sie auf der Ebene liegen.

Die Glätte ist demnach eine geometrische Eigenschaft der Reihe wie etwa die Winkel zwischen den die einzelnen Punkte der Reihe verbindenden Strecken. Im Gegensatz zum klassischen Mass, das diese Bedingung nicht erfüllt, soll es nun für den Glättewert unwesentlich sein, von welcher Seite aus wir die Reihe betrachten.

Bedingung C

Stark unglatte Reihen sollen einen grossen Glättewert besitzen.

Die Reihen, die wir in der Praxis zu beurteilen haben, sind in den allerwenigsten Fällen stark unglatt. Es sind meistens bereits ausgeglichene und folglich auch mehr oder weniger glatte Wertfolgen. Von einem gewissen Grad der Unglätte an ist es uninteressant, den genauen Glättewert zu kennen. Einzig wichtig in einem solchen Falle ist es, dass das Mass eine stark unglatte Reihe mit einem hohen Glättewert anzeigt. Da uns in diesem Bereich die Erfahrung und die Vorstellung von der Glätte vollständig fehlen, ist es nicht möglich, für stark unglatte Reihen feinere Kriterien anzugeben.

Bedingung D

Im Grenzfalle, wenn die Punkte der Reihe auf einer Kurve gegeneinanderstreben, soll das neue Mass in das Bizleysche Glättemass übergehen.

Da Bizley [1] für Kurven bereits eine befriedigende Lösung gefunden hat, würde es befremden, wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre. Der gegenteilige Fall könnte als Hinweis dafür aufgefasst werden, dass eines der beiden Masse nicht richtig ist.

4. Vorstufen zu einem neuen Glättemass

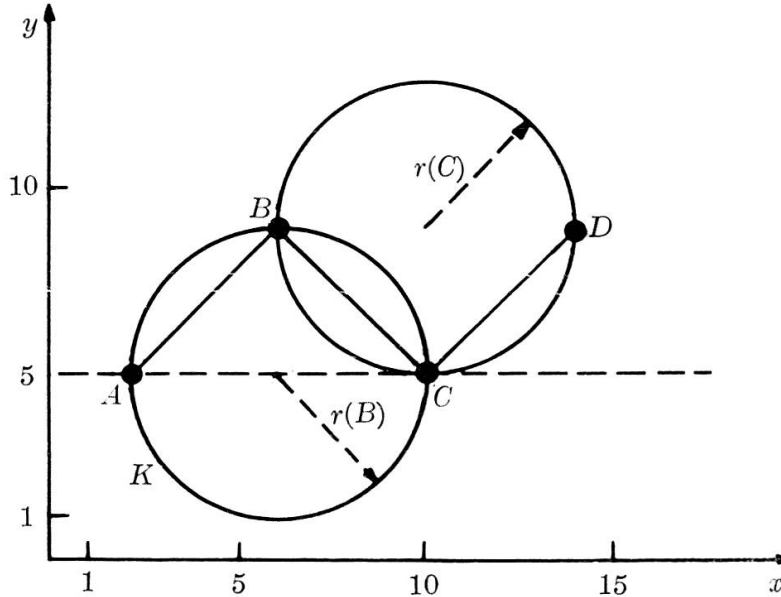
4.1. 1. Versuch

Bei unserem ersten Versuch, ein neues Glättemass zu definieren, wollen wir von der bekannten Tatsache ausgehen, dass in jedem Punkt einer Kurve das Produkt aus Krümmung und Radius des Krümmungskreises gleich 1 ist.

Wir postulieren, dass auch für eine diskrete Reihe die genannte Beziehung zwischen Krümmung und Krümmungsradius gilt.

Durch drei aufeinanderfolgende Punkte A, B, C einer Reihe (siehe Figur 1) ziehen wir einen Kreis K . Lassen wir die Punkte A und C auf einer Kurve gegen B streben, so geht der Kreis K in den Krümmungskreis der Kurve im Punkte B über.

Figur 1



Demnach liegt es nahe, diesen Kreis K als «Krümmungskreis der Reihe im Punkte B » zu definieren. Durch die drei Punkte A, B und C ist der Kreis K eindeutig bestimmt und somit auch die Länge seines Radius $r(B)$.

Mit Hilfe des Postulats, das wir zu Beginn dieses Abschnitts aufgestellt haben, ist es uns möglich, den Betrag der Krümmung $k(B)$ im Punkte B der Reihe anzugeben:

$$|k(B)| = \frac{1}{r(B)}.$$

Für die Bestimmung des Vorzeichens von $k(B)$ mögen wir uns an die folgende Vorschrift halten.

Bewegen wir uns auf der Geraden durch A und C in der Richtung von A nach C , so ist die Krümmung positiv, wenn der Punkt B zu unserer Rechten, negativ, wenn er zu unserer Linken liegt. Beispielsweise ist in Figur 1 $k(B)$ negativ und $k(C)$ positiv. Im weiteren wollen wir in gleicher Weise auch den Radius des Krümmungskreises $r(B)$ mit einem Vorzeichen versehen.

Bizleys Vorschlag, den Ausdruck

$$\left| \frac{\text{Krümmungsänderung}}{\text{Länge des Weges}} \right|$$

für das Glättemass zu verwenden, führt uns bei konsequenter Übertragung vom Kontinuierlichen ins Diskrete auf die Formel für die Glätte $\bar{z}(A, B, C, D)$

$$\bar{z}(A, B, C, D) = \frac{|k(B) - k(C)|}{s}, \quad (2)$$

sofern s die Länge des Weges zwischen B und C bedeutet.

Die Formel (2) definiert die Glätte in irgendeinem Punkte der Reihe zwischen B und C . Wir können sie aber auch als durchschnittliche Glätte der Reihe zwischen B und C auslegen. Folglich berechnet sich nun die «integrale Glätte» zwischen den beiden benachbarten Punkten B und C nach der Formel

$$\int_B^C \frac{|k(B) - k(C)|}{s} ds. \quad (3)$$

Treffen wir die Annahme, dass die durchschnittliche Glätte zwischen B und C konstant ist, so können wir folgendermassen weiterrechnen:

$$(3) = \frac{|k(B) - k(C)|}{s} \int_B^C ds = |k(B) - k(C)|. \quad (4)$$

Anstelle des absoluten Betrags von $k(B) - k(C)$ wollen wir das Quadrat davon verwenden, und es ergibt sich folgende Definition:

Das Glättemass $z(A, B, C, D)$ einer Reihe zwischen den zwei aufeinanderfolgenden Punkten B und C berechnet sich nach der Formel

$$z(A, B, C, D) = (k(B) - k(C))^2. \quad (5)$$

Setzen wir die Krümmungsformel ein, so können wir (5) folgendermassen weiterführen:

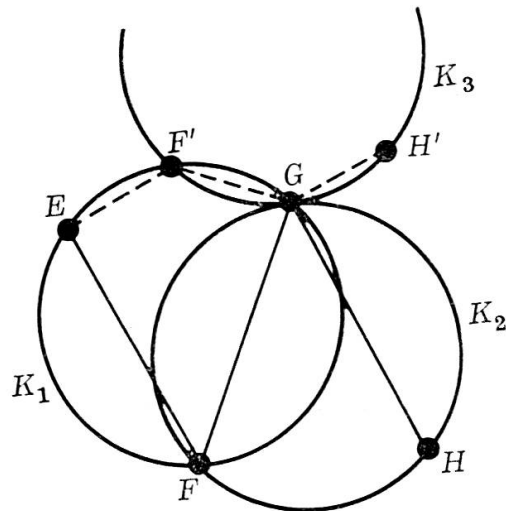
$$z(A, B, C, D) = \left(\frac{1}{r(B)} - \frac{1}{r(C)} \right)^2 = \left(\frac{r(B) - r(C)}{r(B) \cdot r(C)} \right)^2. \quad (6)$$

Somit berechnet sich beispielsweise die Glätte der aus 4 Punkten bestehenden Reihe der Figur 1 wie folgt:

$$\begin{aligned} r(B) &= -4, & r(C) &= 4, \\ \underline{z(A, B, C, D)} &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 = \underline{0,25}. \end{aligned}$$

Um die Glätte zwischen den beiden benachbarten Punkten B und C angeben zu können, benötigen wir die Koordinaten der 4 Punkte A, B, C und D . Damit ist die Anzahl der verwendeten Punkte auf ein Minimum beschränkt worden, und die Bedingung A in 3. ist erfüllt. Das gleiche gilt für die Invarianzbedingung B , da bekanntlich Kreise und Strecken, die einzigen Elemente, die in (5) und (6) verwendet werden, invariant sind gegenüber Kongruenztransformationen. Nach der Art, wie wir zu Beginn dieses Abschnitts die diskrete Krümmung definiert haben, ist leicht zu erkennen, dass auch die Bedingung D erfüllt ist. Es muss dabei nur berücksichtigt werden, dass die Formel (2) bis auf das Quadrieren dem Bizleyschen Glättewert entspricht. Die Bedingung C , die für unglatte Reihen einen hohen Glättewert verlangt, wollen wir etwas genauer untersuchen.

Figur 2



Das in (5) und (6) definierte Glättewert liefert für die Reihe E, F, G, H der Figur 2 den gleichen Wert wie für die Reihe E, F', G, H' , da die Radien der drei Kreise K_1, K_2, K_3 alle gleich gross sind. Dies widerspricht jedoch unserer Vorstellung von der Glätte. Die Reihe E, F, G, H ist bestimmt viel weniger glatt als die Punktfolge E, F', G, H' .

Da es, um auf dem Kreis K_1 von E nach G zu gelangen, zwei Wege gibt, einen über F und einen über F' , ist es nicht verwunderlich, dass die Definition der Glätte in diesem Fall versagt.

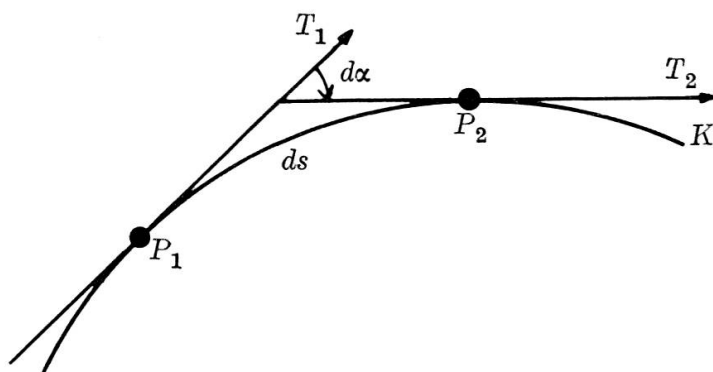
Es besteht kein Zweifel darüber, dass die Unsicherheit und Unkorrektheit eines Glättemasses um so grösser werden, je weiter die Punkte der Reihe auseinander liegen. Über das Verhalten der Reihe zwischen den einzelnen Punkten liegen keine Informationen vor, und wir müssen irgendeine Annahme über den dortigen Verlauf der Reihe treffen. Jedes Mass wird um so vernünftiger und korrekter erscheinen, je mehr Informationen zur Verfügung stehen, das heisst, je kleiner die Abstände der sich folgenden Punkte sind. Die Annahme, die dem ersten Versuch zugrunde liegt, dass die Reihe zwischen den gegebenen Punkten auf einem Kreis liegt, hat zu unbefriedigenden Resultaten geführt.

4.2. 2. Versuch

Die Krümmung einer Kurve ist bekanntlich folgendermassen definiert:

In den beiden Punkten P_1 und P_2 (siehe Figur 3) sind die beiden Tangenten T_1 und T_2 an die Kurve K gezogen. Sie schneiden sich unter einem Winkel $d\alpha$, der, je nachdem ob T_1 im positiven oder im negativen Sinne gedreht werden muss, um in die Richtung von T_2 zu kommen, ein positives oder ein negatives Vorzeichen erhält. Bedeutet ferner ds die Länge des Kurvenstücks zwischen P_1 und P_2 , so strebt der Quotient $d\alpha/ds$ gegen die Krümmung $\tilde{k}(P_1)$ im Punkte P_1 , sofern der Punkt P_2 auf der Kurve K gegen P_1 wandert.

Figur 3



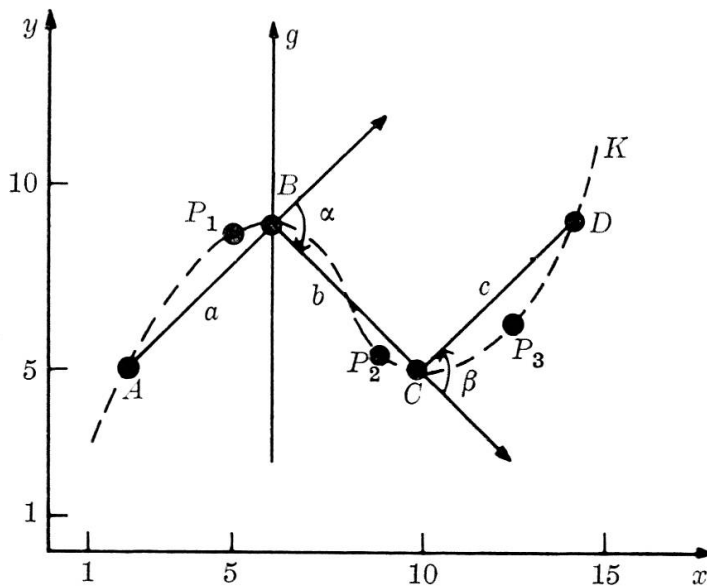
Der Grundgedanke dieser Definition spiegelt sich in dem Ausdruck

$$\lim \frac{\text{Änderung der Tangentenrichtung}}{\text{Weglänge}}$$

wider, und dieser soll auch für eine Definition der Krümmung im Diskreten wegleitend sein, wobei natürlich auf den Grenzübergang verzichtet werden muss.

Jede Kurve K , die durch die Punkte A und B geht (siehe Figur 4), besitzt dazwischen mindestens einen Punkt P_1 , in welchem die Tangente an K die gleiche Richtung aufweist wie die Sekante \overrightarrow{AB} . Die entsprechende Feststellung gilt auch für die Punkte P_2 zwischen B und C und P_3 zwischen C und D . Die Änderung der Tangentenrichtung wird demnach durch die Winkel α und β angezeigt.

Figur 4



Verwenden wir als Weglänge zwischen P_1 und P_2 die Näherung $(a+b)/2$, so lässt sich die Krümmung $k(B)$ der Reihe im Punkte B wie folgt definieren:

$$k(B) = \frac{\alpha}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2\alpha}{a+b}. \quad (7)$$

Das Vorzeichen von α wird wie bei der kontinuierlichen Krümmungsdefinition festgelegt.

Das weitere Vorgehen ist nun gleich wie im 1. Versuch. Für die durchschnittliche Glätte $\bar{z}(A, B, C, D)$ zwischen B und C erhalten wir analog zur Formel (2)

$$\bar{z}(A, B, C, D) = \frac{|k(B) - k(C)|}{s}. \quad (8)$$

Das Glättemass $z(A, B, C, D)$ einer Reihe zwischen den beiden aufeinanderfolgenden Punkten B und C wird analog zu (5) mit Hilfe von

$$z(A, B, C, D) = (k(B) - k(C))^2 \quad (9)$$

berechnet. Verwenden wir die Beziehung (7), so ergibt sich:

$$z(A, B, C, D) = \left(\frac{2\alpha}{a+b} - \frac{2\beta}{b+c} \right)^2. \quad (10)$$

Als Beispiel dazu wollen wir die in Figur 4 gezeichnete Reihe benutzen.

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad a = b = c = 5,66,$$

$$\underline{z(A, B, C, D)} = \left(\frac{-\pi}{11,32} - \frac{\pi}{11,32} \right)^2 = \underline{0,308}.$$

Im Vergleich dazu ergab das im 1. Versuch definierte Glättemass für die gleiche Reihe einen Wert von 0,25 (vgl. Figur 1).

Es lässt sich leicht nachweisen, dass auch für den 2. Versuch die in 3. aufgestellten Bedingungen A und B erfüllt sind. Da wir die Krümmung in Anlehnung an das kontinuierliche Vorbild definiert haben, ist es wenigstens heuristisch sofort einzusehen, dass auch die Bedingung D (Übergang in das Bizleysche Mass) gilt. Auf den genauen Beweis möchten wir verzichten, da sich auch dieser Versuch als nicht ganz befriedigend herausstellen wird. Die Bedingung C , welche für stark unglatte Reihen einen sehr grossen Glättewert vorschreibt, wollen wir etwas näher betrachten.

Bewegt sich der Punkt B in Figur 4 auf der Geraden g nach oben, so wird die Reihe immer weniger glatt. Die Winkel α und β werden dadurch grösser und streben gegen die Werte $-\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$. Dagegen sind die Nenner von (10), $(a+b)$ und $(b+c)$, die durch diesen Vorgang ebenfalls zunehmen, nach oben nicht beschränkt, so dass das Glättemass sehr klein wird, wenn B genügend weit nach

oben rutscht. Somit haben wir für eine stark unglatte Reihe einen kleinen Glättewert gefunden, und wir müssen auch diesen Versuch als misslungen betrachten.

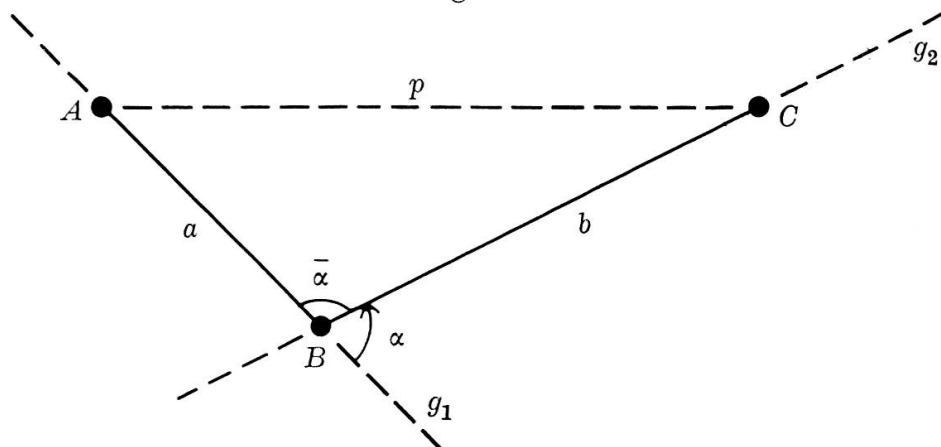
5. Ein neues Glättemass für diskrete Reihen

5.1. Definition

Bei der Herleitung des neuen Glättemasses wollen wir uns nicht mehr in dem Masse, wie wir es in den früheren Versuchen getan haben, vom kontinuierlichen Vorbild leiten lassen. Vor allem wollen wir nicht wieder die kontinuierliche Krümmungsdefinition in irgendeiner Form zu kopieren versuchen.

Wie vorher soll die Krümmung durch drei Punkte bestimmt sein. Um die Invarianzbedingung im Abschnitt 3. nicht zu verletzen, stehen uns für die Krümmungsdefinition lediglich die Strecken und Winkel des durch diese drei Punkte gebildeten Dreiecks zur Verfügung. Natürlich sollen möglichst wenige dieser Elemente verwendet werden, um eine einfache Formel zu gewährleisten.

Figur 5



Die Winkel beim Punkt B (siehe Figur 5) zeigen an, ob die Reihe zwischen A und C flach verläuft oder ob sie dort eine starke Spitze aufweist. Je grösser der Aussenwinkel α ist, um so spitzer verläuft die Reihe zwischen A und C , also um so grösser muss das Krümmungsmass ausfallen. Geht α gegen π , so soll die Krümmung unendlich gross werden.

Ist $\alpha = 0$, d.h. liegen die drei Punkte auf einer Geraden, so soll auch die Krümmung den Wert 0 haben. Eine einfache Funktion, die ein derartiges Verhalten zeigt, ist $\operatorname{tg} \alpha/2$.

Bestünde die Formel für die diskrete Krümmung ausschliesslich aus Funktionen von Winkeln, so würden geometrisch ähnliche Konfigurationen die gleichen Krümmungswerte besitzen. Auf Grund der folgenden Überlegung erkennen wir jedoch, dass dies nicht richtig sein kann.

Wir verschieben die Punkte A und C in Figur 5 auf den Geraden g_1 und g_2 derart gegen den Punkt B hin, dass das Verhältnis a/b konstant bleibt. Die dabei entstehende Figur ist immer ähnlich zum Ausgangsdreieck. Aus Analogie zur kontinuierlichen Krümmungsdefinition muss durch diesen Vorgang die diskrete Krümmung immer grösser werden, da der «Weg», während welchem die Richtungsänderung erfolgt, immer kleiner wird, die Richtungsänderung α dabei aber unverändert bleibt.

Das diskrete Krümmungsmass trägt auf einfache Art diesem Verhalten Rechnung, wenn es proportional zu $1/(a+b)$ oder zu $1/p$ gesetzt wird. Unter Berücksichtigung der vorher erwähnten Abhängigkeit von α erhalten wir somit für die Definition der Krümmung die beiden einfachen Formeln:

$$k(B) = \bar{m} \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{a+b} \quad (11)$$

oder

$$k(B) = m \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{p}, \quad (12)$$

\bar{m} und m sind Proportionalitätsfaktoren, deren Grösse wir noch festlegen müssen.

Wenn wir in Figur 5 den Punkt B bei festem A und C senkrecht zu AC nach unten verschieben, so strebt die Krümmung nach (11) gegen einen endlichen Grenzwert. Es gilt nämlich (siehe Figur 5):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{a+b} = \frac{\operatorname{ctg} \bar{\alpha}/2}{a+b} = \frac{1 + \cos \bar{\alpha}}{\sin \bar{\alpha} (a+b)}.$$

Ist r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC , so ist nun mit Hilfe der Sehnenformel $p = 2r \sin \bar{\alpha}$ leicht zu beweisen, dass (11) beschränkt bleibt. Wir haben jedoch verlangt, dass, wenn α gegen π

geht, die Krümmung unendlich gross werden muss. Die Formel (11) können wir somit ausschalten, und es bleibt als einzige Lösung in dieser einfachen Form:

$$k(B) = m \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{p}. \quad (13)$$

Die Konstante m bestimmen wir so, dass (13) in die Krümmungsdefinition für eine Kurve übergeht, falls die drei Punkte A , B und C auf einer solchen gegeneinander streben. Unter diesen Umständen ergibt sich für m der Wert 4. Den Beweis dafür werden wir im Abschnitt 6.2. erbringen.

Die diskrete Krümmung $k(B)$ ist demnach durch die folgende Formel (14) definiert:

$$k(B) = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha/2}{p}. \quad (14)$$

Das Vorzeichen von $k(B)$ wird gleich festgesetzt wie im ersten Versuch (siehe 4.1.).

Die durchschnittliche Glätte $\bar{z}(A, B, C, D)$ zwischen B und C ergibt sich analog zu (2) und (8) aus

$$\bar{z}(A, B, C, D) = \frac{|k(B) - k(C)|}{b}. \quad (15)$$

Das Glättemass $z(A, B, C, D)$ erhalten wir analog zu (5) und (9) aus

$$z(A, B, C, D) = (k(B) - k(C))^2. \quad (16)$$

Bezeichnen wir die Punkte der Reihe mit A_i , die Aussenwinkel α bei A_i mit α_i sowie die Strecken p zwischen A_{i-1} und A_{i+1} mit p_i , so ergibt sich für die Gesamtglätte einer aus n Punkten bestehenden Reihe R_n die Formel

$$\begin{aligned} Z(R_n) &= \sum_{i=1}^{n-3} z(A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}) = \sum_{i=2}^{n-2} (k(A_i) - k(A_{i+1}))^2 \\ &= \sum_{i=2}^{n-2} \left(\frac{4 \operatorname{tg} \alpha_i/2}{p_i} - \frac{4 \operatorname{tg} \alpha_{i+1}/2}{p_{i+1}} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Sei a_i die Strecke zwischen A_i und A_{i+1} , so erhalten wir mit der Formel

$$ZM(R_n) = \frac{Z(R_n)}{\sum_{i=2}^{n-2} a_i} \quad (18)$$

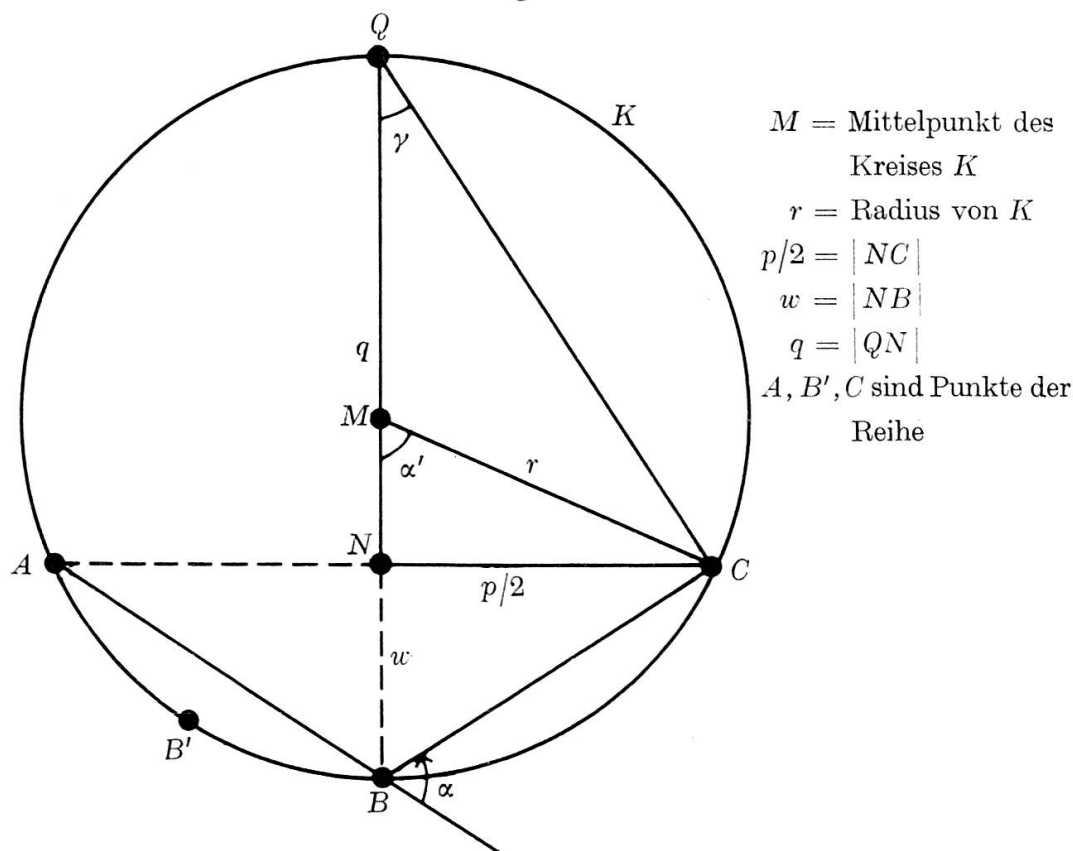
ein Mass für die durchschnittliche Glätte der Reihe. Der Ausdruck (18) lehnt sich an eine Formel aus dem kontinuierlichen Bereich an. In dieser wird der Durchschnitt einer Funktion längs eines Weges berechnet aus dem Integral über diese Funktion längs des Weges dividiert durch die Länge des Weges.

5.2. Eigenschaften

Bevor wir prüfen, ob alle in 3. aufgestellten Bedingungen erfüllt sind, wollen wir eine weitere geometrische Eigenschaft der Krümmungsformel (14) kennenlernen.

Alle Punkte B' (siehe Figur 6), die unterhalb der Strecke $|AC|$ auf dem Kreis K liegen, besitzen zusammen mit A und C die gleiche Krümmung wie A, B, C , da ihre Aussenwinkel alle gleich α sind.

Figur 6



In der Figur 6 gelten die folgenden Winkelbeziehungen:

$$\alpha' = \alpha; \quad \gamma = \alpha'/2 = \alpha/2.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lässt sich die Krümmung (14) umformen zu

$$|k(B')| = |k(B)| = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha/2}{p/2} = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{p/2} = \frac{2}{p/2} \frac{p/2}{q} = \frac{2}{q}. \quad (19)$$

Oder mit $q = 2r - w$

$$|k(B')| = |k(B)| = \frac{1}{r - w/2}. \quad (20)$$

Diese Formel (20) erlaubt es uns, eine Verbindung zum ersten Versuch herzustellen. Der Krümmungsradius r im ersten Versuch wird in (20) durch das Korrekturglied $w/2$ verkleinert. Diese Korrektur ist jedoch nur dann wirksam, wenn die drei Punkte A , B und C stark von einem geradlinigen Verlauf abweichen. Die Formel (20) kann auch als eine zum Kontinuierlichen analoge Beziehung zwischen Krümmung und Krümmungsradius aufgefasst werden. In erster Näherung ist K der Krümmungskreis, und die Krümmung ist umgekehrt-proportional zu dessen Radius r .

Wir müssen nun zeigen, dass die im Abschnitt 3. aufgestellten Bedingungen auch tatsächlich erfüllt sind. Weil das Glättemass mittels 4 Punkten definiert wird und weil die Krümmungsdefinition (14) nur Strecken und Winkel des Dreiecks ABC verwendet, sind die Bedingungen A und B erfüllt. Das gleiche gilt auch für D (Grenzübergang ins Kontinuierliche). Den Beweis dafür werden wir allerdings erst im Abschnitt 6.2. erbringen. Es bleibt also noch die Bedingung C zu diskutieren, welche für eine stark unglatte Reihe einen grossen Glättewert verlangt.

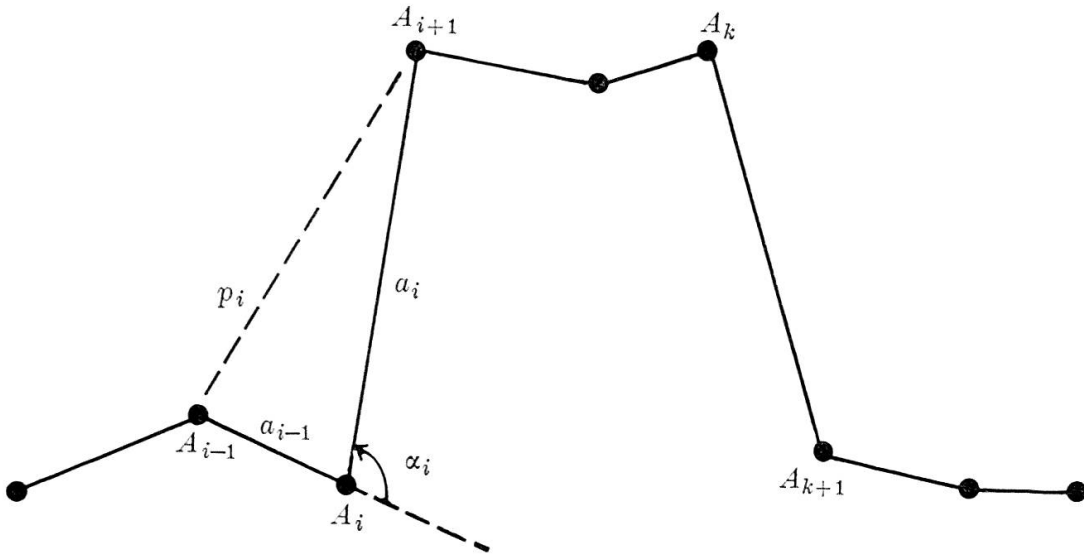
Obwohl für eine unglatte Reihe das neue Mass (17) im allgemeinen sehr gross wird, gibt es doch gewisse spezielle unglatte Konfigurationen, für welche (17) kein befriedigendes Resultat liefert. Treten in einer Reihe grosse einmalige Sprünge auf, wie etwa in Figur 7 zwischen A_i und A_{i+1} oder zwischen A_k und A_{k+1} , und folgt nicht unmittelbar danach ein Rücksprung, so zeigt das Glättemass einen zu kleinen Wert an. Da dieser Retoursprung fehlt, sind die Aussenwinkel nirgends viel grösser als $\pi/2$; die Strecken p_i können jedoch unverhältnismässig gross sein, was beides zur Folge hat, dass die Krümmungen und somit auch die Glättewerte in diesen Bereichen klein bleiben.

Für diese Spezialfälle ist es deshalb von Vorteil, die Krümmung $k(A_i)$ mit einem Korrekturfaktor f von der Form

$$f = \frac{a_{i-1}^2 + a_i^2}{2 a_{i-1} a_i} \quad (21)$$

zu versehen (siehe Figur 7). Dieser Faktor hat die Wirkung, dass bei starker Unsymmetrie des Dreiecks A_{i-1}, A_i, A_{i+1} , d.h. wenn $\text{Min}(a_{i-1}, a_i)$ viel kleiner ist als $\text{Max}(a_{i-1}, a_i)$, die Krümmung nicht mehr so sehr von α_i und p_i (also auch von α_i und $\text{Max}(a_{i-1}, a_i)$) als vielmehr von α_i und $\text{Min}(a_{i-1}, a_i)$ abhängt. Etwas ungenauer ausgedrückt besagt dies, dass durch den Faktor f in der Krümmung der Punkt, welcher A_i am nächsten liegt, mehr berücksichtigt wird als der von A_i weiter entfernte.

Figur 7



Seien k_f und z_f das Krümmungs- bzw. Glättmass, in welchen der Faktor f berücksichtigt ist, so ergeben sich analog zu (14) und (16) die Formeln

$$k(A_i) = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha_i / 2}{p_i} \frac{a_{i-1}^2 + a_i^2}{2 a_{i-1} a_i}; \quad (22)$$

$$z_f(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}) = (k_f(A_i) - k_f(A_{i+1}))^2. \quad (23)$$

Es ist klar, dass dieser Faktor f den ganzen Formelapparat grösser und komplizierter macht. Wir wollen deshalb nur dann von ihm Gebrauch machen, wenn es wirklich nötig ist, d.h. wenn wir eine

stark unglatte Reihe zu beurteilen haben. Die praktischen Beispiele in den Abschnitten 7. und 12.2. werden zeigen, dass wenn eine Reihe einigermassen glatt verläuft, die Unterschiede zwischen den Glättewerten mit und ohne Berücksichtigung des Korrekturfaktors unbedeutend sind.

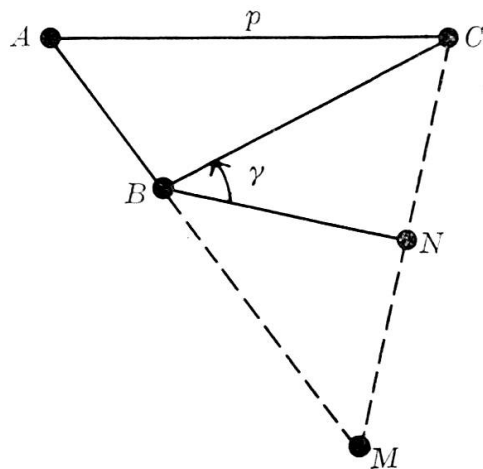
6. Die Koordinatenformeln und deren Folgerungen

6.1. Allgemeine Formeln

Aus dem Kreis der vielen Formeln, die es erlauben, das Glättemass direkt aus den Koordinaten der Reihenpunkte zu gewinnen, möchten wir eine auswählen, die, wie es uns scheint, sich vor allem für die Berechnung mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten gut eignet.

Die Idee, nach der wir in der Krümmungsdefinition (14) den $\operatorname{tg} \alpha/2$ bestimmen wollen, lässt sich folgendermassen kurz skizzieren.

Figur 8



A , B und C seien drei aufeinanderfolgende Punkte einer Reihe (siehe Figur 8). In B wollen wir die Krümmung bestimmen. Der Punkt M wird auf der Geraden durch A und B so gewählt, dass die beiden Strecken $|BC|$ und $|BM|$ gleich gross sind. Setzen wir den Hilfspunkt N auf der Geraden \overrightarrow{MC} genau in die Mitte zwischen M und C , so ist der Winkel γ bei B gleich dem gesuchten Winkel $\alpha/2$, und es gilt

$$\operatorname{tg} \alpha/2 = \operatorname{tg} \gamma = \frac{|CN|}{|BN|}. \quad (24)$$

Die Koordinaten der drei Reihenpunkte A , B und C wollen wir mit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bezeichnen.

Die Koordinaten des Punktes M , (x, y) , müssen die folgenden zwei Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{Geradengleichung } \overrightarrow{AB}: (y-y_2)(x_2-x_1) - (x-x_2)(y_2-y_1) &= 0, \\ |BM| = |BC|: (y-y_2)^2 + (x-x_2)^2 &= (y_3-y_2)^2 + (x_3-x_2)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Das System (25) besitzt, da es quadratisch ist, zwei Lösungen. Der Punkt M kann auf beiden Seiten von B auf der Geraden \overrightarrow{AB} liegen. Da aber der in Figur 8 gezeichnete Punkt M für unsere Zwecke der einzig richtige ist, müssen wir zu (25) eine weitere Bedingung hinzufügen. Die Forderung

$$|AM| = \text{Max} \quad (26)$$

führt zusammen mit (25) zur folgenden Lösung:

$$\begin{aligned} x &= x_2 + (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}, \\ y &= y_2 + (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Als Abkürzung setzen wir

$$q = \sqrt{\frac{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}. \quad (28)$$

Für die Koordinaten (\bar{x}, \bar{y}) des Punktes N folgt somit:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} q, \\ \bar{y} &= \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} q. \end{aligned} \quad (29)$$

Bedenken wir, dass

$$p = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

ist, so können wir mit Hilfe von (24) den Betrag der Krümmung $k(B)$ angeben: (30)

$$|k(B)| = 4 \sqrt{\frac{(x_2 - x_3 + (x_2 - x_1)q)^2 + (y_2 - y_3 + (y_2 - y_1)q)^2}{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) \cdot [(x_3 - x_2 + (x_2 - x_1)q)^2 + (y_3 - y_2 + (y_2 - y_1)q)^2]}}.$$

Setzen wir in der Geradengleichung (25) den Punkt C (x_3, y_3) ein, so ergibt sich:

$$(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = l. \quad (31)$$

Die Grösse l besitzt nur dann den Wert null, wenn C auf der Geraden \overrightarrow{AB} liegt. Das Vorzeichen von l gibt darüber Auskunft, ob der Punkt C rechts oder links der Geraden \overrightarrow{AB} liegt.

Wählen wir für die Krümmung $k(B)$ das gleiche Vorzeichen wie l , so ist zusammen mit (30) die Krümmung eindeutig bestimmt. Wir erhalten somit das gleiche Vorzeichen wie im ersten Versuch (siehe 4.1.).

Selbstverständlich liessen sich weitere Formeln für die Krümmung angeben, vor allem solche, in welchen das Vorzeichen mit-enthalten ist. Jedoch sind diese Formeln etwas komplizierter als (30) und besitzen, da mindestens einmal die Hessesche Normalform der Geraden verwendet wird, meistens ein Wurzelzeichen mehr. Da auch elektronische Rechenanlagen relativ viel Zeit für das Wurzelziehen beanspruchen, haben wir einer solchen Darstellung die Formeln (30) und (31) vorgezogen.

Für den Korrekturfaktor f (siehe (21)) erhalten wir die Formel

$$f = \frac{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}{2 \sqrt{[(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2] \cdot [(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2]}}. \quad (32)$$

Die endgültige Berechnung der Glätte einer Reihe R_n bestehend aus den n Punkten A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ergibt sich aus

$$Z(R_n) = \sum_{i=2}^{n-2} (k(A_i) - k(A_{i+1}))^2, \quad (33)$$

wobei Betrag und Vorzeichen von $k(A_i)$ aus den Gleichungen (30), (31) und evtl. (32) entnommen werden können.

6.2. Das Verhalten der diskreten Krümmung und Glätte beim Übergang in den kontinuierlichen Bereich

Wir wollen uns in diesem Abschnitt überlegen, wie sich die diskrete Krümmung und Glätte verhalten, wenn die Punkte einer Reihe auf einer Kurve gegeneinander streben.

Die drei aufeinanderfolgenden Punkte A , B und C einer Reihe gehen auf einer Kurve K , welche durch $(x(t), y(t))$ gegeben ist, gegen den Punkt P , der auf K zwischen A und C liegt. Die Koordinaten dieser Punkte haben die Form:

$$\begin{aligned} A: (x(t_1), y(t_1)) &= (x_1, y_1), \\ B: (x(t_2), y(t_2)) &= (x_2, y_2), \quad (t_1 < t_2 < t_3), \\ C: (x(t_3), y(t_3)) &= (x_3, y_3), \quad (t_1 < t_2 < t_3), \\ P: (x(t_0), y(t_0)). \end{aligned}$$

Führen wir die folgenden Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} x' &= x'(t_2), \quad x'' = x''(t_2), \quad x''' = x'''(t_2), \\ y' &= y'(t_2), \quad y'' = y''(t_2), \quad y''' = y'''(t_2), \end{aligned}$$

so gilt für die kontinuierliche Krümmung $\tilde{k}(B)$ im Punkte B die folgende Formel (34) (vgl. beispielsweise A. Ostrowski, «Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung», Bd. 2, p. 397):

$$\tilde{k}(B) = \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (34)$$

Wir müssen zeigen, dass, wenn A , B und C gegen P streben, sich die Grösse m in

$$k(B) = m \frac{\operatorname{tg} \alpha / 2}{p}$$

so bestimmen lässt, dass $|k(B)| - |\tilde{k}(B)|$ gegen 0 geht (siehe 5.1. (13)).

Wir gehen aus von der Formel (30), die wir in etwas anderer Art schreiben wollen:

$$|k(B)| = m \sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{N^2}} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } h_1^2 &= [(x_3 - x_2) q_1 - (x_2 - x_1) q_2]^2, \\ h_2^2 &= [(y_3 - y_2) q_1 - (y_2 - y_1) q_2]^2, \\ N^2 &= \{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\} \\ &\quad \cdot \{[(x_3 - x_2) q_1 + (x_2 - x_1) q_2]^2 + [(y_3 - y_2) q_1 + (y_2 - y_1) q_2]^2\}, \\ q_1^2 &= (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2, \\ q_2^2 &= (y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Für die folgenden Überlegungen setzen wir voraus, dass $x(t)$ und $y(t)$ mindestens fünfmal differenzierbar seien. Nach der Taylorschen Entwicklung im Punkte (x_2, y_2) gilt dann:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (t_2 - t_1) y' - \frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2 y'' + \frac{1}{6} (t_2 - t_1)^3 y''' + 0[(t_2 - t_1)^4], \\ x_2 - x_1 &= (t_2 - t_1) x' - \frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2 x'' + \frac{1}{6} (t_2 - t_1)^3 x''' + 0[(t_2 - t_1)^4], \\ y_3 - y_2 &= (t_3 - t_2) y' + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 y'' + \frac{1}{6} (t_3 - t_2)^3 y''' + 0[(t_3 - t_2)^4], \\ x_3 - x_2 &= (t_3 - t_2) x' + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 x'' + \frac{1}{6} (t_3 - t_2)^3 x''' + 0[(t_3 - t_2)^4]. \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$\begin{aligned} q_1^2 &= (t_2 - t_1)^2 (x'^2 + y'^2) - (t_2 - t_1)^3 (y' y'' + x' x'') \\ &\quad + (t_2 - t_1)^4 \left[\frac{1}{3} (y' y''' + x' x''') + \frac{1}{4} (y''^2 + x''^2) \right] + 0[(t_2 - t_1)^5]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Entwicklung erhalten wir:

$$\begin{aligned} q_1 &= (t_2 - t_1) S - \frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2 T + (t_2 - t_1)^3 U + 0[(t_2 - t_1)^4], \quad (37) \\ S &= (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}, \\ T &= \frac{y' y'' + x' x''}{S}, \\ U &= \frac{\frac{1}{3} (y' y''' + x' x''') + \frac{1}{4} (y''^2 + x''^2)}{2S} - \frac{T^2}{8S}. \end{aligned}$$

Aus analogen Überlegungen ergibt sich:

$$q_2 = (t_3 - t_2) S + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 T + (t_3 - t_2)^3 U + 0[(t_3 - t_2)^4]. \quad (38)$$

Nun können wir die Grössen h_1^2 und h_2^2 berechnen:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left\{ [(t_3 - t_2) (t_2 - t_1) x' S - \frac{1}{2} (t_3 - t_2) (t_2 - t_1)^2 x' T + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1) x'' S \right. \\ &\quad + (t_3 - t_2) (t_2 - t_1)^3 x' U - \frac{1}{4} (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 x'' T + \frac{1}{6} (t_3 - t_2)^3 (t_2 - t_1) x''' S] \\ &\quad - [(t_3 - t_2) (t_2 - t_1) x' S + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1) x' T - \frac{1}{2} (t_3 - t_2) (t_2 - t_1)^2 x'' S \\ &\quad + (t_3 - t_2)^3 (t_2 - t_1) x' U - \frac{1}{4} (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 x'' T + \frac{1}{6} (t_3 - t_2) (t_2 - t_1)^3 x''' S] \\ &\quad + 0[(t_3 - t_2) (t_2 - t_1)^4] + 0[(t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^3] \\ &\quad \left. + 0[(t_3 - t_2)^3 (t_2 - t_1)^2] + 0[(t_3 - t_2)^4 (t_2 - t_1)] \right\}^2 \\ &= \left\{ (t_3 - t_2) (t_2 - t_1) (t_3 - t_1) \left[\frac{1}{2} x'' S - \frac{1}{2} x' T + ((t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{1}{6} x''' S - x' U \right) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

Da $t_1 < t_2 < t_3$ ist, ist die verkürzte Schreibweise $0[(t_3 - t_1)^2]$ für das Restglied zulässig.

$$h_1^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} x'' S - \frac{1}{2} x' T + ((t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)) \left(\frac{1}{6} x''' S - x' U \right) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}^2$$

und analog (39)

$$h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} y'' S - \frac{1}{2} y' T + ((t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)) \left(\frac{1}{6} y''' S - y' U \right) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}^2.$$

Also

$$h_1^2 + h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{4} S^2 (x''^2 + y''^2) + \frac{1}{4} T^2 (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2} ST (x' x'' + y' y'') + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] \cdot [(x'' S - x' T) \left(\frac{1}{6} x''' S - x' U \right) + (y'' S - y' T) \left(\frac{1}{6} y''' S - y' U \right)] + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}.$$

Setzen wir für S , T und U die ursprünglichen Werte (37) ein, so erhalten wir:

$$h_1^2 + h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \left\{ \frac{1}{4} (x' y'' - y' x'')^2 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] \cdot \left[\frac{1}{6} S^2 (x'' x''' + y'' y''') - SU (x' x'' + y' y'') - \frac{1}{6} ST (x' x''' + y' y''') + TU (x'^2 + y'^2) \right] + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}.$$

Nun ist aber:

$$SU (x' x'' + y' y'') = TU (x'^2 + y'^2).$$

Also gilt:

$$h_1^2 + h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \left\{ \frac{1}{4} (x' y'' - y' x'')^2 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] \cdot \left[\frac{1}{6} S (S (x'' x''' + y'' y''') - T (x' x''' + y' y''')) \right] + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}.$$

Durch Ausmultiplizieren und Umordnen erhalten wir:

$$h_1^2 + h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{4} (x' y'' - y' x'')^2 + \frac{1}{6} [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] [(x' y'' - y' x'') (x' y''' - y' x''')] + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}.$$

Setzen wir

$$L = \frac{1}{6} [(x' y'' - y' x'') (x' y''' - y' x''')],$$

so können wir schreiben:

$$h_1^2 + h_2^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{4} (x' y'' - y' x'')^2 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] L + 0[(t_3 - t_1)^2] \right\}. \quad (40)$$

Die Grösse N^2 in (35) berechnen wir auf die folgende Art:

$$\begin{aligned}(x_3 - x_1) &= (t_3 - t_1) \left[x' + \frac{1}{2} x'' ((t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right], \\(y_3 - y_1) &= (t_3 - t_1) \left[y' + \frac{1}{2} y'' ((t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right], \\(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 &= \\&= (t_3 - t_1)^2 [x'^2 + y'^2 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] (x' x'' + y' y'') + 0[(t_3 - t_1)^2]].\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}(x_3 - x_2) q_1 &= (t_3 - t_2) (t_2 - t_1) \left[x' S + \frac{1}{2} (t_3 - t_2) x'' S - \frac{1}{2} (t_2 - t_1) x' T + 0[(t_3 - t_1)^2] \right], \\(x_2 - x_1) q_2 &= (t_3 - t_2) (t_2 - t_1) \left[x' S - \frac{1}{2} (t_2 - t_1) x'' S + \frac{1}{2} (t_3 - t_2) x' T + 0[(t_3 - t_1)^2] \right], \\((x_3 - x_2) q_1 + (x_2 - x_1) q_2)^2 &= (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 \\&\quad \cdot [4 x'^2 S^2 + 2 x' S (x'' S + x' T) [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] + 0[(t_3 - t_1)^2]].\end{aligned}$$

Analog dazu:

$$\begin{aligned}((y_3 - y_2) q_1 + (y_2 - y_1) q_2)^2 &= \\&= (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 [4 y'^2 S^2 + 2 y' S (y'' S + y' T) [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] + 0[(t_3 - t_1)^2]].\end{aligned}$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}N^2 &= (t_3 - t_1)^2 (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 [4 S^6 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] (4 S^5 T + 4 S^5 T) \\&\quad + 0[(t_3 - t_1)^2]].\end{aligned}$$

Setzen wir

$$W = 8 (x'^2 + y'^2)^2 (y' y'' + x' x''),$$

so gilt:

$$\begin{aligned}N^2 &= (t_3 - t_1)^2 (t_3 - t_2)^2 (t_2 - t_1)^2 [4 (x'^2 + y'^2)^3 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] W \\&\quad + 0[(t_3 - t_1)^2]].\end{aligned}\tag{41}$$

Aus (40) und (41) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{h_1^2 + h_2^2}{N^2} &= \frac{\frac{1}{4} (x' y'' - y' x'')^2 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] L + 0[(t_3 - t_1)^2]}{4 (x'^2 + y'^2)^3 + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] W + 0[(t_3 - t_1)^2]}. \\&= \frac{1}{16} \frac{(x' y'' - y' x'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3} + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] \left[\frac{L}{4 S^6} - \frac{(x' y'' - y' x'')^2 W}{64 S^{12}} \right] \\&\quad + 0[(t_3 - t_1)^2].\end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Entwicklung ergibt sich sodann:

$$\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{N^2}} = \pm \left[\frac{1}{4} \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] \cdot \left[\frac{L}{(x'y'' - y'x'') S^3} - \frac{(x'y'' - y'x'') W}{16 S^9} \right] + 0[(t_3 - t_1)^2] \right]. \quad (42)$$

Setzen wir L und W ein, so erhalten wir:

$$\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{N^2}} = \pm \left[\frac{1}{4} \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4} [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] R(t_2) + 0[(t_3 - t_1)^2] \right] \quad (43)$$

mit

$$R(t_2) = \frac{1}{3} \frac{x'y''' - y'x'''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x'y'' - y'x'')(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Aus dieser Gleichung (43) folgt aber, dass, wenn wir in (35) $m = 4$ setzen, die diskrete Krümmung absolut genommen für $(t_3 - t_1) \Rightarrow 0$ ($t_1 < t_2 < t_3$) in die kontinuierliche Form (34) übergeht. Aus der Art, wie wir in 4.1., 4.2. und 5.1. das Vorzeichen für die diskrete und kontinuierliche Krümmung festgelegt haben, ist leicht einzusehen, dass, sobald die Punkte genügend nahe beieinanderliegen, die beiden Krümmungen das gleiche Vorzeichen haben. Die eben erwähnte Konvergenz ist somit auch unter Berücksichtigung des Vorzeichens gültig, und in (42) und (43) ist unter diesen Umständen das positive Vorzeichen einzig richtig. Sobald $(t_3 - t_1)$ klein genug ist, können wir also schreiben:

$$k(B) = \tilde{k}(B) + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] R(t_2) + 0[(t_3 - t_1)^2].$$

Da aber $x(t)$ und $y(t)$ fünfmal differenzierbar sind, gilt:

$$R(t_2) = R(t_0) + 0[(t_2 - t_0)]$$

und somit auch:

$$k(B) = \tilde{k}(B) + [(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)] R(t_0) + 0[(t_3 - t_1)^2] \quad (44)$$

$$(t_1 < t_2 < t_0 < t_3).$$

Sei $D(x(t_4), y(t_4))$ ein weiterer Punkt der Reihe, welcher an C anschliesst und ebenfalls auf der Kurve K gegen P strebt, so gilt analog zu (44):

$$k(C) = \tilde{k}(C) + [(t_4 - t_3) - (t_3 - t_2)] R(t_0) + 0[(t_4 - t_2)^2] \quad (45)$$

$$(t_2 < t_0 < t_3 < t_4).$$

Wir müssen nun zeigen, dass, wenn die vier Punkte A, B, C und D auf der Kurve K gegen einen Punkt P streben, welcher auf K zwischen B und C liegt, das diskrete Glättmass $\bar{z}(A, B, C, D)$ in das Bizleysche Mass $\bar{z}(P)$ übergeht.

Aus der Definition der Bizleyschen Glätte folgt:

$$\bar{z}(P) = \lim_{\substack{B \rightarrow P \\ C \rightarrow P \\ B, C \text{ auf } K}} \frac{|\tilde{k}(B) - \tilde{k}(C)|}{|BC|}.$$

Also gilt es zu zeigen, dass

$$\left| \frac{|\tilde{k}(B) - \tilde{k}(C)|}{|BC|} - \frac{|k(B) - k(C)|}{|BC|} \right| \quad (46)$$

gegen 0 geht, sobald A, B, C und D auf K gegen P streben.

Mit Hilfe von (44) und (45) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq (46) &\leq \left| \frac{\tilde{k}(B) - \tilde{k}(C)}{|BC|} - \frac{k(B) - k(C)}{|BC|} \right| \\ &\quad + R(t_0) \frac{(t_4 - t_3) - 2(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)}{|BC|} + \frac{0[(t_4 - t_1)^2]}{|BC|} \\ &\leq |R(t_0)| \frac{(t_4 - t_3) - 2(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)}{|BC|} + \frac{|0[(t_4 - t_1)^2]|}{|BC|}. \end{aligned}$$

Damit im allgemeinen Fall, wenn $R(t_0) \neq 0$ ist, die diskrete Glätte in das Bizleysche Mass übergeht, muss gelten:

$$\lim_{\substack{A \rightarrow P \\ B \rightarrow P \\ C \rightarrow P \\ D \rightarrow P \\ A, B, C, D \text{ auf } K}} \frac{\Delta^3 t_1}{|BC|} = 0. \quad (47)$$

Diese Bedingung können wir durch die folgende Überlegung in eine etwas verständlichere Form bringen. Es ist:

$$(t_2 - t_1) \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} = |AB| + 0[(t_2 - t_1)^2].$$

Analoge Formeln gelten für $|BC|$ und $|CD|$.

Die Bedingung (48)

$$\lim_{\substack{A \rightarrow P \\ B \rightarrow P \\ C \rightarrow P \\ D \rightarrow P \\ A, B, C, D \text{ auf } K}} \frac{|CD| - 2|BC| + |AB|}{|BC|} = 0 \quad (48)$$

ist somit gleichwertig mit (47).

Die zweite Differenz $|CD| - 2|BC| + |AB|$ muss also schneller gegen 0 gehen als $|BC|$; oder, was das gleiche bedeutet, $|CD| - |BC|$ muss schneller gegen $|BC| - |AB|$ streben als $|BC|$ gegen 0. Dies ist beispielsweise dann erfüllt, wenn die drei Strecken $|AB|$, $|BC|$ und $|CD|$ immer gleich gross sind.

Dass das diskrete Glättemass nur unter der Bedingung (48) in das kontinuierliche übergeht, mag im ersten Moment enttäuschend wirken. Versuchen wir jedoch das Bizleysche Mass im Gegensatz zum normalen Vorgehen dadurch zu gewinnen, dass wir zuerst mit Hilfe von 4 Punkten der Kurve ein «diskretes Bizleysches Glättemass» bilden, wie wir das im zweiten Vorversuch 4.2. getan haben, und erst dann den Grenzübergang durch das Zusammenziehen der vier Punkte vollziehen, so müssen diese Punkte eine zu (48) analoge Bedingung erfüllen. Wir müssen eben bedenken, dass sich die übliche Art, den Grenzprozess durchzuführen, stark vom obigen Vorgehen unterscheidet. Bei der Definition des Bizleyschen Masses wird zuerst die kontinuierliche Krümmung in zwei Punkten der Kurve gebildet, und erst dann wird der Grenzübergang durchgeführt. Wenn wir beim neuen diskreten Mass in gleicher Weise vorgehen, so kommen wir immer zum richtigen Ergebnis unabhängig davon, wie die Punkte auf der Kurve gegeneinanderstreben; denn wir haben ja gezeigt, dass die diskrete Krümmung in jedem Falle in die kontinuierliche übergeht.

Mit diesem Hinweis dürfen wir wohl die Bedingung D in 3. (Übergang in das Bizleysche Mass) beim neuen diskreten Glättemass als erfüllt betrachten.

6.3. Spezialisierung

Bei den meisten Reihen aus der Praxis, insbesondere bei Zeitreihen, sind die einzelnen Punkte P_i so gegeben, dass ihre x -Koordinaten bei fortlaufendem i um einen konstanten Wert steigen. Wählen

wir diesen konstanten Abstand als Einheit, so lassen sich die Formeln (30) und (31) wesentlich vereinfachen. Setzen wir in (30) und (31) $(x_{i+1} - x_i) = 1$, so erhalten wir:

$$|k(B)| = 4 \sqrt{\frac{(1-q)^2 + (y_2 - y_3 + (y_2 - y_1)q)^2}{(4 + (y_3 - y_1)^2)[(1+q)^2 + (y_3 - y_2 + (y_2 - y_1)q)^2]}} \quad (49)$$

mit

$$q = \sqrt{\frac{1 + (y_3 - y_2)^2}{1 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Weiter gilt:

$$l = y_3 - 2y_2 + y_1 = \Delta^2 y_1. \quad (50)$$

Bekanntlich ist das Vorzeichen von l massgebend für das Vorzeichen der Krümmung $k(B)$.

Unter der erweiterten Annahme, dass im ganzen Bereich der Reihe der Betrag $|y_{i+1} - y_i|$ klein ist gegenüber 1, lässt sich eine weitere Formel ableiten. Unter dieser Voraussetzung darf nämlich in (49) die Grösse q durch 1 angenähert werden. Somit ergibt sich aus (49):

$$|k(B)| = 4 \sqrt{\frac{(y_3 - 2y_2 + y_1)^2}{4 + (y_3 - y_1)^2}}. \quad (51)$$

Weiter wollen wir in (51) $(y_3 - y_1)^2$ gegenüber 4 vernachlässigen, so dass wir als Zwischenstufe erhalten:

$$|k(B)| = 4 \sqrt{\frac{(y_3 - 2y_2 + y_1)^2}{4 \cdot 4}}. \quad (52)$$

Beachten wir noch die Formel (50), die das Vorzeichen von $k(B)$ regelt, so ergibt sich als Näherungsformel für die lokale Krümmung in B :

$$k(B) = \Delta^2 y_1. \quad (53)$$

Die Voraussetzungen, die zu dieser Formel (53) sowie zu der globalen Formel (55) führen, seien hier nochmals erwähnt:

$$\begin{aligned} 1. & \quad (x_{i+1} - x_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ 2. & \quad |y_{i+1} - y_i| \quad \text{ist klein gegenüber 1.} \end{aligned} \quad (54)$$

Es ist klar, dass diese Näherungen um so besser sind, je kleiner die absoluten Beträge der y -Differenzen sind.

Betrachten wir die folgende Formel (55) für die globale Glätte einer Reihe

$$Z(R_n) = \sum_{i=1}^{n-3} (\Delta^2 y_i - \Delta^2 y_{i+1})^2 = \sum_{i=1}^{n-3} (\Delta^3 y_i)^2, \quad (55)$$

die sich sofort aus (33) und (53) ergibt, so erkennen wir, dass wir wieder zu der Methode der Glättebestimmung zurückgekommen sind, die wir als die klassische bezeichnet haben. Da wir uns bei der Herleitung des neuen Glättemasses ganz von der klassischen Idee gelöst hatten, ist es um so erstaunlicher, dass diese als Spezialfall im neuen Mass enthalten ist. Es ist nun auch erklärlich, dass, obwohl das klassische Vorgehen zu vollständig falschen Resultaten führen kann, es in weiten Gebieten durchaus befriedigende Ergebnisse zeigt. Wenn nämlich die Bedingung (54) erfüllt ist, wie dies beispielsweise bei der Reihe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten der Fall ist, so stimmen das neue und das klassische Mass überein.

Der Vollständigkeit halber wollen wir ohne Beweis erwähnen, dass unter der Voraussetzung (54) auch die Glättemasse des 1. und 2. Versuchs (siehe 4.) zu der Formel (55), also zur klassischen Definition führen.

7. Numerische Beispiele

Da uns nun das Rüstzeug für die praktische Berechnung der Glätte mit den in 6.1. und 6.3. abgeleiteten Formeln zur Verfügung steht, wollen wir an einigen Zahlenbeispielen das neue Glättemass erproben. Es soll dabei versucht werden, vom praktischen Standpunkt aus einige Eigenschaften zu beleuchten, um zusammen mit den in 5.2. auf rein theoretischem Wege gefundenen Eigenheiten ein möglichst umfassendes Bild vom neuen Glättemass zu erhalten. Unter anderem wollen wir auch prüfen, wie empfindlich das Mass auf kleine Verschiebungen der Punkte reagiert.

1. Beispiel

Die erste Reihe, deren Punkte wir durch ihre Koordinaten in der Tabelle 2 dargestellt sehen, haben wir bereits im Abschnitt 2.1. angetroffen. Wie wir dort gesehen haben, ist

$$y = \frac{1000}{1000 - x}$$

die dieser Reihe zugrunde liegende Funktion. Wir haben herausgefunden, dass das klassische Glättmass für diese Reihe keine vernünftigen Resultate liefert, da die dritten Differenzen $\Delta^3 y$ zunehmen, wenn sich x dem Werte 1000 nähert.

Tabelle 2

x	y
994	166,7
995	200,0
996	250,0
997	333,3
998	500,0
999	1000,0

In der Tabelle 3 haben wir zu Vergleichszwecken die Resultate der klassischen und der neuen Methode einander gegenübergestellt.

Tabelle 3

x -Bereich	Neues Mass Z	Klassisches Mass $(\Delta^3 y)^2$
994–997	$14,56 \cdot 10^{-9}$	$2,76 \cdot 10^2$
995–998	$5,17 \cdot 10^{-9}$	$25,10 \cdot 10^2$
996–999	$1,30 \cdot 10^{-9}$	$624,50 \cdot 10^2$
994–999	$21,03 \cdot 10^{-9}$	$652,36 \cdot 10^2$

Die Werte des neuen Masses zeigen in dieser Tabelle den richtigen Verlauf, indem sie abnehmen, je näher x dem Werte 1000 kommt, d.h. je weniger die Reihe von einem geradlinigen Verlauf abweicht.

Um die Empfindlichkeit des Masses gegenüber kleinen Veränderungen der Punkte dieser Reihe zu prüfen, gehen wir folgendermassen vor:

Wir variieren die y -Komponente des Punktes (996,250) und stellen fest, wie sich dabei der Glättewert ändert. Die Tabelle 4 gibt darüber Auskunft.

Tabelle 4

Geänderter Punkt		Änderung	Wert der Glätte	Änderung
x	y	Δy	Z	ΔZ
996	251.0	1.0	$2,36 \cdot 10^{-8}$	$0,26 \cdot 10^{-8}$
996	252.0	2.0	$2,65 \cdot 10^{-8}$	$0,55 \cdot 10^{-8}$
996	249.0	—1.0	$1,89 \cdot 10^{-8}$	$—0,21 \cdot 10^{-8}$
996	248.0	—2.0	$1,74 \cdot 10^{-8}$	$—0,36 \cdot 10^{-8}$

Die obigen Resultate zeigen deutlich, dass für diese Reihe das neue Glättemass recht empfindlich gegenüber kleinen Änderungen der Koordinaten reagiert. Selbstverständlich kann das Verfahren für jeden weiteren Punkt der Reihe wiederholt werden; ein grundsätzlich anderes Resultat wird dabei allerdings nicht herauskommen.

2. Beispiel

Die beiden Reihen A und B , die wir in diesem Beispiel einander gegenüberstellen wollen, sind in der Tabelle 5 durch die Koordinaten ihrer Punkte festgelegt. Die Kurven, welche ihnen zugrunde liegen, haben die folgende Form:

$$\text{Reihe } A: y = e^x, \quad \text{Reihe } B: y = e^{x+0,01} - 1,5. \quad (56)$$

Tabelle 5

Reihe A		Reihe B	
x	y	x	y
4,0	54,5982	4,0	53,6469
4,5	90,0171	4,5	89,4218
5,0	148,413	5,0	148,4046
5,5	244,692	5,5	245,6512
6,0	403,429	6,0	405,9835

Ohne diese Funktionen zu kennen, ist es gar nicht einfach zu entscheiden, welche der beiden Reihen glätter ist; um so mehr als die klassische Methode ein ganz falsches Resultat liefert.

Auf Grund unseres «Gefühls» von der Glätte sowie auf Grund der Tabelle 5 und der Funktionen (56) lassen sich einige qualitative Prognosen stellen.

1. Das Glättemass wird bei beiden Kurven mit wachsendem x eine fallende Tendenz zeigen. Das gleiche erwarten wir auch für die beiden Reihen.

2. Daraus folgt, dass die Funktion $y = e^x$ einen grösseren Glättewert hat als $y = e^{x+0,01}$. Da wir von einem Glättemass verlangen, dass es invariant gegenüber Kongruenztransformationen ist, muss demnach auch $y = e^x$ den grösseren Glättewert besitzen als $y = e^{x+0,01} - 1,5$. Also soll die Reihe B glätter sein als A .

Die Tabelle 6 zeigt, dass diese Prognosen für das neue Mass erfüllt sind, während beim klassischen Mass gerade ein entgegengesetztes Verhalten vorzufinden ist.

Tabelle 6

x -Bereich	Neues Glättemass z		Klassisches Glättemass $(\Delta^3 y)^2$	
	Reihe A	Reihe B	Reihe A	Reihe B
4,0–5,5	$56,00 \cdot 10^{-10}$	$53,80 \cdot 10^{-10}$	$22,22 \cdot 10^2$	$22,67 \cdot 10^2$
4,5–6,0	$7,58 \cdot 10^{-10}$	$7,28 \cdot 10^{-10}$	$60,39 \cdot 10^2$	$61,61 \cdot 10^2$
4,0–6,0	$63,58 \cdot 10^{-10}$	$61,08 \cdot 10^{-10}$	$82,61 \cdot 10^2$	$84,28 \cdot 10^2$

Gleich wie im ersten Beispiel prüfen wir für die Reihe A die Empfindlichkeit des Glättemasses gegenüber kleinen Verschiebungen eines Punktes. Aus der Tabelle 7 sehen wir, dass auch in diesem Falle die Prüfung befriedigend ausfällt.

Tabelle 7

Geänderter Punkt		Änderung Δy	Wert der Glätte Z	Änderung ΔZ
x	y			
5,0	148,414	0,001	$6,3586 \cdot 10^{-9}$	$0,0005 \cdot 10^{-9}$
5,0	148,415	0,002	$6,3591 \cdot 10^{-9}$	$0,0010 \cdot 10^{-9}$
5,0	148,412	—0,001	$6,3576 \cdot 10^{-9}$	$—0,0005 \cdot 10^{-9}$
5,0	148,411	—0,002	$6,3571 \cdot 10^{-9}$	$—0,0010 \cdot 10^{-9}$

3. Beispiel

Wie wir aus der Tabelle 8 lesen, unterscheiden sich die in diesem Beispiel betrachteten 4 Reihen A , B , C und D nur dadurch, dass die sich entsprechenden y -Komponenten ihrer Punkte um ein Vielfaches von 10 verschieden sind.

Tabelle 8

x -Werte	y -Werte der Reihen			
	A	B	C	D
1	0,2	0,02	0,002	0,0002
2	0,1	0,01	0,001	0,0001
3	0,2	0,02	0,002	0,0002
4	10,0	1,00	0,100	0,0100
5	20,5	2,05	0,205	0,0205
6	19,9	1,99	0,199	0,0199
7	20,0	2,00	0,200	0,0200

Zwischen den x -Werten 3 und 5 ist der sprunghafte Anstieg bei der Reihe A dem Betrag nach viel grösser als bei B , C und D . Wir vermuten deshalb, dass an dieser Stelle das normale neue Glätttemass für A im Gegensatz zu den übrigen Reihen unvernünftige Werte liefert. Diese Vermutung wird durch die Tabelle 9 bestätigt. Das neue Mass Z weist für die Reihe A einen kleineren Wert auf als für die Reihe B . Erst wenn wir den Korrekturfaktor f (siehe (21)) mitberücksichtigen, sind, wie die Tabelle 9 zeigt, die Glättewerte auch für die Reihe A vernünftig.

Tabelle 9

	Reihe A	Reihe B	Reihe C	Reihe D
Neues Glätttemass Z	2,13	2,53	$4,46 \cdot 10^{-2}$	$4,50 \cdot 10^{-4}$
Neues Glätttemass Z_f	$2,52 \cdot 10$	2,85	$4,46 \cdot 10^{-2}$	$4,50 \cdot 10^{-4}$
Klassisches Mass	$4,50 \cdot 10^2$	4,50	$4,50 \cdot 10^{-2}$	$4,50 \cdot 10^{-4}$

Im Abschnitt 5.2. haben wir erwähnt, dass der Korrekturfaktor nur dann angewendet werden soll, wenn es wirklich nötig ist, d. h. wenn

die zu beurteilende Reihe stark unglatt ist. Aus den Resultaten der Tabelle 9 erkennen wir nun, dass es sinnlos ist, bei einigermaßen glatten Reihen den Faktor f mitzuberücksichtigen, da er in diesen Fällen keinen wesentlichen Einfluss auf die Glättewerte ausübt.

Weiter sehen wir aus dieser Tabelle, dass der Unterschied zwischen dem klassischen und dem neuen Mass für die Reihen C und D gering ist. Dies ist zu erwarten, da für beide Reihen die Bedingungen (54) in 6.3. erfüllt sind.

Selbstverständlich könnten wir weitere Beispiele hier anknüpfen, die uns eine Fülle von mehr oder weniger interessanten Daten liefern würden. Wir wollen uns jedoch mit diesen drei Beispielen begnügen, da sie uns die wichtigsten Eigenschaften des neuen Glättemasses vom praktischen Standpunkt aus vor Augen geführt haben.

8. Probleme der praktischen Anwendung

8.1. Die Wahl der Ersatzreihe

Wir sind bis jetzt immer davon ausgegangen, dass die Koordinaten (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), welche eine Reihe von Punkten in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen, zur Verfügung stehen. Mit diesen Angaben konnten wir die Glätte, die eine geometrische Eigenschaft der Figur ist, bestimmen. Bei praktischen Anwendungen finden wir jedoch vorerst nur zwei Folgen von dimensionierten Werten vor, zwischen denen eine eindeutige Zuordnung besteht. Obwohl durch diese Zuordnung beispielsweise der Wert A_i der ersten Folge zum Wert B_i der zweiten Folge gehört und wir dieses Wertepaar als (A_i, B_i) schreiben können, ist das alles nicht gleichbedeutend mit der Aussage: « (A_i, B_i) ist ein Punkt der Ebene»; schon deshalb nicht, weil A_i und B_i mit irgendwelchen, meist ungleichen Dimensionen behaftet sind, während die Komponenten der Koordinaten eines Punktes die Dimension der Längeneinheit des kartesischen Systems besitzen.

Trotzdem ist es uns ein Anliegen, die Beziehung zwischen den beiden Wertefolgen graphisch darzustellen, um uns eine richtige Vorstellung davon machen zu können. Sobald wir uns aber diese Zuordnung graphisch veranschaulichen wollen, müssen wir zuerst eine Modell- oder Ersatzreihe konstruieren, deren Punkte sich auf eine Ebene

zeichnen lassen. Die Komponenten der Punkte dieser Ersatzreihe haben also als Dimension die Längeneinheit des kartesischen Koordinatensystems; sie sind aber auch ohne Berücksichtigung der Dimension eng mit den ursprünglichen Wertefolgen verbunden.

Wenn wir beispielsweise wie im Abschnitt 12.2. die Beziehung zwischen dem Alter x und der Sterbewahrscheinlichkeit q_x graphisch aufzeichnen wollen, wählen wir als Ersatzreihe $(x \cdot v, 100 \cdot q_x \cdot v)$, wobei v die Dimension der auf dem Zeichenblatt zugrunde gelegten Längeneinheit bedeutet.

Wir brauchen nicht zu betonen, dass diese Modellreihe und somit auch die graphische Darstellung gut oder schlecht gewählt werden können. Vor allem im Wirtschaftsleben kommt es vor, dass durch ungeeignete Wahl dieser Modellreihen Tatsachen verfälscht werden.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für die Glätte machen. Durch eine ungeschickte Wahl des Ersatzbildes, d.h. der Ersatzreihe, können wir einen vollkommen falschen Glättewert erhalten. Das zweite Beispiel des letzten Abschnitts führt uns dies deutlich vor Augen.

Wir haben dort gesehen, dass die Reihe A weniger glatt ist als die Reihe B . Multiplizieren wir die y -Komponenten beider Reihen mit 10^{-6} , so sind die Bedingungen (54) erfüllt, und wir dürfen das klassische Mass verwenden. Die so entstandenen Reihen wollen wir mit \bar{A} und \bar{B} bezeichnen. Aus der formelmässigen Darstellung ist leicht ersichtlich, dass beim klassischen Mass das Verhältnis der Glättewerte zweier Reihen invariant ist gegenüber linearen Transformationen in der y -Richtung. Deshalb folgt aus den Resultaten der Tabelle 6, dass auch für das neue Mass \bar{A} glatter ist als \bar{B} . Die Aussage B ist glatter als A ist durch die lineare Transformation in der y -Richtung mit dem Faktor 10^{-6} umgekehrt worden.

Dieses Resultat mag auf den ersten Blick befremdend wirken, da wir vom klassischen Glättemass her gewohnt sind, dass das Verhältnis der Glättewerte zweier Reihen invariant ist gegenüber solchen Transformationen. Bei nichtlinearen Transformationen ist uns ein derartiges Verhalten jedoch nicht mehr fremd. Das folgende Beispiel mag dies verdeutlichen.

Wir gehen aus von zwei Reihen U und V . Die Punkte von U liegen auf einem Kreis, und der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten ist überall gleich. Diese Reihe ist ideal glatt und

besitzt den Glättewert 0. Die Punkte der Reihe V sollen nicht stark von den entsprechenden der Reihe U abweichen; jedoch sollen sie auf einer Exponentialkurve der Form $y = a^{bx} + c$ liegen. Sie sollen weiter so gewählt werden, dass der Glättewert von V nicht 0 wird. Transformieren wir die y -Komponenten beider Reihen nach der Formel $\bar{y} = \ln(y - c)$ und bezeichnen wir die neuen Reihen mit \bar{U} und \bar{V} , so folgt, dass \bar{V} geradlinig ist und den Glättewert 0 besitzt. Im allgemeinen wird das Glättemass für \bar{U} von 0 verschieden sein, so dass sich durch diese Transformation die Aussage « U ist glätter als V » umkehrt.

Was wir bei diesem Beispiel als selbstverständlich empfinden, dass nämlich die Reihen U und \bar{U} bzw. V und \bar{V} verschieden sind und sich auch bezüglich der Glätte verschieden verhalten, gilt aber auch für die Reihen A und \bar{A} bzw. B und \bar{B} im vorigen Beispiel.

Nach den bisherigen Ausführungen könnte man zur Ansicht gelangen, dass die Glätte auf Transformationen so empfindlich reagiert, dass es sich im praktischen Falle überhaupt nicht mehr lohnt, eine Reihe auf ihre Glätte hin zu untersuchen. Dies gilt vor allem dann, wenn man mit gutem Gewissen über die Wahl der Ersatzreihe innerhalb gewisser Grenzen geteilter Meinung sein kann. Wir müssen jedoch bedenken, dass die gezeigten Beispiele gesucht waren, um auf die Schwierigkeiten aufmerksam zu machen, und dass in dem erwähnten engen Rahmen die Glätte ihre Struktur nicht vollkommen ändern kann.

Das Problem der richtigen Übertragung von der abstrakten Beziehung der Wertfolgen zueinander auf das konkrete Bild der Ersatzreihe gehört bis zu einem gewissen Grad in die Spezialdisziplin, aus welcher diese Werte stammen. So müssen dabei in erster Linie die Erfahrung und die Kontinuität der Betrachtungsweise berücksichtigt werden. Erst nachher gelangen allgemeine Regeln und Überlegungen der folgenden Art zur Anwendung, die aber nur als Ergänzungen und Präzisierungen gedacht sind.

Es ist zu beachten, dass die wesentlichen Merkmale nicht durch Über- oder Untertreibung verfälscht werden. Der Trend der Reihe soll deutlich sichtbar sein. Die Abstände zwischen den einzelnen Punkten dürfen ein Vielfaches der Einheit nicht übersteigen. Dazu ist allerdings zu bemerken, dass der Sache mehr gedient ist, wenn wir zwischen weit auseinanderliegenden Punkten weitere einfügen können, als wenn wir durch eine Transformation diese Abstände verkleinern.

Trotz all dieser Überlegungen bleibt in vielen Fällen doch noch ein Spielraum für die Wahl der Ersatzreihe offen, und von dieser Wahl hängen dann, wenn auch nur in bescheidenem Rahmen, die Glätteeigenschaften der Reihe ab.

8.2. Die globale Glätte einer Reihe

Mit den bislang in den Abschnitten 6.1. und 6.3. zur Verfügung gestellten Mitteln sind wir in der Lage, das lokale Verhalten der Glätte einer Reihe eindeutig zu messen. Obwohl bei jeder ernsthaften Beurteilung die lokale Betrachtungsweise ausschlaggebend sein wird, ist es schon der Übersicht wegen wünschenswert, mit wenigen Zahlen ein einigermaßen schlüssiges Bild von der globalen Glätte einer Reihe zu erhalten. Wir müssen dabei allerdings bedenken, dass in den meisten Reihen die lokalen Glättewerte nicht zufällig um einen Mittelwert schwanken, sondern dass sie einem mehr oder weniger deutlich sichtbaren Trend folgen. Deshalb hat das globale Mass, wie es in den Formeln (17), (33) und (55) angegeben ist, für lange Reihen nur dann einen Sinn, wenn wir diese Reihen in kürzere Teilstücke aufgliedern, wodurch der Einfluss des Trends abgeschwächt wird. Das gleiche gilt auch für das in (18) definierte durchschnittliche Glättemass.

Auf eine weitere Art der globalen Betrachtungsweise wollen wir im folgenden hinweisen. Vergleichen wir die Glätte zweier Reihen miteinander, so wird unter anderem auch die Frage auftauchen: «Wie oft ist die eine Reihe glätter als die andere?» oder präziser ausgedrückt: «Wieviele Male ist der lokale Glättewert der einen Reihe kleiner als der entsprechende der andern?». Je nachdem wie diese Zahl ausfällt, kann die eine Reihe, wenigstens von diesem Standpunkt aus, als die glattere bezeichnet werden. Etwas komplizierter wird das Verfahren, wenn wir mehr als zwei Reihen miteinander zu beurteilen haben. Wir können nicht je zwei Reihen in der beschriebenen Art miteinander vergleichen und am Schluss eine Rangliste daraus ermitteln, da für die Beziehung «global glätter als» bei der hier betrachteten globalen Glättedefinition die Transitivitätseigenschaft nicht gilt. Aus « A global glätter als B » und « B global glätter als C » folgt nicht unbedingt « A global glätter als C ». Denn es lassen sich ohne Schwierigkeiten drei Reihen A , B und C so konstruieren, dass zwar A an der Mehrzahl von lokalen Stellen glätter ist als B und auch B sich als «global glätter»

als C erweist, dass aber die lokalen Glättewerte von A in der Mehrzahl der Fälle grösser sind als die entsprechenden Werte von C , d.h. dass also C «global glätter» als A ist. In einem solchen Falle müssen wir uns auf die folgende Art behelfen. Wir vergleichen die sich entsprechenden lokalen Glättewerte miteinander und ordnen jeder dieser Grössen eine Zahl zwischen 1 und N (N = Anzahl der zu vergleichenden Reihen) zu, wobei diese Zahl dem Rang entspricht, den dieser Glättewert im Vergleich zu den entsprechenden der übrigen Reihen einnimmt. Sind zwei Glättewerte gleich gross, so nehmen sie auch den gleichen Rang ein, wodurch aber der nachfolgende Rang als bereits besetzt betrachtet wird. Die Summe all dieser Rangzahlen pro Reihe, die sogenannte Platzziffer, gibt über das Verhältnis der globalen Glätten der einzelnen Reihen zueinander Auskunft. In der endgültigen Rangliste figurirt die glättteste Reihe mit der kleinsten Platzziffer an erster Stelle; an zweiter Stelle steht die Reihe mit der zweitkleinsten Platzziffer usw. Diese Rangliste zusammen mit den Platzziffern geben doch schon ein annehmbares Bild vom Verhältnis der Glätten der einzelnen Reihen zueinander. Allerdings wird dabei die absolute Grösse der lokalen Glätte nicht berücksichtigt.

Es liessen sich sicher weitere Vorschläge für die globale Beurteilung der Glätte hier anführen, doch wird es kaum möglich sein, ein über alle Zweifel erhabenes Kriterium zu finden, das den vielfältigen Gesichtspunkten bei der globalen Glättebeurteilung Rechnung trägt. Deshalb müssen wir versuchen, mit Hilfe der lokalen sowie der genannten globalen Betrachtungsweise ein Bild von der Glätte einer Reihe zu erhalten.

B: Die Ausgleichung von rohen Daten mit Hilfe des DGV (Differenzengleichungsverfahren)

9. Das Prinzip der Ausgleichung

9.1. Das allgemeine Differenzengleichungsverfahren (DGV)

Whittaker and Robinson [3] und Henderson [2] haben ein DGV (Differenzengleichungsverfahren) zur Ausgleichung von rohen Daten beschrieben, das sich besonders gut eignet, uns die Wirksamkeit und Eigenschaften des neuen Glättemasses nochmals vor Augen zu führen. Für dieses Verfahren ist es nützlich, die folgenden Bezeichnungen einzuführen.

Die Punkte der vorgegebenen unausgeglichenen Reihe besitzen die Koordinaten

$$(x, \bar{y}_x), \quad x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \beta; \quad \alpha, \beta \text{ ganz}; \quad \alpha + 3 \leq \beta.$$

Die Koordinaten der gesuchten Punkte der ausgeglichenen Reihe bezeichnen wir mit (x, y_x) .

Die x -Komponente bleibt bei der Ausgleichung unverändert; es wird nur in der y -Richtung ausgeglichen.

Mit $z(y_x)$ bezeichnen wir den Glättewert des neuen Masses der ausgeglichenen Reihe zwischen x und $x + 3$, während $(\Delta^3 y_x)^2$ die analoge Bedeutung für das klassische Mass hat.

Das Prinzip des DGV lässt sich auf die folgende einfache Art erklären. Die ausgeglichenen Werte y_x sollen so gewählt werden, dass sie einerseits möglichst wenig von den rohen Beobachtungen \bar{y}_x abweichen und dass andererseits die ausgeglichene Reihe einen möglichst glatten Verlauf besitzt.

$$\text{Die Grösse} \quad \sum_{x=\alpha}^{\beta} (y_x - \bar{y}_x)^2 \quad (57)$$

wird als Mass für die Abweichungen von den rohen Werten verwendet, während der glatte Verlauf der Reihe mit Hilfe des globalen Glättemasses

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta-3} z(y_x) \quad (58)$$

gemessen wird.

Die einzelnen Summanden der beiden Ausdrücke (57) und (58) wollen wir mit den Gewichten $E(x)$ bzw. $G(x)$ versehen. Die y_x sollen nun so gewählt werden, dass die Summe der beiden mit diesen Gewichten versehenen Summanden ein Minimum wird.

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta} E(x) (y_x - \bar{y}_x)^2 + \sum_{x=\alpha}^{\beta-3} G(x) z(y_x) = \text{Min.} \quad (59)$$

In den zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten Arbeiten über das DGV wird selbstverständlich anstelle des neuen Masses $z(y_x)$ das klassische $(\Delta^3 y_x)^2$ verwendet.

Um eine möglichst allgemeine und flexible Ausgangsbasis zur Verfügung zu haben, haben wir alle Glieder von (59) mit einem Gewicht versehen. Die Gewichte $E(x)$ betrachten wir als eine Art «Vertrauenskoeffizient» gegenüber den rohen Werten. Unter normalen Umständen hat $E(x)$ den konstanten Wert 1. Nur dann soll $E(x)$ kleiner als 1 und von x abhängig sein, wenn wir die Gewissheit oder zumindest einen an Gewissheit grenzenden Hinweis dafür besitzen, dass einige der rohen Werte im Vergleich zu den übrigen weniger vertrauenswürdig sind; sei es, dass durch irgendwelche Umstände die Messung in diesen Fällen nicht genau durchgeführt werden konnte oder dass die Werte durch eine einmalig auftretende Erscheinung verfälscht wurden. Ebenso kann mit Hilfe dieser Gewichte die unterschiedliche Genauigkeit der Beobachtungen berücksichtigt werden.

Um die Funktion der Gewichte $G(x)$ besser zu verstehen, denken wir uns $G(x)$ zusammengesetzt aus den beiden Faktoren k und $f(x)$, wobei k unabhängig von x sein soll. Die erste Komponente k regelt ganz allgemein die Beziehung zwischen den sich widersprechenden Forderungen «möglichst gute Glätte» und «möglichst gute Übereinstimmung mit den rohen Daten». Die Grösse von k hängt entscheidend davon ab, was für Ansprüche wir an die ausgeglichene Reihe stellen, welcher der beiden Forderungen wir den Vorrang geben. Die zweite Komponente $f(x)$ ist vor allem für diejenigen Fälle gedacht, in welchen der Wunsch nach einer nur teilweise besseren oder schlechteren Glättung der Reihe auftaucht. So kann beispielsweise bei der Ausgleichung von rohen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten aus technischen Gründen ein monotones Wachsen der ausgeglichenen Werte wünschenswert erscheinen, obwohl die rohen Werte ein lokales Minimum beim Alter 30 vermuten lassen. Durch eine geeignete Wahl der $f(x)$

im Bereich 30 können wir diesen monotonen Anstieg erzwingen. Es kann auch möglich sein, dass sich die Reihe in ihrem Verlauf derart stark verändert, dass ein von x abhängiges G nötig ist. Einem solchen Falle werden wir im Abschnitt 12.3. begegnen.

Die Vorteile des DGV gegenüber andern nichtanalytischen Methoden liegen, abgesehen von der durch die Gewichtung der einzelnen Summanden erzielte erhöhte Anpassungsfähigkeit, vor allem darin, dass mit ein und derselben Methode alle verfügbaren rohen Werte, auch die Randwerte, ausgeglichen werden können.

9.2. Die theoretische Lösung der Minimalbedingung

Die Werte y_x ($x = \alpha, \alpha+1, \dots, \beta$), welche die Minimalbedingung (59) erfüllen, müssen Lösungen des folgenden Gleichungssystems (60) sein. Wir setzen in (59) die partiellen Ableitungen nach den y_x gleich null und erhalten somit:

$$2E(x)(y_x - \bar{y}_x) + G(x) \frac{\delta z(y_x)}{\delta y_x} + G(x-1) \frac{\delta z(y_{x-1})}{\delta y_x} + G(x-2) \frac{\delta z(y_{x-2})}{\delta y_x} + G(x-3) \frac{\delta z(y_{x-3})}{\delta y_x} = 0, \quad (60)$$

wobei alle Glieder wegfallen, die $G(\alpha-3)$, $G(\alpha-2)$, $G(\alpha-1)$, $G(\beta-2)$, $G(\beta-1)$ und $G(\beta)$ als Faktoren enthalten.

Um überhaupt das System (60) aufstellen zu können, müssen die Funktionen $z(y_x)$ differenzierbar sein nach allen vier Variablen y_x , y_{x+1} , y_{x+2} und y_{x+3} . Diese Voraussetzung ist bei den Formeln, die wir in 6.1. für die Berechnung von z aufgestellt haben, nicht allgemein erfüllt, da dort das Vorzeichen der Krümmung separat bestimmt werden muss. Es ist allerdings zu bedenken, dass bei der Herleitung jener Formeln speziell darauf geachtet wurde, dass sie möglichst einfach für die Berechnung sind, und dass wir weitere Formeln finden können, in welchen das Vorzeichen für die Krümmung mitenthalten ist. Wir dürfen also annehmen, dass z differenzierbar ist und wir das System (60) bilden können.

Im allgemeinen ist (60) nicht linear in den y_x , und wir werden kaum durch rein theoretische Überlegungen einen Lösungsvektor finden können. Ebenso müssen wir in Betracht ziehen, dass (60) bzw. (59)

unter Umständen mehr als eine Lösung besitzen. Wir werden deshalb im nächsten Abschnitt versuchen, mit Hilfe numerischer Methoden einen Weg zu den ausgeglichenen Daten zu finden.

Unter der Annahme, dass die Bedingung (54) erfüllt ist, dürfen wir anstelle von z das klassische Mass verwenden; die Gleichungen (60) gehen in das lineare System (61) über.

$$E(x) y_x - G(x) \Delta^3 y_x + 3G(x-1) \Delta^3 y_{x-1} - 3G(x-2) \Delta^3 y_{x-2} + G(x-3) \Delta^3 y_{x-3} - E(x) \bar{y}_x = 0. \quad (61)$$

Auch im System (61) fallen wieder alle Glieder weg, die $G(\alpha-3)$, $G(\alpha-2)$, $G(\alpha-1)$, $G(\beta-2)$, $G(\beta-1)$ und $G(\beta)$ als Faktoren enthalten.

Die einzige Lösung von (61) kann mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus' oder anderer Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme gefunden werden.

Die Gleichungen (60) und (61) erlauben es uns, das DGV auf eine besondere Art mit anderen Ausgleichsverfahren zu vergleichen. Setzen wir die Werte y_x , die mittels irgendeiner Ausgleichsmethode gewonnen wurden, in diese Gleichungen ein, so erhebt sich die Frage nach denjenigen $G(x)$, die (60) bzw. (61) zu null machen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Anzahl der gesuchten G -Werte kleiner ist als die Anzahl der Gleichungen. Diese Komplikation lässt sich dadurch meistern, dass entweder durch Hinzufügen neuer Randwerte y_x die Zahl der Unbekannten $G(x)$ künstlich erhöht wird oder dass die $G(x)$ so gewählt werden, dass die Residuen der einzelnen Gleichungen möglichst klein werden. Setzen wir die linke Seite von (60) bzw. (61) nicht gleich 0, sondern gleich r_x , so bedeutet r_x das Residuum dieser Gleichung. Beim Gaußschen Ausgleichsprinzip werden die $G(x)$ so gewählt, dass die Summe

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta} r_x^2$$

minimal wird. Es liesse sich auch in diesem Zusammenhang prüfen, ob nicht mit Hilfe des DGV innerhalb gewisser vernünftiger Grenzen jede beliebige ausgeglichene Reihe durch Variation der Gewichte gefunden werden könnte. Vielleicht würden dadurch ergänzende Erkenntnisse über die Wirksamkeit und die Unterschiede der einzelnen Ausgleichsverfahren gewonnen werden. Wir wollen aber auf weitere Überlegungen, die in diese Richtung führen, verzichten, da eine derartige Untersuchung über den Rahmen dieser Arbeit hinausginge.

10. Numerische Methoden zur Lösung der Minimalbedingung

10.1. Ein gemischtes Verfahren (GEM-Verfahren)

Für die Besprechung der numerischen Methoden, welche die Minimalbedingung (59) bzw. das Gleichungssystem (60) lösen, ist es nützlich, die folgenden Bezeichnungen und Regelungen einzuführen.

Bei einspaltigen bzw. einreihigen Matrizen sollen die überstrichenen Grössen immer die Spaltenmatrizen bedeuten.

$y, y^{(i)}$ sind Punkte im n -dimensionalen Raum mit den Koordinaten (y_1, y_2, \dots, y_n) bzw. $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$.

$f(y)$ ist eine Funktion der n Variablen y_1, y_2, \dots, y_n , die mindestens dreimal total differenzierbar ist. Gesucht ist derjenige Punkt Y mit den Koordinaten (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , für welchen $f(y)$ minimal wird.

$g(y)$ bedeutet den Gradientenvektor der Funktion f im Punkt y . Die einzelnen Komponenten haben die Form

$$\frac{\delta f(y)}{\delta y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A_i ist eine $n \cdot n$ Matrix, deren Elemente α_{lm} die Bedeutung

$$\alpha_{lm} = \frac{\delta^2 f(y)}{\delta y_l \delta y_m} \bigg|_{y=y^{(i)}} = f''_{lm}(y^{(i)})$$

haben. A_i ist symmetrisch und in der Nähe von Y positiv definit. \check{A} bedeutet die Matrix A_i , wenn $y^{(i)} = Y$ ist.

Das Vorgehen zur Lösung der Minimalbedingung (59) und des Gleichungssystems (60), welche sich nun in der allgemeinen Form

$$f(y) = \text{Min} \quad (62)$$

$$\text{bzw.} \quad g(y) = 0 \text{ (Nullvektor)} \quad (63)$$

darstellen lassen, wollen wir in zwei Teile zerlegen. Ausgehend von einem gegebenen Anfangspunkt $y^{(0)}$ wird uns im ersten Teil das Verfahren von Fletcher and Reeves [10] schrittweise in die Nähe der Lösung Y führen. Sobald wir nicht mehr weit von dieser entfernt sind, können wir zum zweiten Teil übergehen, in welchem das Lineari-

sierungsverfahren sehr schnell den Lösungsvektor Y findet. Der erste Teil ist deshalb notwendig, weil das Linearisierungsverfahren nur in der Nähe von Y konvergiert.

Das Verfahren von Fletcher and Reeves [10]

Fletcher and Reeves haben in ihrer Veröffentlichung [10] das Verfahren eingehend dargestellt und besprochen, so dass wir uns darauf beschränken können, das Vorgehen kurz zu beschreiben und auf kleine Änderungen, die für unsere Zwecke nützlich sind, hinzuweisen.

- I: Wir berechnen den Gradientenvektor g_0 an der Stelle $y^{(0)}$, dem Ausgangspunkt des Verfahrens.
- II: $p_0 = -g_0$.
- III: Auf der Geraden $y(t) = y^{(i)} + tp_i$ bestimmen wir durch eine noch näher zu beschreibende Methode denjenigen Punkt $y^{(i+1)}$, für welchen $f(y(t))$ minimal ist.
- IV: Nacheinander berechnen wir die Grössen

$$g_{i+1} = g(y^{(i+1)}), \quad \beta = \frac{g_{i+1}^2}{g_i^2}, \quad p_{i+1} = -g_{i+1} + \beta p_i. \quad (64)$$

- V: Ausgehend von den Werten $y^{(i+1)}$ und p_{i+1} wiederholen wir den Prozess von III an sooft, bis die gewünschte Genauigkeit erzielt ist.

Die Vektoren p_0, p_1, \dots sind \ddot{A} -konjugiert (\ddot{A} -orthogonal); es gilt also:

$$p_l \ddot{A} \bar{p}_m = 0 \quad \text{für } l \neq m.$$

Der Beweis dieser Behauptung ist in der Arbeit von Fletcher and Reeves [10] und in einem Artikel von Beckmann in [8] angegeben.

Ist $f(y)$ eine quadratische Funktion, so führt dieses Verfahren, abgesehen von Rundungsfehlern, in höchstens n Schritten von irgendeinem Ausgangspunkt zum Minimum. Der Ausgangspunkt ist für die Lösung dann massgebend, wenn f nicht quadratisch ist. Das Verfahren ist nämlich so gebaut, dass Y im gleichen «Tal» liegt wie der Ausgangspunkt $y^{(0)}$.

Die Erfahrungen von Fletcher and Reeves haben gezeigt, dass die Methode schneller konvergiert, wenn nach jeweiligen $n + 1$ Schritten nicht die Richtung $p_i = -g_i + \beta p_{i-1}$, sondern $p_i = -g_i$, also die Richtung des steilsten Abfalls, gewählt wird.

Zur Bestimmung des Punktes $y^{(i+1)}$ auf der Geraden $y(t) = y^{(i)} + tp_i$ machen wir die folgende Überlegung.

Sei $x(t) = f(y^{(i)} + tp_i)$, so müssen wir dasjenige t_i suchen, für welches

$$\frac{dx(t)}{dt} = p_i \overline{g(y(t))} = 0$$

ist. Auf der Geraden $y(t)$ kennen wir bereits die beiden Werte

$$x(0) = f(y^{(i)}) \quad \text{und} \quad x'(0) = p_i \bar{g}_i.$$

Unter der Annahme, dass est (Abkürzung für estimate) eine Schätzung von $f(y(t))$ und $f(y)$ eine quadratische Funktion von y ist, lässt sich leicht ein Näherungswert h für t_i finden.

$$h = 2 \frac{\text{est} - f(y^{(i)})}{p_i \bar{g}_i}. \quad (65)$$

Da die in dieser Arbeit betrachtete Funktion (59) immer grösser als 0 ist, haben wir für die Schätzung est stets den Wert 0 angenommen. Da aber diese Schätzung weder genügend genau noch $f(y)$ im allgemeinen quadratisch ist, kann h viel zu gross ausfallen. Deshalb schlagen Fletcher and Reeves [10] eine obere Grenze für h vor

$$h \leq (p_i^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist $\text{Min}(f(y))$ grösser als 0, wie das bei der Funktion (59) der Fall ist, so folgt:

$$h = \text{Min} \left((p_i^2)^{-\frac{1}{2}}, 2 \frac{-f(y^{(i)})}{p_i \bar{g}_i} \right). \quad (66)$$

Es kann nun vor allem zu Beginn des Verfahrens vorkommen, dass das effektive Minimum von $f(y(t))$ ausserhalb des Intervalls $[0, h]$ liegt. In einem solchen Falle berechnen wir $x(t)$ und $x'(t)$ für die nachstehenden Werte von t :

$$0, h, 2h, 4h, 12h, 48h, 240h, 1200h, \dots, a, b. \quad (67)$$

b ist der erste Wert in dieser Reihe, für welchen $x'(t)$ nicht negativ ist oder $x(t)$ nicht abgenommen hat.

Die Reihe (67) ist so konstruiert, dass sich der Abstand von 0 zuerst zweimal verdoppelt, dann verdreifacht, vervierfacht und dann immer verfünffacht. Wir haben die Schrittlängen grösser gewählt als Fletcher and Reeves, um in möglichst wenig Schritten die Grössen a und b zu finden. Der Wert t_i liegt somit zwischen a und b .

Ausgehend von den bekannten Grössen $x(a)$, $x'(a)$, $x(b)$, $x'(b)$ verwenden Fletcher and Reeves eine kubische Interpolationsmethode, welche zum Näherungswert t^* führt.

$$\begin{aligned} t^* &= b - \left(\frac{x'(b) + w - z}{x'(b) - x'(a) + 2w} \right) (b - a), \\ z &= 3 \frac{x(a) - x(b)}{b - a} + x'(a) + x'(b), \\ w &= (z^2 - x'(a) x'(b))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Ist weder $x(a)$ noch $x(b)$ kleiner als $x(t^*)$, so begnügen wir uns mit der Näherung $t_i = t^*$. Andernfalls wiederholen wir den letzten Schritt (68) für das Intervall (a, t^*) bzw. (t^*, b) , je nachdem $x'(t^*)$ positiv oder negativ ist.

Das Linearisierungsverfahren

Dieses Verfahren, welches sich letzten Endes auf die Newtonsche Methode zur Lösung nichtlinearer Gleichungen bei mehreren Unbekannten stützt (siehe Stiefel [9] p. 81 und Whittaker and Robinson [3] p. 90), lässt sich auf einfache Weise erklären.

Wir entwickeln die Funktion $f(y)$ nach Taylor im Punkte $y^{(i)}$.

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y^{(i)}) + (y - y^{(i)}) \bar{g}_i + \frac{1}{2} (y - y^{(i)}) A_i \overline{(y - y^{(i)})} \\ &\quad + \text{Glieder höherer Ordnung.} \end{aligned} \quad (69)$$

In der Nähe von Y ist A_i positiv definit. Vernachlässigen wir die Glieder höherer Ordnung, so erhalten wir aus der Bedingung, dass $f(y)$ minimal werden soll, das lineare System

$$A_i \overline{(y - y^{(i)})} + \bar{g}_i = \bar{0} \text{ (Nullvektor)}. \quad (70)$$

Mit Hilfe des Linearisierungsprozesses haben wir das nichtlineare System (63) durch das lineare System (70) angenähert. (70) können

wir mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus' lösen. Den Lösungsvektor $y^{(i+1)}$ verwenden wir als Ausgangsgrösse für ein neues System in der Art (70) usw. Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis

$$r_{i+1} = \text{Max} (|y_k^{(i+1)} - y_k^{(i)}|, k = 1, 2, \dots, n) \leq R \quad (71)$$

ist. R hat dabei die Bedeutung einer Genauigkeitslimite. Ist nämlich $y^{(i+1)}$ nahe genug bei Y , so gilt mit genügender Genauigkeit:

$$f(Y) = f(y^{(i+1)}) + (Y - y^{(i+1)}) \bar{g}_{i+1} + \frac{1}{2} (Y - y^{(i+1)}) A_{i+1} \overline{(Y - y^{(i+1)})}.$$

Für quadratische Funktionen führt aber das Linearisierungsverfahren abgesehen von Rundungsfehlern in einem einzigen Schritt zum Minimum. Also gilt, wenn R genügend klein gewählt ist, von einem gewissen i an:

$$\text{Max} (|y_k^{(i+1)} - Y_k|, k = 1, 2, \dots, n) \leq r_{i+1} \leq R.$$

Gegenüber der Methode von Fletcher and Reeves hat das Linearisierungsverfahren den Vorteil, dass es sehr schnell konvergiert. Allerdings ist dabei zu beachten, dass für jeden Schritt die Matrix A_i berechnet werden muss, was natürlich eine wesentliche Mehrarbeit erfordert.

Es erhebt sich nun die Frage: «Wann wollen wir von der Methode von Fletcher and Reeves zum Linearisierungsverfahren hinüberwechseln?»

Sobald die Schrittlänge beim Verfahren von Fletcher and Reeves klein wird, also sobald

$$\text{Max} (|y_k^{(i+1)} - y_k^{(i)}|, k = 1, 2, \dots, n) \leq T \quad (72)$$

ist, wollen wir mit der letzten Näherung $y^{(i+1)}$ zum Linearisierungsverfahren übergehen. Die Grenze T muss aus den praktischen Erfahrungen bestimmt werden. Selbstverständlich ist das Kriterium (72) nicht immer dafür massgebend, dass $y^{(i+1)}$ sich in der Nähe von Y befindet und somit das Linearisierungsverfahren konvergiert. Wir müssen deshalb die Möglichkeit haben, bei Divergenz wieder zur Methode von Fletcher and Reeves mit verkleinertem T zurückzukehren. Die Steuerung des Rechenablaufs mittels (72) hat sich bei den Beispielen, die wir durchgeführt haben, als vernünftig erwiesen.

Setzen wir wieder

$$r_i = \text{Max} (|y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)}|, k = 1, 2, \dots, n),$$

so konvergiert das Linearisierungsverfahren sicher dann, wenn die Folge der r_i für fortschreitendes i schneller gegen 0 strebt als eine geometrische Folge; also Konvergenz ist dann gegeben, wenn

$$r_i < c S^i, \quad c = \text{konst.}, \quad 0 < S < 1 \quad \text{ist.} \quad (73)$$

Wir müssen nun aber bedenken, dass die Werte $y_k^{(i)}$ mit gewissen Rundungsfehlern behaftet sind. Sobald die Grössenordnung von r_i in die Nähe der Rechengenauigkeit der $y_k^{(i)}$ kommt, ist eine weitere Konvergenz in Frage gestellt. Also ist auch das Konvergenzkriterium (73) nur sinnvoll, solange r_i gross ist gegenüber der Rechengenauigkeit der $y_k^{(i)}$.

Wir haben bereits erwähnt (siehe (71)), dass das Linearisierungsverfahren abgebrochen wird, sobald $r_i \leq R$ ist. Wählen wir die Grenze R gross genug gegenüber der Rechengenauigkeit der $y_k^{(i)}$, so können wir ohne Schwierigkeiten das Kriterium (73) verwenden. In etwas anderer Form geschrieben, besagt es:

Das Verfahren konvergiert dann, wenn

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} \leq S, \quad S = \frac{r_2}{r_1} < 1 \quad (74)$$

ist. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so nehmen wir an, dass das Verfahren divergiert.

Am Ende des Linearisierungsverfahrens müssen wir prüfen, ob nun auch wirklich ein Minimum von f erreicht ist. Es ist durchaus möglich, dass dieses Verfahren zu einem Maximum von f führt. Durch das folgende einfache Kriterium wird diese Frage in befriedigender Weise geprüft. Ist nach dem regulären Ablauf des Linearisierungsverfahrens

$$f(y^{(m-1)}) > f(y^{(m)})$$

oder wenn $y^{(m-1)} = y^{(m)}$ ist,

$$f(y^{(m)} + \delta) > f(y^{(m)}), \quad (0 < \delta \leq 1),$$

so nehmen wir an, dass wir ein Minimum erreicht haben. Bei den Berechnungen, die wir durchgeführt haben, haben wir für δ den Wert von R (siehe (71)) verwendet.

10.2. Das gesteuerte Linearisierungsverfahren (GELI-Verfahren)

Der Nachteil des GEM-Verfahrens liegt, wie die praktischen Berechnungen gezeigt haben, vor allem darin, dass der erste Teil, das Verfahren von Fletcher and Reeves, nur in kleinen Schritten der Lösung Y zustrebt. Ist der Ausgangspunkt weit von Y entfernt, so braucht es viele Schritte, um in die Nähe von Y zu gelangen und somit das Linearisierungsverfahren anwenden zu können. Wir haben deshalb versucht, eine Methode zu entwickeln, die in wenigen Schritten in die Nähe von Y führt. Wir müssen dabei allerdings voraussetzen, dass $f(y)$ im ganzen n -dimensionalen Bereich nach unten beschränkt ist. Diese Bedingung ist bei der Funktion (59) erfüllt, da sie immer positiv ist.

Bei dieser neuen Methode wollen wir vom ersten bis zum letzten Schritt das Linearisierungsverfahren ohne Konvergenzkriterium (74) verwenden. Gleichzeitig soll aber immer die Bedingung

$$f(y^{(0)}) > f(y^{(1)}) > \dots > f(y^{(m)}) \cong f(Y) \quad (75)$$

erfüllt sein. Nun wird aber das Linearisierungsverfahren teilweise Werte $y^{(i)}$ liefern, die nicht in die Reihe (75) passen. Sei beispielsweise

$$f(y^{(i+1)}) \geq f(y^{(i)}),$$

so werden wir anstelle von $y^{(i+1)}$ einen abgeänderten Wert $\dot{y}^{(i+1)}$ suchen, der die Bedingung

$$f(\dot{y}^{(i+1)}) < f(y^{(i)})$$

erfüllt. Dieser korrigierte Wert ist Ausgangspunkt für einen weiteren Schritt im Linearisierungsverfahren.

Die Art der Korrektur hängt davon ab, was für Gründe für den «schlechten» Wert $y^{(i+1)}$ verantwortlich sind.

1. Fall:

Befindet sich $y^{(i)}$ in der Nähe eines lokalen Maximums, so führt das Linearisierungsverfahren in die falsche Richtung.

Korrektur:

$$\dot{y}^{(i+1)} = y^{(i)} - k_1 (y^{(i+1)} - y^{(i)}), \quad (k_1 > 0). \quad (76)$$

2. Fall:

Wohl sind auf der Strecke zwischen $y^{(i)}$ und $y^{(i+1)}$ alle Funktionswerte in der Nähe von $y^{(i)}$ kleiner als $f(y^{(i)})$; die Linearisierung ist aber so ungenau, dass $y^{(i+1)}$ über das eigentliche Ziel weit hinausgegangen ist.

Korrektur:

$$\dot{y}^{(i+1)} = y^{(i)} + k_2(y^{(i+1)} - y^{(i)}), \quad (0 < k_2 < 1). \quad (77)$$

Die Konstanten k_1 und k_2 in (76) und (77) sind innerhalb der angegebenen Grenzen beliebig wählbar. Bei den Berechnungen, die wir durchgeführt haben, haben wir $k_1 = k_2 = 0.25$ gesetzt. Erfüllt der abgeänderte Wert $\dot{y}^{(i+1)}$ die Bedingung

$$f(\dot{y}^{(i+1)}) < f(y^{(i)}) \quad (78)$$

nicht, so wiederholen wir die Korrektur solange, bis (78) gilt.

Um zu prüfen, welcher der beiden oben beschriebenen Fälle für das «schlechte» $y^{(i+1)}$ verantwortlich ist, untersuchen wir

$$f(y^{(i)} + \delta(y^{(i+1)} - y^{(i)})) - f(y^{(i)}), \quad (79)$$

wobei δ eine positive Grösse darstellt, die klein ist gegenüber 1.

Je nachdem (79) grösser oder kleiner 0 ist, handelt es sich um den ersten bzw. den zweiten Fall.

Ist (79) gleich 0 ($y^{(i+1)} \neq y^{(i)}$), so haben wir das δ zu gross gewählt und müssen (79) mit einem kleineren δ neu berechnen. Die Formel (71) soll wie früher anzeigen, wann das Verfahren abgebrochen wird.

Das GELI-Verfahren hat gegenüber der GEM-Methode den Nachteil, dass das berechnete Y nicht mehr unbedingt im gleichen «Tal» liegt wie der Ausgangspunkt. Deshalb haben wir auch die Voraussetzung an den Anfang gestellt, dass $f(y)$ nach unten beschränkt ist, da sonst ein unerwünschtes Abgleiten möglich ist. Obwohl jeder Schritt mehr Rechenaufwand erfordert als beim Verfahren von Fletcher and Reeves, führt das GELI-Verfahren um ein vielfaches schneller zum Ziel als die GEM-Methode. Unsere Erfahrungen erstrecken sich natürlich ausschliesslich über Funktionen der Art (59); die vorigen Aussagen haben demnach nur beschränkte Gültigkeit.

11. Die Durchführung der Verfahren auf dem Computer IBM 1620

11.1. Ergänzende Formeln

Da es uns vor allem um die Demonstration des neuen Glättmasses geht, haben wir darauf verzichtet, die von x abhängigen Gewichte $E(x)$ (siehe 9.1.) in den Berechnungen mitzuberechnen. Der Ausdruck (59) vereinfacht sich somit zu

$$f(y_\alpha, \dots, y_\beta) = \sum_{x=\alpha}^{\beta} (y_x - \bar{y}_x)^2 + \sum_{x=\alpha}^{\beta-3} G(x) z(y_x) = \text{Min.} \quad (80)$$

Ohne Mühe lassen sich die folgenden Formeln und Berechnungen auf den allgemeineren Fall (59) sinngemäss übertragen.

Das Verfahren von Fletcher and Reeves verlangt, dass wir den Gradientenvektor von f kennen. Wir müssen deshalb alle partiellen Ableitungen von f berechnen können. Ziehen wir in Betracht, dass $z(y_x)$ nur von den 4 Variablen y_x, y_{x+1}, y_{x+2} und y_{x+3} abhängt, so folgt aus (80):

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y_x} = & 2(y_x - \bar{y}_x) + G(x-3) \frac{\delta z(y_{x-3})}{\delta y_x} + G(x-2) \frac{\delta z(y_{x-2})}{\delta y_x} \\ & + G(x-1) \frac{\delta z(y_{x-1})}{\delta y_x} + G(x) \frac{\delta z(y_x)}{\delta y_x}. \end{aligned} \quad (81)$$

Diese Formel (81) ist nur streng gültig im Bereich $\alpha+3 \leq x \leq \beta-3$. Sie gilt dann auch ausserhalb dieser Grenzen, wenn wir die Einschränkung machen, dass alle Glieder wegfallen, die $G(\alpha-3), G(\alpha-2), G(\alpha-1), G(\beta-2), G(\beta-1), G(\beta)$ als Faktoren enthalten.

Bei der Berechnung der einzelnen partiellen Ableitungen von z stützen wir uns auf die folgende Näherung:

$$\frac{\delta z(y_x)}{\delta y_x} \cong \frac{z(y_x + b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}) - z(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3})}{b}. \quad (82)$$

Wählen wir b genügend klein, so ergibt diese Näherung befriedigende Werte. Für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\delta z(y_x)}{\delta y_{x+1}}, \quad \frac{\delta z(y_x)}{\delta y_{x+2}}, \quad \frac{\delta z(y_x)}{\delta y_{x+3}}$$

verwenden wir die zu (82) analogen Näherungsformeln.

Ist der Wert von $z(y_x + 2b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3})$ bekannt, so lässt sich zum Ausdruck (82) ein Korrekturglied m hinzufügen.

$$m = - \frac{z(y_x + 2b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}) - 2z(y_x + b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}) + z(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3})}{2b} \quad (83)$$

Dieses Korrekturglied werden wir dann verwenden, wenn wir gleichzeitig auch die zweiten Ableitungen berechnen müssen, da in diesem Falle die Kenntnis von $z(y_x + 2b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3})$ unbedingt nötig ist.

Im Linearisierungsverfahren müssen wir für jede Näherung die Matrix A_i , welche aus den zweiten partiellen Ableitungen von f besteht, berechnen. Die Glieder der x -ten Zeile von A_i sind:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x-3}} &= G(x-3) \frac{\delta^2 z(y_{x-3})}{\delta y_x \delta y_{x-3}} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x-2}} &= G(x-3) \frac{\delta^2 z(y_{x-3})}{\delta y_x \delta y_{x-2}} + G(x-2) \frac{\delta^2 z(y_{x-2})}{\delta y_x \delta y_{x-2}} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x-1}} &= G(x-3) \frac{\delta^2 z(y_{x-3})}{\delta y_x \delta y_{x-1}} + G(x-2) \frac{\delta^2 z(y_{x-2})}{\delta y_x \delta y_{x-1}} + G(x-1) \frac{\delta^2 z(y_{x-1})}{\delta y_x \delta y_{x-1}} \\ \frac{\delta^2 f}{(\delta y_x)^2} &= G(x-3) \frac{\delta^2 z(y_{x-3})}{(\delta y_x)^2} + G(x-2) \frac{\delta^2 z(y_{x-2})}{(\delta y_x)^2} + G(x-1) \frac{\delta^2 z(y_{x-1})}{(\delta y_x)^2} + G(x) \frac{\delta^2 z(y_x)}{(\delta y_x)^2} + 2 \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x+1}} &= G(x-2) \frac{\delta^2 z(y_{x-2})}{\delta y_x \delta y_{x+1}} + G(x-1) \frac{\delta^2 z(y_{x-1})}{\delta y_x \delta y_{x+1}} + G(x) \frac{\delta^2 z(y_x)}{\delta y_x \delta y_{x+1}} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x+2}} &= G(x-1) \frac{\delta^2 z(y_{x-1})}{\delta y_x \delta y_{x+2}} + G(x) \frac{\delta^2 z(y_x)}{\delta y_x \delta y_{x+2}} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y_x \delta y_{x+3}} &= G(x) \frac{\delta^2 z(y_x)}{\delta y_x \delta y_{x+3}} \end{aligned} \quad (84)$$

Die restlichen Glieder der x -ten Zeile sind 0.

Auch hier gilt wieder die Einschränkung, dass alle Glieder, welche eines der Gewichte $G(\alpha-3)$, $G(\alpha-2)$, $G(\alpha-1)$, $G(\beta-2)$, $G(\beta-1)$, $G(\beta)$ enthalten, wegfallen.

Die Berechnung der zweiten Ableitungen von z erfolgt nach der Näherung

$$\frac{\delta^2 z(y_x)}{\delta y_x \delta y_{x+1}} = \frac{z(y_x + b, y_{x+1} + b, y_{x+2}, y_{x+3}) - z(y_x + b, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}) - z(y_x, y_{x+1} + b, y_{x+2}, y_{x+3}) + z(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3})}{b^2} \quad (85)$$

Die übrigen zweiten partiellen Ableitungen werden nach analogen Formeln angenähert.

11.2. Die Programme der einzelnen Verfahren

Der Computer, der uns im Rechenzentrum der Universität Basel für unsere Arbeit zur Verfügung stand, ist aus den folgenden Einheiten zusammengesetzt:

Zentraleinheit	IBM 1620 Data Processing System (20 000 Speicherplätze)
Zusatzspeicher	IBM 1623 Core Storage Unit (40 000 Speicherplätze)
2 Plattenspeicher	IBM 1311 Disk Storage Drive, Model 3 (2 × 2 000 000 Speicherplätze)
Kartenleser	IBM 1622 Card Read-Punch Unit

Dieses System erlaubt es, grössere Programme in Teilprogramme aufzugliedern und diese auf die Platten zu speichern, von wo sie jederzeit in den Kernspeicher eingelesen werden können.

Ausführlichen Aufschluss über die einzelnen Arbeitsabläufe der in 10. beschriebenen Verfahren gibt die ungekürzte Fassung, welche im versicherungstechnischen Seminar der Universität Basel, in der Universitätsbibliothek Basel, in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern oder beim Verfasser eingesehen oder entliehen werden kann.

12. Die Ausgleichung der Sterbetafel SM 1939/44

12.1. Untersuchung über die Eindeutigkeit der Lösung

Ist die Funktion $f(y)$ nicht quadratisch, so existieren im allgemeinen mehrere Lösungen der Gleichung (62). Für den speziellen Fall, dass $f(y)$ die Gestalt (80) annimmt, stellt sich nun die Frage, ob sich innerhalb eines genügend grossen Bereichs um die rohen Werte herum mehr als eine Reihe als Lösung finden lassen. Wurzeln, die ausserhalb dieses Bereichs liegen, interessieren uns nicht, da sie im Sinne der Ausgleichung unvernünftig sind.

Für den Fall, dass die Bedingungen (54) erfüllt sind, besitzt die Gleichung (80), wie wir in 9.2. gesehen haben, eine einzige Lösung. Gelten jedoch diese Bedingungen nicht, so lässt sich wegen der Kompliziertheit der Funktion f , welche nicht nur von den Variablen y_x , sondern auch von den Parametern \bar{y}_x und $G(x)$ abhängt, auf die gestellte Frage wohl kaum eine mathematisch korrekte Antwort finden.

Erhalten wir jedoch bei den praktischen Berechnungen bei gleichen G -Werten zwei verschiedene Reihen als Lösungen von (80), so ist diese Frage in befriedigender Weise beantwortet. Nun haben aber unsere Berechnungen gezeigt, dass, obwohl wir von verschiedenen Anfangsreihen ausgegangen sind, die Verfahren bei gleichen G -Werten immer zur gleichen Lösung führen. Die Tabelle 10 gibt über die durchgeführten Berechnungen Auskunft. Die Zahlen der Reihen beziehen sich auf die Reihenummerierung in den Tabellen 11, 15, 19, 23 und 26. Mit I haben wir die Reihe bezeichnet, deren Werte durch lineare Interpolation zwischen $100 \cdot \bar{q}_{80}$ und $100 \cdot \bar{q}_{100}$ hervorgegangen sind. Die rohen Daten $100 \cdot \bar{q}_x$ haben wir als Reihe 13 in der Tabelle 23 festgehalten. Die Vermutung liegt nun nahe, dass nur eine vernünftige Lösung von (80) existiert. Wir möchten an dieser Stelle jedoch deutlich hervorheben, dass unsere Berechnungen dies keineswegs sicherstellen. Wir sind deshalb sofort bereit, diese Hypothese aufzugeben, sobald eine zweite, im Sinne der Ausgleichung vernünftige Lösung von (80) bei gleichen G -Werten gefunden wird.

Für jede einzelne Reihe sind in der Tabelle 10 die Anzahl der benötigten Schritte sowie die ungefähre Berechnungszeit angegeben. Diese Zahlen zeigen, dass das GELI-Verfahren der GEM-Methode überlegen ist.

Tabelle 10

Reihe	G-Wert	Ausgangsreihe	GEM-Verfahren			GELI-Verfahren	
			Anzahl Schritte Fletcher and Reeves	Lin.	Zeit	Anzahl Schritte	Zeit
5	10	1	40	3	4 h 30 M	8	1 h 40 M
5	10	I				8	1 h 40 M
6	100	2	43	3	4 h 40 M	7	1 h 30 M
6	100	I				10	2 h
7	1000	3	54	3	6 h	6	1 h 20 M
7	1000	6	17	4	2 h 20 M		
7	1000	8	37	3	4 h		
7	1000	I				12	2 h 30 M
8	10000	7	5	5	1 h 30 M		
8	10000	4				7	1 h 30 M
8	10000	I				9	1 h 50 M
9	10	5	22	4	3 h		
10	100	6	5	4	1 h 10 M		
11	1000	7	1	3	50 M		
12	10000	8	1	3	50 M		
18	10	14 und 5	9	3	7 h	3	2 h 30 M
19	100	15 und 6	11	3	8 h	5	4 h 20 M
20	1000	16 und 7	9	5	11 h	8	7 h 10 M

Für die Berechnung von 18, 19 und 20 haben die in der folgenden Art aus zwei Reihen zusammengesetzten Wertefolgen als Ausgangsreihen gedient. Die erste in der Spalte «Ausgangsreihe» angegebene Zahl bezieht sich auf die Alter 3–79, die zweite auf die Alter 80–100.

12.2. Die Ausgleichung zwischen den Altern 80 und 100

Wir haben im Abschnitt 6.3. bereits darauf hingewiesen, dass in der Reihe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten die Bedingungen (54) erfüllt sind. Die Berechnungen haben auch gezeigt, dass die Ausgleichung mit Hilfe des DGV unter Verwendung des klassischen und des neuen Glättmasses die gleichen Werte liefert. Abgesehen von einem Faktor 100 sind diese Resultate mit den Werten der Reihen 1, 2, 3, 4, 14, 15 und 16 in den Tabellen 11 und 23 identisch.

Völlig andere Resultate erhalten wir jedoch, wenn wir anstelle der rohen \bar{q}_x die Reihe $100 \cdot \bar{q}_x$ (Reihe 13, Tabelle 23) ausgleichen. Vor allem in den hohen Altern sind die Bedingungen (54) nicht mehr erfüllt. Die Ausgleiche der Reihe 13 zwischen den Altern 80 und 100 unter Verwendung des neuen Glättmasses haben die in der Tabelle 15 aufgeführten Reihen 5, 6, 7 und 8 ergeben. Bei den Reihen 9, 10, 11 und 12 der Tabelle 19 ist der Korrekturfaktor f (siehe (21) und (32)) mitberücksichtigt worden.

Um uns ein richtiges Bild von der Verschiedenartigkeit der ausgeglichenen Daten machen zu können, haben wir die Reihen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 in den Figuren 9 bis 12 graphisch dargestellt. Weiter haben wir für jede Reihe die Glätte nach klassischer und neuer Methode sowie die Abweichungen von den rohen Daten berechnet. Diese Resultate sind in den Tabellen 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21 und 22 wiedergegeben.

Aus diesem umfangreichen Material können wir die folgenden wichtigen Ergebnisse herauslesen:

1. Im Gegensatz zum üblichen Sterblichkeitsverlauf zeigen alle mit dem DGV ausgeglichenen Reihen in den höchsten Altern ein von unten konkaves Verhalten. Dies ist in den Reihen 1, 2, 5 und 9 derart ausgeprägt, dass die Sterblichkeit am Ende der Reihe wieder abnimmt. Der Grund für dieses «unvernünftige» Verhalten liegt darin, dass wir bei der Ausgleiche nur Werte bis zum Alter 100 berücksichtigt haben und dass $100 \cdot \bar{q}_{100}$ verhältnismässig klein ist.

2. Die Reihe 5 weist beim Alter 100 ein eigenartiges Verhalten auf. Die ausgeglichene Sterblichkeit ist dort kleiner als der schon kleine rohe Wert. Wir haben hier einen der in 5.2. erwähnten Fälle vor uns, wo das Glättmass z einen zu kleinen Wert anzeigt. Sobald wir den Korrekturfaktor f mitberücksichtigen (z_f), wie das bei der Reihe 9 geschehen ist, fällt der ausgeglichene Wert wesentlich höher aus. Durch die nachfolgende kleine Tabelle, in welcher die Glättewerte des letzten Stücks der Reihe 5 mit und ohne Faktor f angegeben sind, wird dies verdeutlicht.

Alter	Glättewert z	Glättewert z_f
96– 99	$9,61 \cdot 10^{-2}$	$7,76 \cdot 10^{-2}$
97–100	$5,97 \cdot 10^{-2}$	$5,48 \cdot 10^{-1}$

3. Mit Ausnahme der Reihen 5 und 9 sind die Unterschiede zwischen den sich entsprechenden Werten der Tabellen 15 und 19 nicht wesentlich. Der Korrekturfaktor f hat auch hier im allgemeinen keinen grossen Einfluss auf die Ausgleichung. Gleich wie im Abschnitt 7 zeigt sich auch hier wieder, dass die Korrektur f sich immer weniger auf die Resultate auswirkt, je glätter die Reihe ist. Ist ein einigermaßen glatter Verlauf vorausgesetzt, so dürfen wir bei der Ausgleichung mittels des DGV auf f vollkommen verzichten.

4. Die Unterschiede zwischen dem Grundgedanken des klassischen Masses, in welchem eine möglichst geringe Abweichung von einer Parabel 2. Grades verlangt wird, und dem des neuen Masses, in dem die Krümmungsänderung als möglichst klein gefordert wird, treten im letzten Stück der Reihe 2 deutlich in Erscheinung. So weisen die klassischen Glättewerte (Tabelle 13) mit wachsendem Alter eine fallende, die neuen Werte (Tabelle 14) hingegen eine steigende Tendenz auf. Mit steigendem x nähert sich die Reihe immer mehr einem parabolischen Verlauf; die Änderung der Krümmung dagegen wird immer grösser. Aus dem gleichen Grund werden mit dem klassischen Mass die beiden Reihen 2 und 8 in ihrem letzten Teilstück etwa gleich bewertet, während die neuen Glättewerte für die zwei Reihen stark verschieden sind, was uns beim Betrachten der beiden Figuren vernünftig erscheint.

5. Mit Ausnahme der Reihe 5, die einen unregelmässigen Verlauf hat, besitzt die Folge der lokalen Glättewerte jeder Reihe, gemessen mit demjenigen Mass, das auch bei der Ausgleichung dieser Reihe verwendet wurde, ein lokales Maximum im mittleren Bereich der Reihe. Dieses Maximum befindet sich an der Stelle, wo der konvexe Verlauf in den konkaven übergeht. Beim neuen Mass besitzen dort die beiden zur Bestimmung des Glättewerts benötigten Krümmungen unterschiedliche Vorzeichen, was zur Folge hat, dass nicht ihre Differenz, sondern ihre Summe quadriert wird. Das gleiche lässt sich auch für das klassische Mass sagen, nur dass dabei an die Stelle der Krümmung die zweite Differenz tritt.

6. Bei der Beurteilung der globalen Glätte wollen wir uns auf das im Abschnitt 8.2. erwähnte «Platzziffern-Kriterium» stützen. Nach den Werten der Tabellen 13, 14, 17 und 18 ergeben sich die folgenden Ranglisten:

Klassisches Glättemass:

Rang	Reihe	Platzziffer
1.	4	23
2.	3	43
3.	2	63
4.	8	77
5.	7	80
6.	1	98
7.	6	112
8.	5	144

Neues Glättemass:

Rang	Reihe	Platzziffer
1.	4	20
2.	8	51
3.	3	73
4.	7	78
5.	2	83
6.	1	95
7.	6	111
8.	5	137

Während die beiden Ranglisten in den Extremwerten übereinstimmen, ergeben sich dazwischen doch deutliche Unterschiede. So fällt vor allem auf, dass die Reihen 2 und 8 bezüglich ihrer Ränge und ihrer Platzziffern ganz verschieden bewertet werden. Wenn wir die Bilder der 8 Reihen miteinander vergleichen, so erkennen wir, dass sich die zweite Rangliste (neues Glättemass) wohl am ehesten mit den Erwartungen deckt, die wir auf Grund unserer Vorstellung von der Glätte haben. In den wesentlichen Punkten werden diese beiden Ranglisten sowohl durch die globalen Glättewerte als auch durch lokale Betrachtungen bestätigt.

7. Mit Ausnahme der Reihe 5 dürfen wir alle in den Figuren 9 bis 12 dargestellten Reihen als vernünftig bezeichnen. Je nachdem was für Ansprüche wir bezüglich des Verlaufs der Glätte und der Abweichungen von den rohen Daten an die ausgeglichene Reihe stellen, werden wir der einen oder anderen Reihe den Vorzug geben.

Tabelle 11

Ausgleichung mit Hilfe des klassischen Glättmasses

Alter	Reihe 1 $G = 10$	Reihe 2 $G = 100$	Reihe 3 $G = 1000$	Reihe 4 $G = 10000$
80	14.332	14.453	13.999	12.998
81	15.521	15.525	15.208	14.738
82	16.780	16.702	16.532	16.491
83	18.122	17.987	17.971	18.257
84	19.551	19.384	19.524	20.037
85	21.061	20.898	21.186	21.828
86	22.639	22.538	22.953	23.630
87	24.272	24.309	24.814	25.438
88	26.002	26.218	26.754	27.249
89	27.925	28.270	28.754	29.059
90	30.090	30.446	30.787	30.860
91	32.445	32.703	32.822	32.647
92	34.893	34.975	34.823	34.412
93	37.267	37.177	36.751	36.148
94	39.436	39.222	38.572	37.847
95	41.273	41.026	40.252	39.505
96	42.810	42.529	41.767	41.116
97	43.983	43.677	43.095	42.677
98	44.656	44.423	44.226	44.186
99	44.712	44.739	45.150	45.641
100	44.034	44.606	45.866	47.044

Tabelle 12

Abweichungen von den rohen Daten

Alter	Abweichungen			
	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4
80	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$2.38 \cdot 10^{-1}$	$-2.16 \cdot 10^{-1}$	-1.22
81	$-3.02 \cdot 10^{-1}$	$-2.98 \cdot 10^{-1}$	$-6.15 \cdot 10^{-1}$	-1.09
82	$1.36 \cdot 10^{-1}$	$5.80 \cdot 10^{-2}$	$-1.12 \cdot 10^{-1}$	$-1.53 \cdot 10^{-1}$
83	$9.50 \cdot 10^{-2}$	$-4.00 \cdot 10^{-2}$	$-5.60 \cdot 10^{-2}$	$2.30 \cdot 10^{-1}$
84	$2.80 \cdot 10^{-2}$	$-1.39 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$5.14 \cdot 10^{-1}$
85	$4.61 \cdot 10^{-1}$	$2.98 \cdot 10^{-1}$	$5.86 \cdot 10^{-1}$	1.23
86	$-5.36 \cdot 10^{-1}$	$-6.37 \cdot 10^{-1}$	$-2.22 \cdot 10^{-1}$	$4.55 \cdot 10^{-1}$
87	-1.02	$-9.85 \cdot 10^{-1}$	$-4.80 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-1}$
88	$5.11 \cdot 10^{-1}$	$7.27 \cdot 10^{-1}$	1.26	1.76
89	1.04	1.38	1.86	2.17
90	$-7.38 \cdot 10^{-1}$	$-3.82 \cdot 10^{-1}$	$-4.10 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-2}$
91	1.23	1.49	1.61	1.44
92	-1.29	-1.21	-1.36	-1.77
93	1.76	1.67	1.25	$6.43 \cdot 10^{-1}$
94	-4.00	-4.21	-4.86	-5.59
95	2.75	2.50	1.73	$9.80 \cdot 10^{-1}$
96	$6.22 \cdot 10^{-1}$	$3.41 \cdot 10^{-1}$	$-4.21 \cdot 10^{-1}$	-1.07
97	-1.02	-1.32	-1.91	-2.32
98	1.32	1.09	$8.93 \cdot 10^{-1}$	$8.53 \cdot 10^{-1}$
99	-2.35	-2.32	-1.91	-1.42
100	1.18	1.75	3.01	4.19
Quadratische Abweichungen				
80-100	$4.34 \cdot 10$	$4.62 \cdot 10$	$5.61 \cdot 10$	$7.71 \cdot 10$
80- 90	3.55	4.21	6.13	$1.25 \cdot 10$
91-100	$3.99 \cdot 10$	$4.20 \cdot 10$	$4.99 \cdot 10$	$6.46 \cdot 10$

Tabelle 13 *Klassische Glättewerte*

Alter	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4
80– 83	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.00	0.00
81– 84	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
82– 85	$3.60 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
83– 86	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$8.10 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	0.00
84– 87	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
85– 88	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$4.90 \cdot 10^{-5}$	$2.25 \cdot 10^{-4}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
86– 89	$9.22 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$
87– 90	$2.40 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$7.29 \cdot 10^{-4}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$
88– 91	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
89– 92	$9.41 \cdot 10^{-3}$	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$
90– 93	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$7.23 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-3}$	$4.90 \cdot 10^{-5}$
91– 94	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$7.57 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$
92– 95	$1.61 \cdot 10^{-2}$	$7.06 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$
93– 96	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$5.76 \cdot 10^{-4}$	$3.60 \cdot 10^{-5}$
94– 97	$4.10 \cdot 10^{-3}$	$2.92 \cdot 10^{-3}$	$4.84 \cdot 10^{-4}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
95– 98	$1.85 \cdot 10^{-2}$	$2.21 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
96– 99	$1.37 \cdot 10^{-2}$	$7.84 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
97–100	$1.37 \cdot 10^{-2}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
80–100	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$3.85 \cdot 10^{-2}$	$8.83 \cdot 10^{-3}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$
80– 91	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$2.44 \cdot 10^{-3}$	$2.44 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-4}$
89–100	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{-2}$	$6.39 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 14 *Neue Glättewerte z*

Alter	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4
80– 83	$1.15 \cdot 10^{-6}$	$1.40 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$7.05 \cdot 10^{-10}$
81– 84	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$8.38 \cdot 10^{-9}$
82– 85	$9.11 \cdot 10^{-6}$	$7.19 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-7}$
83– 86	$1.23 \cdot 10^{-5}$	$3.59 \cdot 10^{-6}$	$6.96 \cdot 10^{-6}$	$3.20 \cdot 10^{-10}$
84– 87	$7.83 \cdot 10^{-6}$	$5.77 \cdot 10^{-6}$	$8.15 \cdot 10^{-6}$	$3.40 \cdot 10^{-7}$
85– 88	$2.33 \cdot 10^{-5}$	$3.71 \cdot 10^{-6}$	$6.77 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$
86– 89	$7.14 \cdot 10^{-5}$	$3.74 \cdot 10^{-6}$	$5.83 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-7}$
87– 90	$6.80 \cdot 10^{-7}$	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$7.13 \cdot 10^{-6}$	$8.29 \cdot 10^{-7}$
88– 91	$6.37 \cdot 10^{-5}$	$1.65 \cdot 10^{-5}$	$7.41 \cdot 10^{-6}$	$3.51 \cdot 10^{-7}$
89– 92	$5.36 \cdot 10^{-5}$	$2.16 \cdot 10^{-5}$	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$9.65 \cdot 10^{-7}$
90– 93	$8.92 \cdot 10^{-5}$	$3.30 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$8.86 \cdot 10^{-7}$
91– 94	$8.59 \cdot 10^{-5}$	$5.47 \cdot 10^{-5}$	$1.89 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$
92– 95	$2.65 \cdot 10^{-4}$	$1.33 \cdot 10^{-4}$	$3.67 \cdot 10^{-5}$	$6.14 \cdot 10^{-7}$
93– 96	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$3.32 \cdot 10^{-4}$	$5.56 \cdot 10^{-5}$	$1.40 \cdot 10^{-6}$
94– 97	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$8.20 \cdot 10^{-7}$
95– 98	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$5.98 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$	$7.60 \cdot 10^{-7}$
96– 99	$9.92 \cdot 10^{-2}$	$2.05 \cdot 10^{-2}$	$4.33 \cdot 10^{-4}$	$9.86 \cdot 10^{-7}$
97–100	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$2.10 \cdot 10^{-2}$	$6.76 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-7}$
80–100	$1.34 \cdot 10^{-1}$	$4.95 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$9.93 \cdot 10^{-6}$
80– 91	$1.91 \cdot 10^{-4}$	$7.60 \cdot 10^{-5}$	$8.52 \cdot 10^{-5}$	$1.99 \cdot 10^{-6}$
89–100	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$4.94 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$7.93 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 15

Ausgleichung mit Hilfe des neuen Glättmasses z

Alter	Reihe 5 $G = 10$	Reihe 6 $G = 100$	Reihe 7 $G = 1000$	Reihe 8 $G = 10000$
80	14.297	14.354	14.293	14.341
81	15.608	15.510	15.524	15.502
82	16.796	16.736	16.812	16.732
83	18.008	18.061	18.164	18.039
84	19.347	19.519	19.583	19.434
85	20.946	21.120	21.069	20.927
86	23.074	22.813	22.620	22.533
87	24.644	24.431	24.232	24.269
88	25.839	25.988	25.933	26.156
89	27.285	27.705	27.802	28.215
90	30.091	29.792	29.942	30.443
91	31.950	32.084	32.396	32.772
92	34.926	34.853	35.105	35.069
93	36.518	37.361	37.604	37.184
94	40.510	40.086	39.653	39.042
95	41.437	41.617	41.216	40.641
96	42.699	42.766	42.435	42.015
97	44.585	43.615	43.393	43.201
98	45.303	44.192	44.143	44.232
99	45.312	44.535	44.723	45.133
100	42.630	44.666	45.162	45.924

Tabelle 16

Abweichungen von den rohen Daten

Alter	Abweichungen			
	Reihe 5	Reihe 6	Reihe 7	Reihe 8
80	$8.20 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-1}$	$7.80 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$
81	$-2.15 \cdot 10^{-1}$	$-3.13 \cdot 10^{-1}$	$-2.99 \cdot 10^{-1}$	$-3.21 \cdot 10^{-1}$
82	$1.52 \cdot 10^{-1}$	$9.20 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$	$8.80 \cdot 10^{-2}$
83	$-1.90 \cdot 10^{-2}$	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$
84	$-1.76 \cdot 10^{-1}$	$-4.00 \cdot 10^{-3}$	$6.00 \cdot 10^{-2}$	$-8.90 \cdot 10^{-2}$
85	$3.46 \cdot 10^{-1}$	$5.20 \cdot 10^{-1}$	$4.69 \cdot 10^{-1}$	$3.27 \cdot 10^{-1}$
86	$-1.01 \cdot 10^{-1}$	$-3.62 \cdot 10^{-1}$	$-5.55 \cdot 10^{-1}$	$-6.42 \cdot 10^{-1}$
87	$-6.50 \cdot 10^{-1}$	$-8.63 \cdot 10^{-1}$	-1.06	-1.03
88	$3.48 \cdot 10^{-1}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$	$4.42 \cdot 10^{-1}$	$6.65 \cdot 10^{-1}$
89	$3.95 \cdot 10^{-1}$	$8.15 \cdot 10^{-1}$	$9.12 \cdot 10^{-1}$	1.33
90	$-7.37 \cdot 10^{-1}$	-1.04	$-8.86 \cdot 10^{-1}$	$-3.85 \cdot 10^{-1}$
91	$7.39 \cdot 10^{-1}$	$8.73 \cdot 10^{-1}$	1.19	1.56
92	-1.26	-1.33	-1.08	-1.11
93	1.01	1.86	2.10	1.68
94	-2.92	-3.35	-3.78	-4.39
95	2.91	3.09	2.69	2.12
96	$5.11 \cdot 10^{-1}$	$5.78 \cdot 10^{-1}$	$2.47 \cdot 10^{-1}$	$-1.73 \cdot 10^{-1}$
97	$-4.15 \cdot 10^{-1}$	-1.39	-1.61	-1.80
98	1.97	$8.59 \cdot 10^{-1}$	$8.10 \cdot 10^{-1}$	$8.99 \cdot 10^{-1}$
99	-1.75	-2.52	-2.34	-1.93
100	$-2.27 \cdot 10^{-1}$	1.81	2.31	3.07
Quadratische Abweichungen				
80-100	$2.91 \cdot 10$	$4.26 \cdot 10$	$4.62 \cdot 10$	$5.15 \cdot 10$
80- 90	1.48	3.26	3.61	4.05
91-100	$2.76 \cdot 10$	$3.94 \cdot 10$	$4.26 \cdot 10$	$4.75 \cdot 10$

Tabelle 17 *Klassische Glättewerte*

Alter	Reihe 5	Reihe 6	Reihe 7	Reihe 8
80– 83	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$8.41 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-5}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$
81– 84	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$
82– 85	$1.77 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	0.00	$1.00 \cdot 10^{-4}$
83– 86	$7.24 \cdot 10^{-2}$	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-4}$
84– 87	1.18	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$2.89 \cdot 10^{-4}$
85– 88	$3.35 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$7.84 \cdot 10^{-4}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$
86– 89	$3.92 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-2}$	$6.24 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$
87– 90	1.23	$4.41 \cdot 10^{-2}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
88– 91	5.32	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$4.62 \cdot 10^{-3}$
89– 92	4.26	$7.40 \cdot 10^{-2}$	$3.48 \cdot 10^{-3}$	$1.77 \cdot 10^{-2}$
90– 93	6.26	$5.45 \cdot 10^{-1}$	$2.16 \cdot 10^{-1}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$
91– 94	$1.43 \cdot 10$	$2.28 \cdot 10^{-1}$	$5.76 \cdot 10^{-2}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$
92– 95	$2.99 \cdot 10$	1.99	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
93– 96	$1.16 \cdot 10$	$6.59 \cdot 10^{-1}$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$
94– 97	$8.35 \cdot 10^{-2}$	$6.72 \cdot 10^{-3}$	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$
95– 98	3.21	$7.84 \cdot 10^{-4}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$
96– 99	$2.11 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$
97–100	3.93	$4.84 \cdot 10^{-4}$	$8.41 \cdot 10^{-4}$	$4.00 \cdot 10^{-4}$
80–100	$8.20 \cdot 10$	3.66	$3.30 \cdot 10^{-1}$	$5.68 \cdot 10^{-2}$
80– 91	8.28	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$	$6.31 \cdot 10^{-3}$
89–100	$7.37 \cdot 10$	3.51	$3.11 \cdot 10^{-1}$	$5.05 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 18 *Neue Glättewerte z*

Alter	Reihe 5	Reihe 6	Reihe 7	Reihe 8
80– 83	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$2.16 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^{-9}$
81– 84	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$4.38 \cdot 10^{-7}$	$6.89 \cdot 10^{-8}$
82– 85	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$9.01 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$1.98 \cdot 10^{-7}$
83– 86	$1.02 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$	$4.30 \cdot 10^{-9}$
84– 87	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$5.40 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-6}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$
85– 88	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-6}$	$8.86 \cdot 10^{-6}$	$3.09 \cdot 10^{-7}$
86– 89	$1.73 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$5.40 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-6}$
87– 90	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$	$9.78 \cdot 10^{-6}$
88– 91	$2.96 \cdot 10^{-2}$	$5.19 \cdot 10^{-4}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$3.88 \cdot 10^{-5}$
89– 92	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$8.31 \cdot 10^{-5}$	$6.39 \cdot 10^{-5}$	$7.32 \cdot 10^{-5}$
90– 93	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$4.72 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
91– 94	$4.11 \cdot 10^{-2}$	$4.63 \cdot 10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$
92– 95	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$6.90 \cdot 10^{-4}$	$8.47 \cdot 10^{-5}$
93– 96	$1.07 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$4.37 \cdot 10^{-5}$
94– 97	$2.87 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$
95– 98	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-4}$	$7.26 \cdot 10^{-6}$
96– 99	$9.61 \cdot 10^{-2}$	$8.05 \cdot 10^{-4}$	$4.35 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-6}$
97–100	$5.97 \cdot 10^{-2}$	$3.85 \cdot 10^{-4}$	$2.31 \cdot 10^{-6}$	$3.20 \cdot 10^{-7}$
80–100	$6.69 \cdot 10^{-1}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$2.21 \cdot 10^{-3}$	$5.15 \cdot 10^{-4}$
80– 91	$6.65 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$5.06 \cdot 10^{-5}$
89–100	$6.02 \cdot 10^{-1}$	$1.69 \cdot 10^{-2}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$4.64 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 19

Ausgleichung mit Hilfe des Glätttemasses z_f

Alter	Reihe 9 $G = 10$	Reihe 10 $G = 100$	Reihe 11 $G = 1000$	Reihe 12 $G = 10000$
80	14.298	14.353	14.293	14.340
81	15.606	15.510	15.525	15.501
82	16.794	16.736	16.812	16.731
83	18.009	18.062	18.163	18.039
84	19.353	19.519	19.582	19.434
85	20.959	21.121	21.068	20.927
86	23.055	22.813	22.619	22.534
87	24.629	24.430	24.231	24.271
88	25.850	25.985	25.933	26.159
89	27.364	27.699	27.805	28.219
90	30.037	29.782	29.947	30.446
91	31.965	32.103	32.403	32.774
92	35.027	34.959	35.110	35.068
93	36.865	37.461	37.601	37.180
94	40.226	39.972	39.643	39.037
95	41.428	41.538	41.208	40.636
96	42.829	42.726	42.431	42.012
97	44.208	43.602	43.392	43.200
98	44.792	44.196	44.144	44.233
99	44.755	44.550	44.727	45.136
100	43.754	44.688	45.167	45.928

Tabelle 20

Abweichungen von den rohen Daten

Alter	Abweichungen			
	Reihe 9	Reihe 10	Reihe 11	Reihe 12
80	$8.30 \cdot 10^{-2}$	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$7.80 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$
81	$-2.17 \cdot 10^{-1}$	$-3.13 \cdot 10^{-1}$	$-2.98 \cdot 10^{-1}$	$-3.22 \cdot 10^{-1}$
82	$1.50 \cdot 10^{-1}$	$9.20 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$	$8.70 \cdot 10^{-2}$
83	$-1.80 \cdot 10^{-2}$	$3.50 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$
84	$-1.70 \cdot 10^{-1}$	$-4.00 \cdot 10^{-3}$	$5.90 \cdot 10^{-2}$	$-8.90 \cdot 10^{-2}$
85	$3.59 \cdot 10^{-1}$	$5.21 \cdot 10^{-1}$	$4.68 \cdot 10^{-1}$	$3.27 \cdot 10^{-1}$
86	$-1.20 \cdot 10^{-1}$	$-3.62 \cdot 10^{-1}$	$-5.56 \cdot 10^{-1}$	$-6.41 \cdot 10^{-1}$
87	$-6.65 \cdot 10^{-1}$	$-8.64 \cdot 10^{-1}$	-1.06	-1.02
88	$3.59 \cdot 10^{-1}$	$4.94 \cdot 10^{-1}$	$4.42 \cdot 10^{-1}$	$6.68 \cdot 10^{-1}$
89	$4.74 \cdot 10^{-1}$	$8.09 \cdot 10^{-1}$	$9.15 \cdot 10^{-1}$	1.33
90	$-7.91 \cdot 10^{-1}$	-1.05	$-8.81 \cdot 10^{-1}$	$-3.82 \cdot 10^{-1}$
91	$7.54 \cdot 10^{-1}$	$8.92 \cdot 10^{-1}$	1.19	1.56
92	-1.16	-1.22	-1.07	-1.12
93	1.36	1.96	2.10	1.68
94	-3.21	-3.46	-3.79	-4.40
95	2.90	3.01	2.68	2.11
96	$6.41 \cdot 10^{-1}$	$5.38 \cdot 10^{-1}$	$2.43 \cdot 10^{-1}$	$-1.76 \cdot 10^{-1}$
97	$-7.92 \cdot 10^{-1}$	-1.40	-1.61	-1.80
98	1.46	$8.63 \cdot 10^{-1}$	$8.11 \cdot 10^{-1}$	$9.00 \cdot 10^{-1}$
99	-2.30	-2.51	-2.33	-1.92
100	$8.97 \cdot 10^{-1}$	1.83	2.31	3.07
Quadratische Abweichungen				
80–100	$3.34 \cdot 10$	$4.31 \cdot 10$	$4.62 \cdot 10$	$5.15 \cdot 10$
80– 90	1.67	3.27	3.61	4.06
91–100	$3.18 \cdot 10$	$3.98 \cdot 10$	$4.26 \cdot 10$	$4.75 \cdot 10$

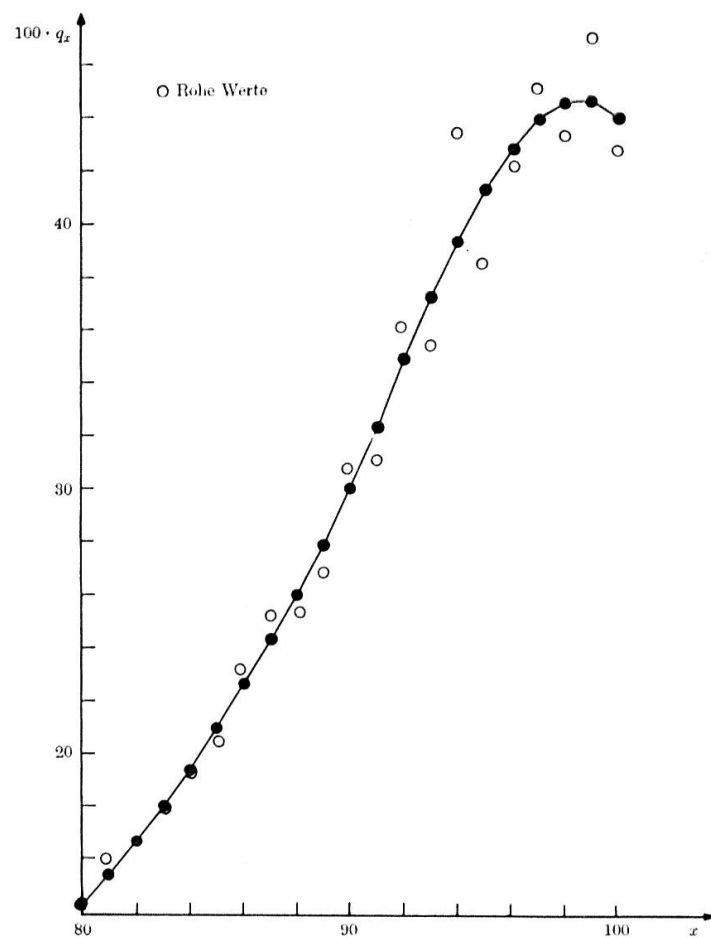
Tabelle 21 *Klassische Glättewerte*

Alter	Reihe 9	Reihe 10	Reihe 11	Reihe 12
80– 83	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$8.10 \cdot 10^{-5}$	$8.10 \cdot 10^{-5}$
81– 84	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$8.10 \cdot 10^{-5}$
82– 85	$1.77 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$
83– 86	$5.20 \cdot 10^{-2}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$
84– 87	1.02	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$
85– 88	$2.86 \cdot 10^{-2}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$8.41 \cdot 10^{-4}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$
86– 89	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-2}$	$6.40 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$
87– 90	$7.50 \cdot 10^{-1}$	$4.41 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
88– 91	3.63	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$1.94 \cdot 10^{-3}$	$4.36 \cdot 10^{-3}$
89– 92	3.53	$8.82 \cdot 10^{-2}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$
90– 93	5.56	$7.90 \cdot 10^{-1}$	$2.18 \cdot 10^{-1}$	$2.19 \cdot 10^{-2}$
91– 94	7.55	$1.32 \cdot 10^{-1}$	$5.43 \cdot 10^{-2}$	$5.33 \cdot 10^{-3}$
92– 95	$1.36 \cdot 10$	$9.10 \cdot 10^{-1}$	$7.84 \cdot 10^{-4}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
93– 96	5.56	$3.21 \cdot 10^{-1}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
94– 97	$4.88 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$6.40 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
95– 98	$5.98 \cdot 10^{-1}$	$9.00 \cdot 10^{-4}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$
96– 99	$3.03 \cdot 10^{-2}$	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$
97–100	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$5.76 \cdot 10^{-4}$	$6.76 \cdot 10^{-4}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$
80–100	$4.25 \cdot 10$	2.39	$3.26 \cdot 10^{-1}$	$5.61 \cdot 10^{-2}$
80– 91	5.95	$1.43 \cdot 10^{-1}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$6.06 \cdot 10^{-3}$
89–100	$3.65 \cdot 10$	2.25	$3.07 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 22 *Neue Glättewerte z*

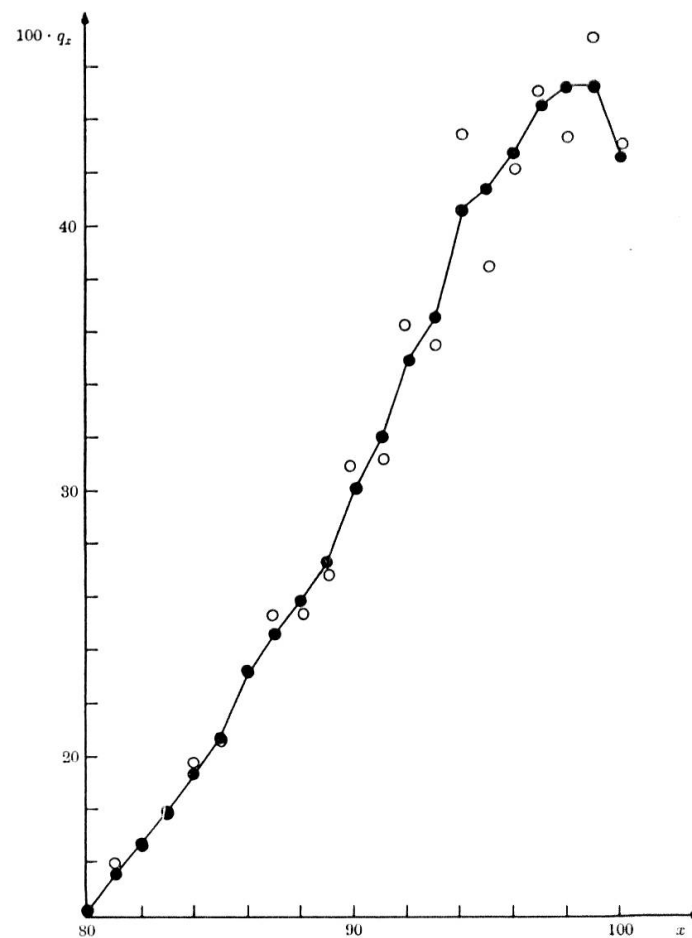
Alter	Reihe 9	Reihe 10	Reihe 11	Reihe 12
80– 83	$1.33 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-5}$	$7.93 \cdot 10^{-7}$	$7.38 \cdot 10^{-8}$
81– 84	$5.33 \cdot 10^{-4}$	$6.64 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$	$3.44 \cdot 10^{-8}$
82– 85	$2.66 \cdot 10^{-4}$	$5.17 \cdot 10^{-6}$	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$4.90 \cdot 10^{-8}$
83– 86	$4.50 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$	$6.68 \cdot 10^{-9}$
84– 87	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$5.28 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-6}$	$3.38 \cdot 10^{-7}$
85– 88	$1.48 \cdot 10^{-4}$	$9.50 \cdot 10^{-7}$	$9.65 \cdot 10^{-6}$	$3.08 \cdot 10^{-7}$
86– 89	$1.71 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$5.48 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-6}$
87– 90	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$2.23 \cdot 10^{-4}$	$1.76 \cdot 10^{-5}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$
88– 91	$2.13 \cdot 10^{-2}$	$4.29 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-5}$	$3.68 \cdot 10^{-5}$
89– 92	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$7.03 \cdot 10^{-5}$	$6.63 \cdot 10^{-5}$	$7.56 \cdot 10^{-5}$
90– 93	$1.69 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$4.78 \cdot 10^{-4}$	$1.15 \cdot 10^{-4}$
91– 94	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$
92– 95	$5.76 \cdot 10^{-2}$	$7.07 \cdot 10^{-3}$	$6.36 \cdot 10^{-4}$	$8.51 \cdot 10^{-5}$
93– 96	$4.40 \cdot 10^{-2}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$
94– 97	$2.45 \cdot 10^{-3}$	$8.10 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
95– 98	$8.76 \cdot 10^{-2}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$7.20 \cdot 10^{-6}$
96– 99	$6.77 \cdot 10^{-2}$	$8.57 \cdot 10^{-4}$	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$3.09 \cdot 10^{-6}$
97–100	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$4.18 \cdot 10^{-4}$	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-6}$
80–100	$3.82 \cdot 10^{-1}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$5.11 \cdot 10^{-4}$
80– 91	$5.44 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$4.96 \cdot 10^{-5}$
89–100	$3.28 \cdot 10^{-1}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$4.61 \cdot 10^{-4}$

a) Reihe 1 ($G = 10$)
Ausgleichung mit klassischem Glätttemass

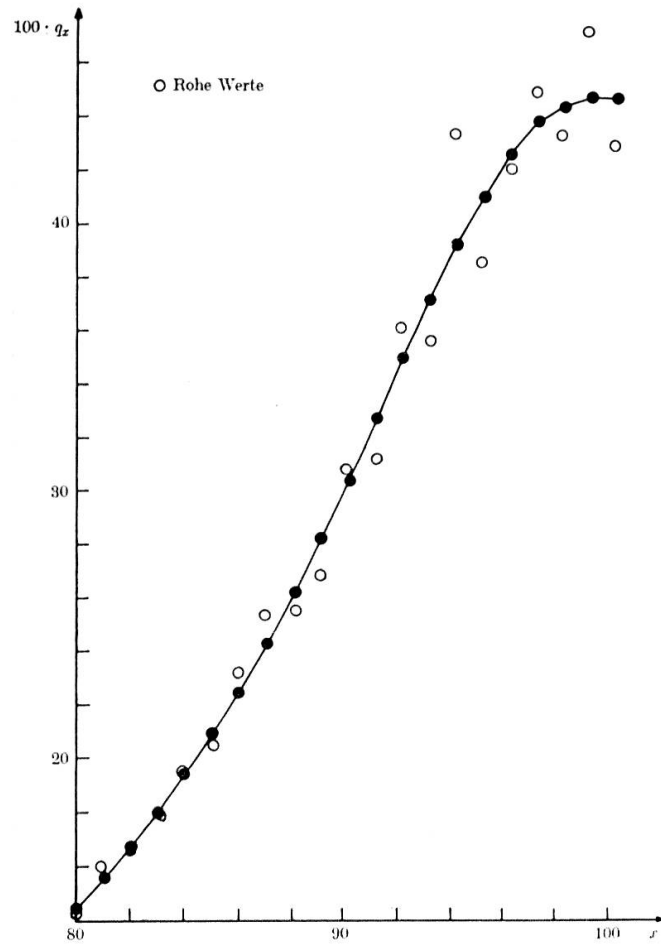


Figur 9

b) Reihe 5 ($G = 10$)
Ausgleichung mit neuem Glätttemass

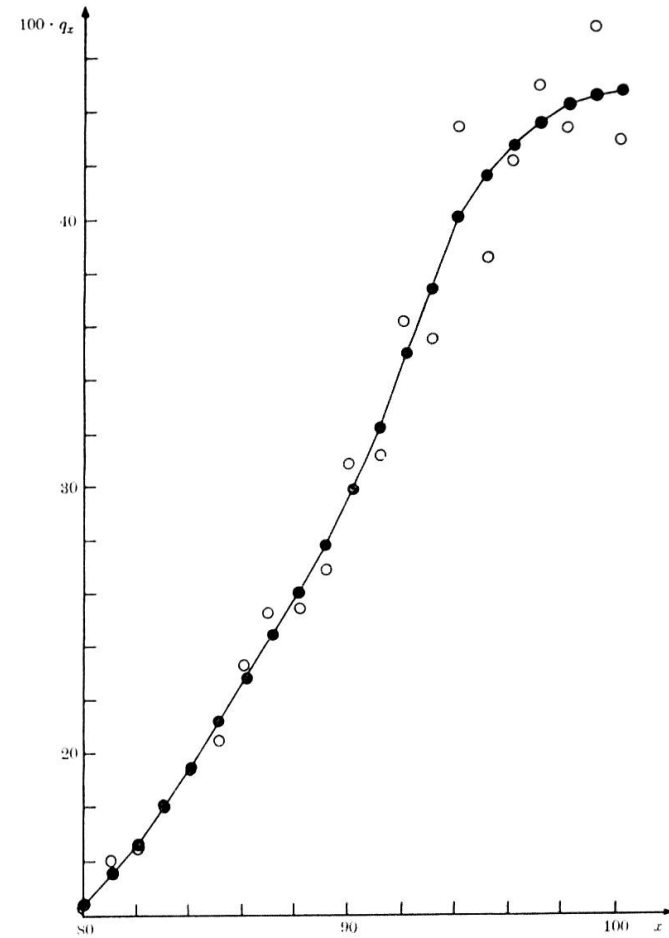


a) Reihe 2 ($G = 100$)
Ausgleichung mit klassischem Glättemass

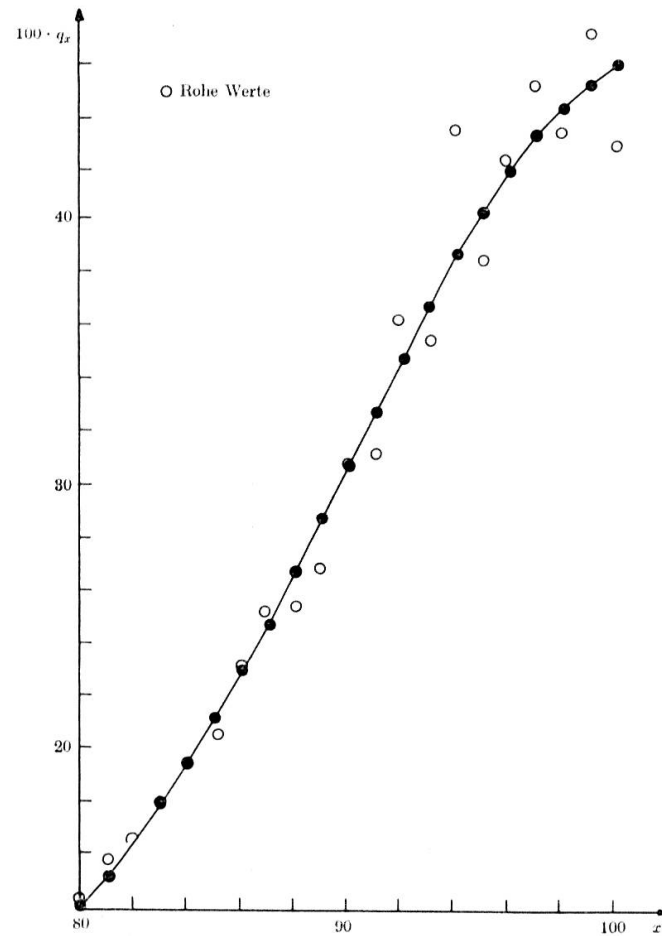


Figur 10

b) Reihe 6 ($G = 100$)
Ausgleichung mit neuem Glättemass

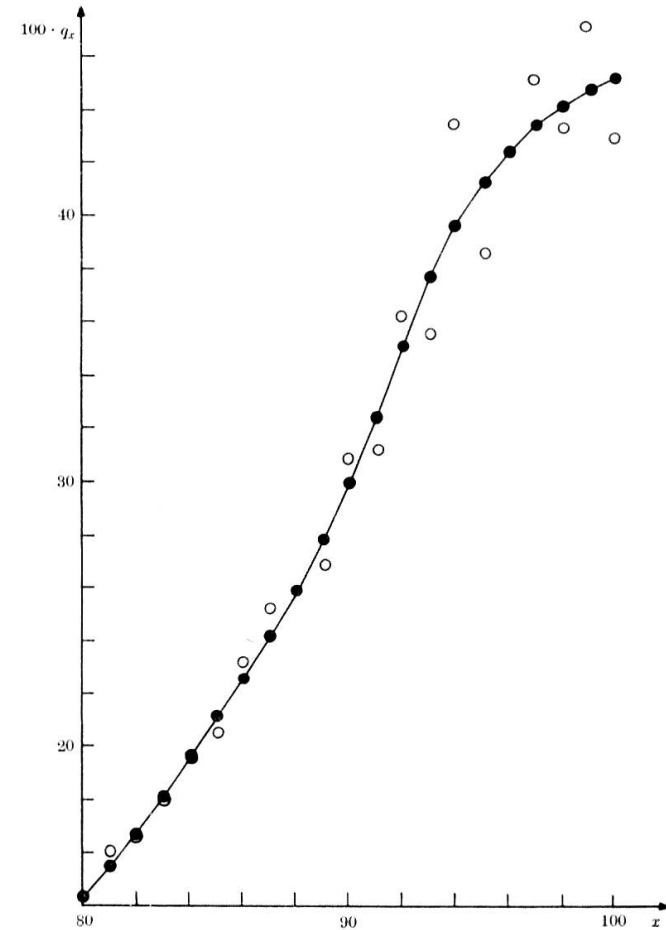


a) Reihe 3 ($G = 1000$)
Ausgleichung mit klassischem Glätttemass

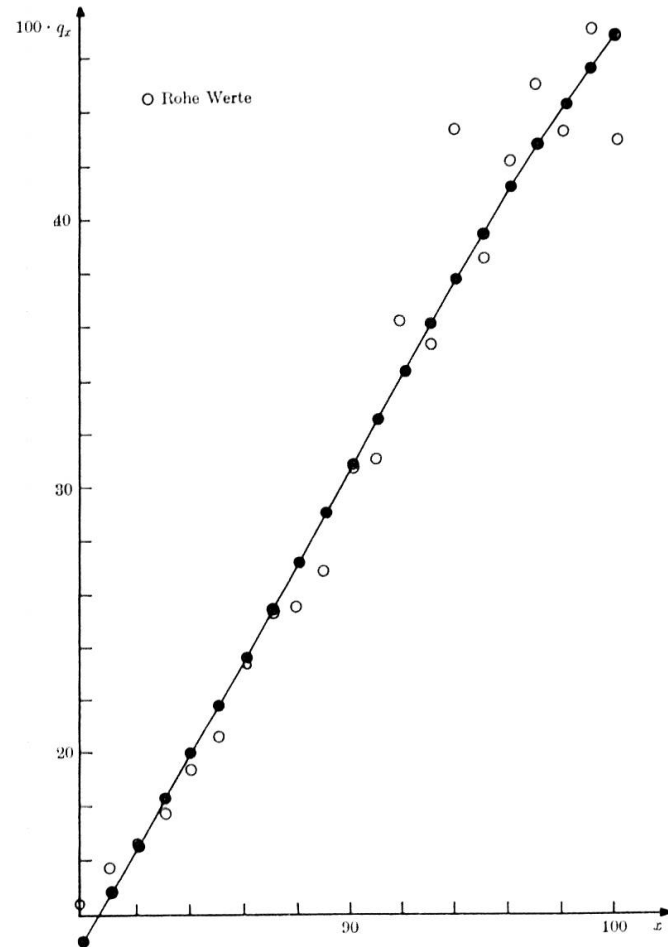


Figur 11

b) Reihe 7 ($G = 1000$)
Ausgleichung mit neuem Glätttemass

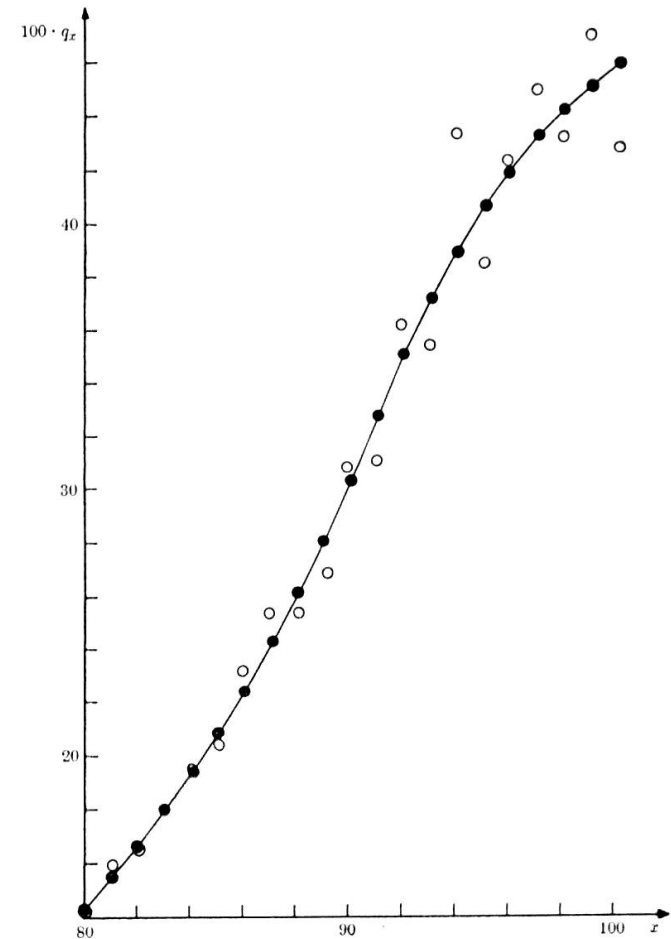


a) Reihe 4 ($G = 10\,000$)
Ausgleichung mit klassischem Glätttemass



Figur 12

b) Reihe 8 ($G = 10\,000$)
Ausgleichung mit neuem Glätttemass



12.3. Die Ausgleichung zwischen den Altern 3 und 100

Bei der Ausgleichung der Sterbetafel SM 1939/44 mit Hilfe des DGV haben wir die Sterbewahrscheinlichkeiten der Alter 0, 1 und 2 nicht miteinbezogen. Die grossen Krümmungsänderungen der Kurve der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten in diesem Altersbereich, welche durch den plötzlichen Übergang von einem steil abfallenden in einen beinahe waagrechten Verlauf bedingt sind, wurden durch viele Beobachtungen erhärtet. Würden wir die Ausgleichung auch auf die ersten Werte der Sterblichkeitskurve ausdehnen, so hätte das zur Folge, dass diese Krümmungsänderungen verkleinert und dadurch die richtigen Werte stark verfälscht würden.

Der Grund für dieses unglatte Verhalten der Sterblichkeitskurve mag wohl darin liegen, dass in den allerersten Lebensjahren ganz besondere Risiken, die mit der Geburt und deren Folgen zusammenhängen, für die hohe Sterblichkeit verantwortlich sind und dass der Einfluss dieser Risiken sehr rasch abnimmt. Die Umschichtung der für die Sterblichkeit massgebenden Gefahrenmerkmale vollzieht sich beinahe sprunghaft, und deshalb sind benachbarte Sterbewahrscheinlichkeiten bezüglich dieser Merkmale wenig miteinander verwandt. Da aber bei jeder Ausgleichung eines Wertes die benachbarten Punkte für die Berechnung mitbestimmend sind, ist eine solche Ausgleichung in den jüngsten Altern nicht sehr sinnvoll. Sie ist erst dann zweckmässig, wenn die Sterbewahrscheinlichkeiten nicht im Abstand von einem Jahr, sondern vielleicht von einem Monat gegeben sind.

Mit Ausnahme der rohen Werte $100 \cdot \bar{q}_x$ (Reihe 13) sind in der Tabelle 23 die mit Hilfe des klassischen DGV ausgeglichenen Werte (Reihen 14 bis 16) aufgeführt. Die Reihe 17 der Tabelle 26 ist die offizielle, nach der Methode von King geglättete Tafel. Die Resultate der Ausgleichung nach dem DGV unter Verwendung des neuen Masses z sind in der Tabelle 26 (Reihen 18 bis 20) angegeben. In den Tabellen 24, 25, 27 und 28 finden wir für jede Reihe die Abweichungen von den rohen Daten sowie die mit Hilfe des neuen Masses z berechneten Glättewerte.

Bis etwa zum Alter 65 stimmen die Sterblichkeiten der Reihen 14 bis 16 mit den entsprechenden der Reihen 18 bis 20 weitgehend überein. Erst in höheren Altern machen sich Unterschiede bemerkbar, da im letzten Teilstück die Bedingungen (54) nicht mehr erfüllt sind.

Die offizielle, nach King ausgeglichene Reihe 17 ist bis zum Alter 75 mit einigen lokalen Ausnahmen die unglättteste der 7 Reihen 14 bis 20. Von diesem Alter an werden die Glättewerte von 17 immer kleiner. Beim Vergleich der offiziellen Sterblichkeiten mit den nach dem DGV ausgeglichenen Werten müssen wir beachten, dass beim DGV nur die rohen Daten bis zum Alter 100 berücksichtigt wurden; bei der offiziellen Ausgleichung sind auch die Sterblichkeiten der höheren Alter verwendet worden. Ein Vergleich über das Alter 90 hinaus ist deshalb nicht sinnvoll.

Wie wir den Tabellen 23 bis 28 entnehmen können, ergibt das DGV unvernünftige Resultate, solange die G -Werte über den ganzen Altersbereich hinweg konstant bleiben. So sind entweder die Sterblichkeiten der höheren Alter zwar richtig, die der früheren Lebensjahre aber zu stark ausgeglichen, oder aber die Werte der früheren Alter sind vernünftig, dagegen ist das letzte Stück der Reihe zu wenig ausgeglichen. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass in den hohen Altern die Anzahl der unter Beobachtung gestandenen Personen mit wachsendem x immer kleiner wird, und somit die rohen Sterblichkeiten grösseren Schwankungen unterworfen sind als in früheren Altern. Ob mit wachsendem x der Vertrauenskoeffizient $E(x)$ (siehe (59)) verkleinert oder die G -Werte vergrössert werden, der Effekt wird der gleiche bleiben; dadurch wird dafür gesorgt, dass die mit wachsendem Alter zunehmenden Unregelmässigkeiten in den rohen Daten keinen oder zumindest nur in beschränktem Masse einen Niederschlag in den ausgeglichenen Werten finden. Es wird jeweilen von der Art der Problemstellung und der weiteren Verwendung der ausgeglichenen Werte abhängen, wie die Grössen $G(x)$ oder $E(x)$ gewählt werden sollen.

Gerade hier zeigt sich der Nachteil des DGV in der Form (59). Dadurch, dass es äusserst anpassungsfähig ist, wird dem Benützer zuviel Freiheit gelassen, die sich in der Unsicherheit bei der Wahl der Gewichte manifestiert. Trotz alledem ist das DGV wirkungsvoll. So sind bis zum Alter 75 mit einigen lokalen Ausnahmen die Reihen 14 und 18 glätter als die offizielle Reihe 17; und trotzdem sind, wie die Tabellen 24 und 27 zeigen, die Abweichungen von den rohen Werten in 14 und 18 im allgemeinen kleiner als in der Reihe 17.

Tabelle 23

Ausgleichung mit Hilfe des klassischen Glättmasses

Alter	Reihe 13 Rohe Werte	Reihe 14 $G = 10$	Reihe 15 $G = 100$	Reihe 16 $G = 1000$
3	.254	.247	.242	.235
4	.200	.205	.207	.202
5	.168	.173	.178	.175
6	.144	.151	.155	.153
7	.135	.137	.137	.136
8	.146	.127	.124	.125
9	.115	.121	.115	.118
10	.113	.117	.112	.116
11	.132	.115	.112	.119
12	.108	.116	.118	.127
13	.118	.122	.128	.138
14	.125	.135	.142	.152
15	.156	.154	.161	.169
16	.178	.178	.183	.188
17	.218	.205	.207	.208
18	.220	.232	.231	.228
19	.251	.259	.254	.247
20	.289	.281	.275	.264
21	.313	.299	.292	.280
22	.324	.310	.305	.292
23	.292	.316	.314	.302
24	.302	.319	.319	.309
25	.325	.320	.320	.313
26	.342	.319	.319	.315
27	.304	.315	.315	.315
28	.317	.309	.311	.314
29	.293	.304	.307	.313
30	.310	.301	.305	.311
31	.294	.300	.304	.311
32	.289	.304	.306	.313
33	.309	.312	.311	.317
34	.345	.322	.318	.323
35	.348	.333	.329	.333
36	.325	.344	.342	.346
37	.353	.359	.360	.362
38	.376	.379	.381	.383
39	.431	.403	.406	.408

Tabelle 23 *Ausgleichung mit Hilfe*

Alter	Reihe 13 Rohe Werte	Reihe 14 $G = 10$	Reihe 15 $G = 100$	Reihe 16 $G = 1000$
40	.415	.433	.437	.437
41	.444	.469	.471	.470
42	.517	.511	.511	.508
43	.584	.557	.554	.551
44	.612	.605	.602	.597
45	.639	.655	.653	.649
46	.687	.709	.709	.705
47	.811	.769	.770	.767
48	.814	.834	.836	.834
49	.903	.907	.908	.908
50	.970	.987	.986	.988
51	1.104	1.076	1.072	1.076
52	1.153	1.171	1.166	1.171
53	1.276	1.273	1.269	1.276
54	1.371	1.383	1.381	1.390
55	1.579	1.502	1.506	1.514
56	1.598	1.632	1.643	1.650
57	1.730	1.781	1.795	1.798
58	1.947	1.951	1.963	1.960
59	2.155	2.143	2.146	2.137
60	2.374	2.352	2.345	2.330
61	2.575	2.575	2.560	2.541
62	2.749	2.810	2.792	2.772
63	3.148	3.058	3.042	3.025
64	3.323	3.320	3.313	3.303
65	3.602	3.603	3.610	3.609
66	3.930	3.920	3.938	3.946
67	4.212	4.283	4.301	4.318
68	4.669	4.697	4.706	4.729
69	5.118	5.164	5.154	5.182
70	5.846	5.677	5.651	5.680
71	6.160	6.231	6.200	6.227
72	6.862	6.828	6.806	6.826
73	7.415	7.476	7.474	7.481
74	8.287	8.186	8.209	8.196
75	8.940	8.966	9.016	8.975
76	9.770	9.832	9.899	9.822
77	10.869	10.792	10.858	10.741
78	11.667	11.847	11.890	11.736
79	12.987	12.992	12.991	12.813

des klassischen Glättemasses (Fortsetzung)

Alter	Reihe 13 Rohe Werte	Reihe 14 $G = 10$	Reihe 15 $G = 100$	Reihe 16 $G = 1000$
80	14.215	14.207	14.155	13.975
81	15.823	15.472	15.378	15.229
82	16.644	16.779	16.660	16.578
83	18.027	18.141	18.008	18.027
84	19.523	19.573	19.435	19.579
85	20.600	21.076	20.956	21.235
86	23.175	22.645	22.587	22.991
87	25.294	24.272	24.343	24.839
88	25.491	25.998	26.237	26.767
89	26.890	27.921	28.275	28.755
90	30.828	30.087	30.441	30.779
91	31.211	32.444	32.692	32.808
92	36.183	34.893	34.962	34.804
93	35.505	37.268	37.165	36.731
94	43.434	39.436	39.213	38.552
95	38.525	41.274	41.020	40.234
96	42.188	42.810	42.527	41.752
97	45.000	43.983	43.677	43.086
98	43.333	44.656	44.425	44.223
99	47.059	44.712	44.741	45.155
100	42.857	44.034	44.608	45.880

Tabelle 24

Quadratische Abweichungen von den rohen Daten

Alter	Reihe 14	Reihe 15	Reihe 16
3-100	$4.36 \cdot 10$	$4.64 \cdot 10$	$5.65 \cdot 10$
3- 10	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$9.03 \cdot 10^{-4}$	$9.55 \cdot 10^{-4}$
11- 20	$9.14 \cdot 10^{-4}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$
21- 30	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-3}$
31- 40	$2.54 \cdot 10^{-3}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$
41- 50	$4.65 \cdot 10^{-3}$	$4.89 \cdot 10^{-3}$	$5.18 \cdot 10^{-3}$
51- 60	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$
61- 70	$4.84 \cdot 10^{-2}$	$6.21 \cdot 10^{-2}$	$6.40 \cdot 10^{-2}$
71- 80	$6.31 \cdot 10^{-2}$	$9.02 \cdot 10^{-2}$	$1.31 \cdot 10^{-1}$
81- 90	3.58	4.21	6.11
91-100	$3.99 \cdot 10$	$4.20 \cdot 10$	$5.01 \cdot 10$

Tabelle 25

Alter	Reihe 14	Reihe 15	Reihe 16
3- 6	$9.17 \cdot 10^{-11}$	$9.77 \cdot 10^{-12}$	$9.93 \cdot 10^{-7}$
4- 7	$3.97 \cdot 10^{-6}$	$9.94 \cdot 10^{-7}$	$2.72 \cdot 10^{-12}$
5- 8	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-12}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
6- 9	$2.30 \cdot 10^{-13}$	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
7- 10	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
8- 11	$2.30 \cdot 10^{-15}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-14}$
9- 12	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$5.06 \cdot 10^{-14}$
10- 13	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
11- 14	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.30 \cdot 10^{-13}$	$8.82 \cdot 10^{-14}$
12- 15	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$
13- 16	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
14- 17	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
15- 18	$8.98 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
16- 19	0.00	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
17- 20	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
18- 21	$9.96 \cdot 10^{-7}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
19- 22	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$6.65 \cdot 10^{-13}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
20- 23	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$3.89 \cdot 10^{-13}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
21- 24	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
22- 25	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$5.76 \cdot 10^{-14}$	$3.57 \cdot 10^{-14}$
23- 26	$1.44 \cdot 10^{-16}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
24- 27	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$5.76 \cdot 10^{-16}$
25- 28	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
26- 29	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.00	$1.00 \cdot 10^{-6}$
27- 30	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
28- 31	$1.30 \cdot 10^{-15}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
29- 32	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	0.00
30- 33	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-15}$	$5.76 \cdot 10^{-16}$
31- 34	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.30 \cdot 10^{-15}$
32- 35	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
33- 36	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
34- 37	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-13}$
35- 38	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
36- 39	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
37- 40	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$1.44 \cdot 10^{-12}$
38- 41	$1.04 \cdot 10^{-11}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$1.93 \cdot 10^{-12}$
39- 42	$1.50 \cdot 10^{-11}$	$8.95 \cdot 10^{-6}$	$9.93 \cdot 10^{-7}$
40- 43	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$8.97 \cdot 10^{-6}$	$8.06 \cdot 10^{-12}$
41- 44	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
42- 45	$3.28 \cdot 10^{-13}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$8.92 \cdot 10^{-6}$
43- 46	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$
44- 47	$3.95 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-11}$	$3.95 \cdot 10^{-6}$
45- 48	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-11}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
46- 49	$8.83 \cdot 10^{-6}$	$9.75 \cdot 10^{-7}$	$3.92 \cdot 10^{-6}$
47- 50	$1.01 \cdot 10^{-6}$	$5.89 \cdot 10^{-11}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
48- 51	$3.86 \cdot 10^{-6}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$
49- 52	$8.88 \cdot 10^{-6}$	$2.63 \cdot 10^{-10}$	$1.01 \cdot 10^{-6}$
50- 53	$9.50 \cdot 10^{-7}$	$9.35 \cdot 10^{-7}$	$8.64 \cdot 10^{-6}$
51- 54	$9.36 \cdot 10^{-7}$	$5.94 \cdot 10^{-10}$	$1.02 \cdot 10^{-6}$
52- 55	$9.19 \cdot 10^{-7}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$9.04 \cdot 10^{-7}$
53- 56	$3.70 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$3.65 \cdot 10^{-6}$
54- 57	$5.94 \cdot 10^{-5}$	$8.09 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-9}$
55- 58	$3.11 \cdot 10^{-6}$	$7.44 \cdot 10^{-7}$	$3.48 \cdot 10^{-6}$

Neue Glättewerte z

Alter	Reihe 14	Reihe 15	Reihe 16
56– 59	$5.45 \cdot 10^{-7}$	$1.15 \cdot 10^{-6}$	$7.50 \cdot 10^{-7}$
57– 60	$2.44 \cdot 10^{-5}$	$6.89 \cdot 10^{-7}$	$7.00 \cdot 10^{-7}$
58– 61	$8.70 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^{-8}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$
59– 62	$3.84 \cdot 10^{-6}$	$6.04 \cdot 10^{-7}$	$2.78 \cdot 10^{-6}$
60– 63	$6.82 \cdot 10^{-7}$	$5.43 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-6}$
61– 64	$6.36 \cdot 10^{-7}$	$6.21 \cdot 10^{-6}$	$5.63 \cdot 10^{-6}$
62– 65	$3.75 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-5}$	$4.81 \cdot 10^{-6}$
63– 66	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$3.93 \cdot 10^{-6}$
64– 67	$8.40 \cdot 10^{-5}$	$6.75 \cdot 10^{-6}$	$6.55 \cdot 10^{-6}$
65– 68	$5.14 \cdot 10^{-6}$	$2.13 \cdot 10^{-5}$	$4.77 \cdot 10^{-6}$
66– 69	$4.66 \cdot 10^{-7}$	$4.96 \cdot 10^{-7}$	$1.01 \cdot 10^{-6}$
67– 70	$5.35 \cdot 10^{-5}$	$7.58 \cdot 10^{-6}$	$4.27 \cdot 10^{-7}$
68– 71	$2.65 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-9}$	$9.43 \cdot 10^{-7}$
69– 72	$2.64 \cdot 10^{-8}$	$6.97 \cdot 10^{-7}$	$2.21 \cdot 10^{-8}$
70– 73	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-8}$	$8.41 \cdot 10^{-9}$
71– 74	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-7}$	$1.33 \cdot 10^{-7}$
72– 75	$9.89 \cdot 10^{-7}$	$9.93 \cdot 10^{-7}$	$6.09 \cdot 10^{-7}$
73– 76	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$3.58 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
74– 77	$2.98 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$2.07 \cdot 10^{-6}$
75– 78	$2.16 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$2.77 \cdot 10^{-6}$
76– 79	$3.39 \cdot 10^{-5}$	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$
77– 80	$7.20 \cdot 10^{-5}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$5.47 \cdot 10^{-6}$
78– 81	$4.29 \cdot 10^{-5}$	$6.97 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$
79– 82	$7.05 \cdot 10^{-6}$	$1.69 \cdot 10^{-6}$	$5.62 \cdot 10^{-6}$
80– 83	$4.61 \cdot 10^{-6}$	$9.49 \cdot 10^{-8}$	$3.32 \cdot 10^{-6}$
81– 84	$3.79 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$4.40 \cdot 10^{-6}$
82– 85	$1.27 \cdot 10^{-6}$	$7.15 \cdot 10^{-7}$	$4.71 \cdot 10^{-6}$
83– 86	$3.84 \cdot 10^{-6}$	$8.16 \cdot 10^{-8}$	$6.10 \cdot 10^{-6}$
84– 87	$4.25 \cdot 10^{-6}$	$2.33 \cdot 10^{-7}$	$5.87 \cdot 10^{-6}$
85– 88	$2.17 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-6}$	$5.33 \cdot 10^{-6}$
86– 89	$7.39 \cdot 10^{-5}$	$3.59 \cdot 10^{-6}$	$6.55 \cdot 10^{-6}$
87– 90	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$6.00 \cdot 10^{-6}$
88– 91	$6.42 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$7.64 \cdot 10^{-6}$
89– 92	$5.52 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-5}$	$1.12 \cdot 10^{-5}$
90– 93	$8.79 \cdot 10^{-5}$	$3.38 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-5}$
91– 94	$8.84 \cdot 10^{-5}$	$5.49 \cdot 10^{-5}$	$2.12 \cdot 10^{-5}$
92– 95	$2.55 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$
93– 96	$1.14 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-4}$	$5.61 \cdot 10^{-5}$
94– 97	$1.33 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$
95– 98	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$5.89 \cdot 10^{-3}$	$2.04 \cdot 10^{-4}$
96– 99	$9.92 \cdot 10^{-2}$	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$
97–100	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$6.64 \cdot 10^{-4}$
3–100	$1.34 \cdot 10^{-1}$	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$
3– 10	$2.39 \cdot 10^{-5}$	$5.99 \cdot 10^{-6}$	$6.99 \cdot 10^{-6}$
8– 20	$4.89 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
18– 30	$3.10 \cdot 10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-5}$
28– 40	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$3.20 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-5}$
38– 50	$2.67 \cdot 10^{-5}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$2.78 \cdot 10^{-5}$
48– 60	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$	$2.40 \cdot 10^{-5}$
58– 70	$3.16 \cdot 10^{-4}$	$7.50 \cdot 10^{-5}$	$3.54 \cdot 10^{-5}$
68– 80	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$6.66 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$
78– 90	$1.65 \cdot 10^{-4}$	$2.67 \cdot 10^{-5}$	$4.95 \cdot 10^{-5}$
88–100	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$4.95 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 26 *Ausgleichung mit Hilfe*

Alter	Reihe 17 Off. Reihe	Reihe 18 $G = 10$	Reihe 19 $G = 100$	Reihe 20 $G = 1000$
3	.254	.247	.242	.235
4	.207	.205	.207	.202
5	.177	.173	.178	.175
6	.158	.151	.155	.153
7	.142	.137	.137	.136
8	.129	.127	.124	.125
9	.120	.121	.115	.118
10	.115	.117	.112	.116
11	.114	.115	.112	.119
12	.117	.116	.118	.127
13	.124	.122	.128	.138
14	.137	.135	.142	.152
15	.154	.154	.161	.169
16	.177	.178	.183	.188
17	.205	.205	.207	.208
18	.234	.232	.231	.228
19	.262	.259	.254	.247
20	.283	.281	.275	.264
21	.296	.299	.292	.280
22	.305	.310	.305	.292
23	.311	.316	.314	.302
24	.314	.319	.319	.309
25	.315	.320	.320	.313
26	.314	.319	.319	.315
27	.309	.315	.315	.315
28	.303	.309	.311	.314
29	.299	.304	.307	.313
30	.299	.300	.305	.311
31	.301	.300	.304	.311
32	.306	.304	.306	.313
33	.313	.312	.311	.317
34	.322	.322	.318	.322
35	.334	.333	.329	.333
36	.347	.344	.342	.346
37	.362	.359	.360	.362
38	.380	.379	.381	.383
39	.402	.403	.406	.408

des neuen Glättmasses z

Alter	Reihe 17 Off. Reihe	Reihe 18 $G = 10$	Reihe 19 $G = 100$	Reihe 20 $G = 1000$
40	.432	.433	.437	.437
41	.468	.469	.471	.471
42	.510	.511	.511	.508
43	.558	.557	.554	.551
44	.609	.605	.602	.597
45	.663	.655	.653	.649
46	.718	.709	.709	.705
47	.774	.769	.770	.766
48	.835	.834	.836	.834
49	.903	.906	.908	.907
50	.981	.987	.986	.987
51	1.066	1.076	1.072	1.074
52	1.158	1.171	1.166	1.170
53	1.258	1.274	1.269	1.274
54	1.370	1.383	1.381	1.388
55	1.498	1.502	1.506	1.512
56	1.639	1.632	1.643	1.648
57	1.792	1.780	1.795	1.797
58	1.958	1.950	1.962	1.959
59	2.141	2.142	2.145	2.136
60	2.343	2.352	2.344	2.330
61	2.556	2.576	2.559	2.541
62	2.781	2.812	2.790	2.772
63	3.025	3.061	3.040	3.025
64	3.299	3.322	3.312	3.302
65	3.611	3.603	3.609	3.607
66	3.954	3.917	3.939	3.943
67	4.322	4.276	4.305	4.313
68	4.726	4.691	4.714	4.721
69	5.176	5.162	5.168	5.172
70	5.681	5.682	5.669	5.669
71	6.231	6.239	6.217	6.215
72	6.819	6.839	6.816	6.817
73	7.462	7.490	7.471	7.478
74	8.177	8.198	8.187	8.205
75	8.979	8.967	8.973	9.001
76	9.870	9.810	9.839	9.874
77	10.838	10.747	10.796	10.826
78	11.883	11.792	11.848	11.861
79	13.002	12.984	12.992	12.978

Tabelle 26 *Ausgleichung mit Hilfe des neuen Glättmasses z* (Forts.)

Alter	Reihe 17 Off. Reihe	Reihe 18 $G = 10$	Reihe 19 $G = 100$	Reihe 20 $G = 1000$
80	14.194	14.284	14.207	14.172
81	15.451	15.582	15.463	15.436
82	16.767	16.789	16.746	16.761
83	18.141	18.014	18.092	18.146
84	19.573	19.354	19.545	19.589
85	21.072	20.949	21.132	21.088
86	22.652	23.073	22.811	22.641
87	24.317	24.644	24.425	24.250
88	26.071	25.839	25.983	25.944
89	27.919	27.285	27.702	27.806
90	29.866	30.091	29.792	29.941
91	31.918	31.950	32.086	32.392
92	34.080	34.926	34.853	35.102
93	36.357	36.518	37.360	37.603
94	38.757	40.510	40.086	39.654
95	41.286	41.437	41.617	41.216
96	43.950	42.699	42.766	42.436
97	46.757	44.585	43.616	43.394
98	49.715	45.303	44.192	44.143
99	52.831	45.312	44.535	44.724
100	56.115	42.630	44.666	45.162

Tabelle 27

Quadratische Abweichungen von den rohen Daten

Alter	Reihe 17	Reihe 18	Reihe 19	Reihe 20
3-100	$2.95 \cdot 10^2$	$2.92 \cdot 10$	$4.28 \cdot 10$	$4.64 \cdot 10$
3- 10	$6.93 \cdot 10^{-4}$	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$9.03 \cdot 10^{-4}$	$9.55 \cdot 10^{-4}$
11- 20	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$9.14 \cdot 10^{-4}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$
21- 30	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-3}$
31- 40	$2.79 \cdot 10^{-3}$	$2.54 \cdot 10^{-3}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$
41- 50	$4.78 \cdot 10^{-3}$	$4.64 \cdot 10^{-3}$	$4.89 \cdot 10^{-3}$	$5.28 \cdot 10^{-3}$
51- 60	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$1.15 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$
61- 70	$6.37 \cdot 10^{-2}$	$4.51 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-2}$	$6.46 \cdot 10^{-2}$
71- 80	$8.10 \cdot 10^{-2}$	$5.79 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$7.17 \cdot 10^{-2}$
81- 90	3.94	1.48	3.29	3.63
91-100	$2.91 \cdot 10^2$	$2.76 \cdot 10$	$3.94 \cdot 10$	$4.26 \cdot 10$

Tabelle 28 *Neue Glättewerte z*

Alter	Reihe 17	Reihe 18	Reihe 19	Reihe 20
3- 6	$3.57 \cdot 10^{-5}$	$9.17 \cdot 10^{-11}$	$9.77 \cdot 10^{-12}$	$9.93 \cdot 10^{-7}$
4- 7	$6.39 \cdot 10^{-5}$	$3.97 \cdot 10^{-6}$	$9.94 \cdot 10^{-7}$	$2.72 \cdot 10^{-12}$
5- 8	$1.86 \cdot 10^{-13}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-12}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
6- 9	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.30 \cdot 10^{-13}$	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
7- 10	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
8- 11	$5.76 \cdot 10^{-14}$	$2.30 \cdot 10^{-15}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-14}$
9- 12	$2.30 \cdot 10^{-15}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$5.06 \cdot 10^{-14}$
10- 13	$2.07 \cdot 10^{-14}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
11- 14	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.30 \cdot 10^{-13}$	$8.82 \cdot 10^{-14}$
12- 15	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$
13- 16	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
14- 17	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
15- 18	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$8.98 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
16- 19	$3.99 \cdot 10^{-6}$	0.00	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
17- 20	$3.59 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
18- 21	$1.01 \cdot 10^{-6}$	$9.96 \cdot 10^{-7}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$9.99 \cdot 10^{-7}$
19- 22	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$6.65 \cdot 10^{-13}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
20- 23	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$3.89 \cdot 10^{-13}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
21- 24	$2.62 \cdot 10^{-14}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
22- 25	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$5.76 \cdot 10^{-14}$	$3.57 \cdot 10^{-14}$
23- 26	$1.44 \cdot 10^{-16}$	$1.44 \cdot 10^{-16}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
24- 27	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$5.76 \cdot 10^{-16}$
25- 28	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
26- 29	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.00	$1.00 \cdot 10^{-6}$
27- 30	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-16}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
28- 31	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
29- 32	$1.00 \cdot 10^{-6}$	0.00	$4.00 \cdot 10^{-6}$	0.00
30- 33	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$3.69 \cdot 10^{-14}$	$2.92 \cdot 10^{-15}$	$5.76 \cdot 10^{-16}$
31- 34	$7.05 \cdot 10^{-15}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.30 \cdot 10^{-15}$
32- 35	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$
33- 36	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
34- 37	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-13}$
35- 38	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$4.00 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
36- 39	$9.98 \cdot 10^{-7}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
37- 40	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$1.44 \cdot 10^{-12}$
38- 41	$4.01 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-11}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$9.94 \cdot 10^{-7}$
39- 42	$1.50 \cdot 10^{-11}$	$1.50 \cdot 10^{-11}$	$8.95 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$
40- 43	$2.04 \cdot 10^{-11}$	$3.99 \cdot 10^{-6}$	$8.97 \cdot 10^{-6}$	$8.95 \cdot 10^{-6}$
41- 44	$8.96 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-6}$	$8.97 \cdot 10^{-6}$
42- 45	$1.87 \cdot 10^{-12}$	$3.28 \cdot 10^{-13}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$8.92 \cdot 10^{-6}$
43- 46	$3.97 \cdot 10^{-6}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$
44- 47	$2.68 \cdot 10^{-14}$	$3.95 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-11}$	$9.84 \cdot 10^{-7}$
45- 48	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-11}$	$3.93 \cdot 10^{-6}$
46- 49	$3.93 \cdot 10^{-6}$	$3.92 \cdot 10^{-6}$	$9.75 \cdot 10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-6}$
47- 50	$8.79 \cdot 10^{-6}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$	$5.89 \cdot 10^{-11}$	$3.90 \cdot 10^{-6}$
48- 51	$8.94 \cdot 10^{-6}$	$1.02 \cdot 10^{-6}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-10}$
49- 52	$1.51 \cdot 10^{-10}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$2.63 \cdot 10^{-10}$	$3.84 \cdot 10^{-6}$
50- 53	$9.45 \cdot 10^{-7}$	$3.84 \cdot 10^{-6}$	$9.35 \cdot 10^{-7}$	$1.01 \cdot 10^{-6}$
51- 54	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$3.93 \cdot 10^{-6}$	$5.94 \cdot 10^{-10}$	$3.77 \cdot 10^{-6}$
52- 55	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-9}$
53- 56	$9.03 \cdot 10^{-6}$	$8.85 \cdot 10^{-7}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$3.65 \cdot 10^{-6}$
54- 57	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$8.09 \cdot 10^{-6}$	$8.31 \cdot 10^{-7}$
55- 58	$8.06 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$9.39 \cdot 10^{-9}$	$5.11 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 28 Neue Glättewerte z (Fortsetzung)

Alter	Reihe 17	Reihe 18	Reihe 18	Reihe 20
56– 59	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$5.28 \cdot 10^{-8}$	$7.17 \cdot 10^{-7}$	$3.36 \cdot 10^{-6}$
57– 60	$3.02 \cdot 10^{-6}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$3.18 \cdot 10^{-6}$
58– 61	$5.87 \cdot 10^{-5}$	$1.52 \cdot 10^{-5}$	$1.92 \cdot 10^{-8}$	$2.35 \cdot 10^{-8}$
59– 62	$7.39 \cdot 10^{-7}$	$3.84 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-8}$	$6.83 \cdot 10^{-6}$
60– 63	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$6.81 \cdot 10^{-7}$	$6.69 \cdot 10^{-6}$	$2.50 \cdot 10^{-6}$
61– 64	$9.37 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	$6.08 \cdot 10^{-6}$	$2.18 \cdot 10^{-6}$
62– 65	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$4.99 \cdot 10^{-5}$	$5.36 \cdot 10^{-6}$	$9.67 \cdot 10^{-6}$
63– 66	$4.87 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$4.13 \cdot 10^{-5}$	$3.94 \cdot 10^{-6}$
64– 67	$3.24 \cdot 10^{-5}$	$8.57 \cdot 10^{-5}$	$2.74 \cdot 10^{-6}$	$3.02 \cdot 10^{-6}$
65– 68	$6.92 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-5}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$	$5.07 \cdot 10^{-6}$
66– 69	$4.29 \cdot 10^{-5}$	$6.87 \cdot 10^{-6}$	$7.75 \cdot 10^{-10}$	$6.75 \cdot 10^{-6}$
67– 70	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$5.70 \cdot 10^{-5}$	$8.62 \cdot 10^{-8}$	$3.42 \cdot 10^{-7}$
68– 71	$8.61 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$3.59 \cdot 10^{-6}$	$4.71 \cdot 10^{-8}$
69– 72	$3.83 \cdot 10^{-5}$	$6.94 \cdot 10^{-6}$	$4.22 \cdot 10^{-7}$	$5.65 \cdot 10^{-6}$
70– 73	$8.14 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$5.88 \cdot 10^{-7}$	$7.52 \cdot 10^{-7}$
71– 74	$4.63 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	$3.02 \cdot 10^{-8}$	$8.74 \cdot 10^{-7}$
72– 75	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-6}$	$3.42 \cdot 10^{-6}$
73– 76	$1.96 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$7.74 \cdot 10^{-7}$	$1.13 \cdot 10^{-8}$
74– 77	$8.69 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$5.53 \cdot 10^{-9}$	$9.05 \cdot 10^{-6}$
75– 78	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$4.88 \cdot 10^{-6}$
76– 79	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-5}$
77– 80	$7.19 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-4}$	$7.91 \cdot 10^{-5}$	$1.85 \cdot 10^{-5}$
78– 81	$1.61 \cdot 10^{-5}$	$7.27 \cdot 10^{-4}$	$8.09 \cdot 10^{-5}$	$1.59 \cdot 10^{-5}$
79– 82	$7.92 \cdot 10^{-6}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$1.34 \cdot 10^{-5}$
80– 83	$1.74 \cdot 10^{-6}$	$7.14 \cdot 10^{-4}$	$5.76 \cdot 10^{-5}$	$1.89 \cdot 10^{-6}$
81– 84	$9.58 \cdot 10^{-7}$	$4.90 \cdot 10^{-4}$	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$
82– 85	$4.32 \cdot 10^{-7}$	$3.59 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$1.48 \cdot 10^{-6}$
83– 86	$1.20 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$8.39 \cdot 10^{-5}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$
84– 87	$6.65 \cdot 10^{-7}$	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$4.93 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-7}$
85– 88	$6.74 \cdot 10^{-7}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$	$3.56 \cdot 10^{-7}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$
86– 89	$4.96 \cdot 10^{-7}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	$9.79 \cdot 10^{-4}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$
87– 90	$5.19 \cdot 10^{-7}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$
88– 91	$4.04 \cdot 10^{-7}$	$2.96 \cdot 10^{-2}$	$5.24 \cdot 10^{-4}$	$1.83 \cdot 10^{-5}$
89– 92	$5.28 \cdot 10^{-7}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$8.15 \cdot 10^{-5}$	$6.42 \cdot 10^{-5}$
90– 93	$4.90 \cdot 10^{-7}$	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$4.78 \cdot 10^{-4}$
91– 94	$2.45 \cdot 10^{-7}$	$4.11 \cdot 10^{-2}$	$4.66 \cdot 10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-4}$
92– 95	$3.84 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$7.11 \cdot 10^{-4}$
93– 96	$3.48 \cdot 10^{-7}$	$1.07 \cdot 10^{-1}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$
94– 97	$2.30 \cdot 10^{-7}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$	$5.75 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$
95– 98	$2.22 \cdot 10^{-7}$	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
96– 99	$2.34 \cdot 10^{-7}$	$9.61 \cdot 10^{-2}$	$7.09 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$
97–100	$1.41 \cdot 10^{-7}$	$5.97 \cdot 10^{-2}$	$4.11 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$
3–100	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$6.71 \cdot 10^{-1}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$
3– 10	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$2.39 \cdot 10^{-5}$	$5.99 \cdot 10^{-6}$	$6.99 \cdot 10^{-6}$
8– 20	$6.89 \cdot 10^{-5}$	$4.89 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$
18– 30	$4.50 \cdot 10^{-5}$	$3.00 \cdot 10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-5}$
28– 40	$2.99 \cdot 10^{-5}$	$3.70 \cdot 10^{-5}$	$3.20 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-5}$
38– 50	$4.55 \cdot 10^{-5}$	$2.47 \cdot 10^{-5}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$4.86 \cdot 10^{-5}$
48– 60	$6.79 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.98 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$
58– 70	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$8.29 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$
68– 80	$4.02 \cdot 10^{-4}$	$4.63 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$5.73 \cdot 10^{-5}$
78– 90	$3.07 \cdot 10^{-5}$	$3.75 \cdot 10^{-2}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-4}$
88–100	$3.23 \cdot 10^{-6}$	$6.32 \cdot 10^{-1}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$2.14 \cdot 10^{-3}$

13. Zusammenfassung

Abschliessend wollen wir versuchen, die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammenzustellen.

Die Aufgabe, die uns gestellt wurde, bestand aus zwei Teilen. Einmal war ein neues Glättemass zur Beurteilung der Glätte einer Reihe zu definieren, das nicht mehr mit den Mängeln des klassischen Masses behaftet ist. Sodann war eine Methode auszuarbeiten, die es erlaubt, mit Hilfe des Differenzengleichungsverfahrens (DGV) unter Verwendung des neuen Glättemasses rohe Daten auszugleichen.

In der neuen Definition des Glättemasses für Reihen, die wir in dieser Arbeit entwickelt haben, sind die Nachteile des klassischen Masses weitgehend ausgemerzt worden. Soweit wir das nach den durchgeführten Überlegungen und Beispielen beurteilen können, ergibt das neue Mass in seiner allgemeinsten Form vernünftige Glättewerte. Es hat sich gezeigt, dass die Ergebnisse der klassischen und neuen Definition im Versicherungswesen zu einem überwiegenden Teil übereinstimmen. Für die in diesem Gebiet seltenen Fälle, wo diese Gleichheit nicht gilt, erfordert die Berechnung der Glätte mit dem neuen Mass erheblich mehr Aufwand als mit dem klassischen.

Bei der Beurteilung des DGV unter Verwendung des neuen Glättemasses müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Die maximale Änderung der Ordinaten von zwei aufeinanderfolgenden rohen Punkten, $\text{Max}_x(|\Delta \tilde{y}_x|)$, ist klein gegenüber 1:

Die ausgeglichenen Werte ergeben sich auf einfache Art als eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems. Die durchgeführten Berechnungen anhand der Sterbetafel SM 1939/44 haben gezeigt, dass dieses Verfahren im allgemeinen eine gut ausgeglichene Reihe liefert. Die so gefundenen Werte sind im Altersbereich 3 bis 75 der offiziellen Reihe sogar überlegen.

2. $\text{Max}_x(|\Delta \tilde{y}_x|)$ ist nicht klein gegenüber 1:

Die Lösung der Minimalbedingung des DGV ist nur auf numerischem Wege mit Hilfe eines Computers möglich. Obwohl wir

damit vernünftige Ergebnisse erzielt haben, wird das DGV in diesem Falle für die praktische Ausgleichung wohl wenig Bedeutung erlangen, da andere Ausgleichsmethoden, die erheblich weniger Rechenaufwand erfordern, zu gleichwertigen Resultaten führen.

Wohl kann das DGV in seiner allgemeinsten Fassung den verschiedensten Ansprüchen, die man an eine ausgeglichene Reihe stellt, gerecht werden; vielfach wird aber die richtige Wahl der Gewichte grosse Schwierigkeiten bereiten.

Von den beiden dargestellten numerischen Methoden zur Lösung der Minimalbedingung des DGV ist das gesteuerte Linearisierungsverfahren dem gemischten Verfahren überlegen, da es in wenigen Schritten und in verhältnismässig kurzer Zeit zur Lösung führt. Der einzige Nachteil gegenüber dem gemischten Verfahren liegt darin, dass das gefundene Minimum nicht unbedingt im gleichen «Tal» liegen muss wie der Ausgangspunkt.

Literaturverzeichnis

- [1] *M.T.L. Bizley*: «A Measure of Smoothness and some Remarks on a new Principle of Graduation.» J. Inst. Actuaries 84, 1958.
- [2] *R. Henderson*: «Mathematical Theory of Graduation.» New York 1938.
- [3] *E.T. Whittaker* and *G. Robinson*: «The Calculus of Observations.» London and Glasgow 1944.
- [4] *H. Tetley*: «Actuarial Statistics» Volume I («Statistics and Graduation»). Cambridge 1950.
- [5] *H. Ammeter*: «Wahrscheinlichkeitstheoretische Kriterien für die Beurteilung der Güte einer Sterbetafel.» Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. 52, 1952.
- [6] *H.A.R. Barnett*: «Graduation Tests and Experiments.» J. Inst. Actuaries 77, 1951.
- [7] *H. Niedermann*: «Untersuchungen über den Wahrscheinlichkeitscharakter der Sterblichkeit.» Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. 46, 1946.
- [8] *A. Ralston* and *H.S. Wilf*: «Mathematical Methods for Digital Computers.» New York/London 1960.
- [9] *E. Stiefel*: «Einführung in die numerische Mathematik.» Stuttgart 1961.
- [10] *R. Fletcher* and *C.M. Reeves*: «Function Minimization by Conjugate Gradients.» The Computer Journal, Volume 7, 1964.

Résumé

Le «lissage» est un critère important lorsqu'il s'agit de juger la qualité de l'ajustement d'une suite. La méthode habituelle pour déterminer le lissage d'une suite sur la base des différences du troisième ordre – ou d'un ordre plus élevé – ne conduit pas toujours à des résultats acceptables. A l'aide de la nouvelle définition introduite par l'auteur d'une mesure pour le lissage on arrive à éliminer grandement les défauts de la méthode «classique»; les résultats selon cette méthode et la nouvelle coïncident en grande partie. Un ajustement – au moyen d'équations aux différences finies – permet d'essayer pratiquement la nouvelle notion de mesure. Le problème de minimum à plusieurs dimensions, rencontré lors de cet ajustement, est résolu à l'aide de deux calculs numériques exécutés sur un computer du type IBM 1620. Les calculs (table de mortalité SM 1939/44) montrent que la nouvelle mesure pour le lissage donne en général des valeurs acceptables.

Summary

'Smoothness' is an important feature in order to appreciate the graduation of a set. The common method to determine the smoothness of a set and which makes use of the third and higher differences, does not always lead to rational results. In a new definition of the measure of smoothness, most disadvantages of the 'classical' procedure are eliminated, the results obtained through the classical method and the new mostly concur. The new measure of smoothness is tested in practice with the use of a graduation process (difference equation process). The solution of the problem which then appears, a problem of minimum in several dimensions, is found with the use of two numerical calculations performed by a IBM-1620 computer. The calculations (mortality table SM 1939/44) prove that the new measure of smoothness would generally give reasonable figures.

Riassunto

Una caratteristica importante per l'apprezzamento della perequazione in una serie è la «levigatezza». Il metodo usuale per determinare la levigatezza di una serie e che si basa sulle differenze di terzo grado o più, non conduce sempre a dei risultati ragionevoli. In una nuova definizione della misura di levigatezza i vantaggi del procedimento «classico» vengono in gran parte eliminati, i risultati secondo il metodo classico ed il nuovo concorrono in buona parte. La nuova misura di levigatezza viene messa praticamente in prova secondo un processo di perequazione (processo dell'equazione di differenze). La soluzione del problema che interviene, problema sul minimo in più dimensioni, segue con l'aiuto di due calcoli numerici che sono eseguiti da un computer del tipo IBM 1620. I calcoli (tavola di mortalità SM 1939/44) mostrano, che la nuova misura di levigatezza fornisce generalmente dei valori ragionevoli.