**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 66 (1966)

**Artikel:** Le processus de Markov et le problème du renouvellement

**Autor:** Hort, Michel

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-966938

# Le processus de Markov et le problème du renouvellement

*Par Michel Hort, Yverdon*

## Résumé

L'auteur rappelle les notations et les propriétés les plus simples d'un processus régulier de Markov. Il interprète ensuite le problème du renouvellement comme un tel processus. Un exemple numérique illustre l'exposé.

## 1. Le processus de Markov

Considérons un «ensemble» qui peut prendre, de façon aléatoire, $r$ états: $A, B, C, \ldots, R$. A la fin de chaque période – par exemple à la fin de chaque heure – un tirage au sort détermine l'état de l'ensemble pour la période suivante. Les modalités de ces tirages dépendent elles-mêmes de l'état de l'ensemble pendant la période à la fin de laquelle ils ont lieu. Ainsi la probabilité de voir apparaître un état donné $j$ est fonction de l'état $i$ qui le précède. Soit, dans ces conditions, $p_{ij}$ la probabilité que l'état $j$ succède à l'état $i$.

Les *données* sont:

1° les probabilités $a, b, c, \ldots, r$ que l'état initial soit l'état $A, B, C, \ldots, R$.

2° les probabilités de passage $p_{ij}$. Pour tout $i$, nous considérerons que l'on a:

$$p_{iA} + p_{iB} + p_{iC} + \ldots + p_{iR} = 1.$$

Cette relation exprime qu'à l'état $i$ succède nécessairement l'un des $r$ états $A, B, C, \ldots, R$.

Ce qui est *cherché*, c'est la probabilité $P_i^{(k)}$ que le $k^e$ état soit l'état $i$.

Nous notons $p_{ij}^{(k)}$ la probabilité que l'on passe en $k$ périodes de l'état $i$ à l'état $j$.

On voit que l'on a:

$$p_{ij}^{(k+1)} = p_{iA}^{(k)} p_{Aj} + p_{iB}^{(k)} p_{Bj} + \ldots + p_{iR}^{(k)} p_{Rj}.$$

Cette relation suggère que $p_{ij}^{(k+1)}$ peut être mise sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v_k}$ et $\vec{w}$. Les coordonnées de $\vec{v_k}$ sont: $p_{iA}^{(k)}, p_{iB}^{(k)}, \ldots, p_{iR}^{(k)}$ et celles de $\vec{w}$: $p_{Aj}, p_{Bj}, \ldots, p_{Rj}$.

On peut ainsi écrire la relation matricielle suivante:

$$M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{bmatrix} p_{AA}^{(k)} & p_{BA}^{(k)} & \cdots & p_{RA}^{(k)} \\ p_{AB}^{(k)} & p_{BB}^{(k)} & \cdots & p_{RB}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{AR}^{(k)} & p_{BR}^{(k)} & \cdots & p_{RR}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{BA} & \cdots & p_{RA} \\ p_{AB} & p_{BB} & \cdots & p_{RB} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{AR} & p_{BR} & \cdots & p_{RR} \end{bmatrix}$$

Les coordonnées $p_{iA}^{(k)}, p_{iB}^{(k)}, \ldots, p_{iR}^{(k)}$ forment une colonne de la matrice $M^k$ et les coordonnées $p_{Aj}, p_{Bj}, \ldots, p_{Rj}$ une ligne de la matrice $M$. On a donc une multiplication colonne par ligne.

Comme, par définition, $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, on peut obtenir par récurrence la suite des probabilités $p_{ij}^{(2)}, p_{ij}^{(3)}, \ldots$, etc.

Dès lors $P_i^{(k)}$ s'exprime ainsi:

$$P_i^{(k)} = a\, p_{Ai}^{(k)} + b\, p_{Bi}^{(k)} + \ldots + r\, p_{Ri}^{(k)}.$$

*Passage à la limite*

Il est intéressant de considérer le comportement de $P_i^{(k)}$ quand $k$ tend vers l'infini.

Si, pour $k$ suffisamment grand, aucune des probabilités $p_{ij}^{(k)}$ n'est nulle, on peut démontrer que:

1°
$$\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} p_{AA}^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} p_{BA}^{(k)} = \ldots = \lim\limits_{k\to\infty} p_{RA}^{(k)} = \alpha \\ \lim\limits_{k\to\infty} p_{AB}^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} p_{BB}^{(k)} = \ldots = \lim\limits_{k\to\infty} p_{RB}^{(k)} = \beta \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \lim\limits_{k\to\infty} p_{AR}^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} p_{BR}^{(k)} = \ldots = \lim\limits_{k\to\infty} p_{RR}^{(k)} = \varrho \end{array}$$

2° $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varrho$ sont solutions du système d'équations linéaires:

$$\begin{array}{l}
\alpha p_{AA} + \beta p_{BA} + \ldots + \varrho p_{RA} = \alpha \\
\alpha p_{AB} + \beta p_{BB} + \ldots + \varrho p_{RB} = \beta \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\alpha p_{AR} + \beta p_{BR} + \ldots + \varrho p_{RR} = \varrho
\end{array}$$

En outre, on a naturellement:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varrho = 1.$$

Le cas cité ci-dessus est le cas *positivement régulier;* c'est le plus simple. Les cas singuliers se produisent en fonction de l'existence *et de la place* de zéros dans la matrice des probabilités de passage:

$$M = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{BA} & \cdots & p_{RA} \\ p_{AB} & p_{BB} & \cdots & p_{RB} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{AR} & p_{BR} & \cdots & p_{RR} \end{bmatrix}$$

*Exemple numérique*

On suppose trois états $A$, $B$ et $C$.

Les probabilités de l'état initial sont:

$$a = 0.2 \qquad b = 0.6 \qquad c = 0.2$$

Les probabilités de passage sont:

| | $k = 1$ (données) | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $\ldots$ | $k = \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{AA}^{(k)}$ | 0.2 | 0.44 | 0.568 | 0.3696 | ... | 0.4546 |
| $p_{AB}^{(k)}$ | 0.8 | 0.16 | 0.352 | 0.4544 | ... | 0.3636 |
| $p_{AC}^{(k)}$ | 0.0 | 0.40 | 0.080 | 0.1760 | ... | 0.1818 |
| $p_{BA}^{(k)}$ | 0.5 | 0.60 | 0.320 | 0.5040 | ... | 0.4546 |
| $p_{BB}^{(k)}$ | 0.0 | 0.40 | 0.480 | 0.2560 | ... | 0.3636 |
| $p_{BC}^{(k)}$ | 0.5 | 0.00 | 0.200 | 0.2400 | ... | 0.1818 |
| $p_{CA}^{(k)}$ | 1.0 | 0.20 | 0.440 | 0.5680 | ... | 0.4546 |
| $p_{CB}^{(k)}$ | 0.0 | 0.80 | 0.160 | 0.3520 | ... | 0.3636 |
| $p_{CC}^{(k)}$ | 0.0 | 0.00 | 0.400 | 0.0800 | ... | 0.1818 |

Pour $k = 3$, il n'y a plus de probabilités de passage nulles. On est dans le cas positivement régulier.

Calculons maintenant les probabilités $P_i^{(k)}$:

| | Etat initial (données) | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | ... | $k=\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_A^{(k)}$ | 0.2 | 0.54 | 0.488 | 0.3936 | 0.48992 | ... | 0.4546 |
| $P_B^{(k)}$ | 0.6 | 0.16 | 0.432 | 0.3904 | 0.31488 | ... | 0.3636 |
| $P_C^{(k)}$ | 0.2 | 0.30 | 0.080 | 0.2160 | 0.19520 | ... | 0.1818 |

## II. Le problème du renouvellement

Considérons un groupe de $N$ personnes. A l'instant initial, dans ce groupe:

$n(0;x)$ personnes ont l'âge $x$

$n(0;x+1)$ personnes ont l'âge $x+1$

$n(0;x+2)$ personnes ont l'âge $x+2$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$n(0;x+m)$ personnes ont l'âge $x+m$

Les personnes du groupe sont soumises à une loi de sortie. Pour fixer les idées, disons à une loi de mortalité. Les personnes décédées sont remplacées par des nouveaux venus, tous d'âge $x$, de manière que l'effectif total reste constamment égal à $N$. Nous supposons que tous les décès ont lieu à la fin de chaque unité de temps.

Les *données du problème* sont:

1° La répartition par âges des personnes du groupe à l'instant initial, soit: $n(0;x)$, $n(0;x+1)$, ..., $n(0;x+m)$.

2° Les probabilités de décès à chaque âge: $q_x, q_{x+1}, \ldots, q_{x+m}$. (Pour simplifier, nous considérons $m$ fini, avec $q_{x+m}=1$.)

Ce qui est *cherché*, c'est la répartition par âge après $k$ unités de temps: $n(k;x)$, $n(k;x+1)$, ..., $n(k;x+m)$ et, en particulier, la limite de cette répartition lorsque $k$ tend vers l'infini.

*Solution*

On sait que, si aucune des probabilités $q_{x+i}$ n'est nulle[1]), on a pour tout $i$:

$$\lim_{k\to\infty} n(k; x+i) = \frac{N}{\sum_i l_{x+i}} l_{x+i}.$$

Les nombres $l_{x+i}$ apparaissant dans cette relation sont ceux qui forment l'ordre de survie déduit des probabilités $q_{x+i}$ de décès.

*Résolution à l'aide du processus de Markov*

Prenons une des personnes du groupe; on peut identifier:

l'âge $x$ avec l'état $A$,
l'âge $x+1$ avec l'état $B$,
.......................
l'âge $x+m$ avec l'état $R$.

Dans ces conditions on a:

1° la probabilité $a = \frac{n(0;x)}{N}$

la probabilité $b = \frac{n(0;x+1)}{N}$

.......................

la probabilité $r = \frac{n(0;x+m)}{N}$

2° les probabilités de passage sont:

$$p_{AA} = q_x \qquad p_{AB} = 1 - q_x = p_x$$
$$p_{BA} = q_{x+1} \qquad p_{BC} = 1 - q_{x+1} = p_{x+1}$$
..................................
$$p_{RA} = q_{x+m} = 1$$

[1]) Cette condition suffisante n'est cependant pas nécessaire (voir paragraphe III).

Les autres probabilités de passage sont nulles. Malgré la présence de probabilités de passage nulles, nous nous trouvons dans le cas positivement régulier, comme on le verra par l'exemple numérique ci-dessous.

Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} n(k;x) &= N P_A^{(k)} \\ n(k;x+1) &= N P_B^{(k)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n(k;x+m) &= N P_R^{(k)} \end{aligned}$$

Ces relations sont valables pour toute valeur de $k$ et le restent lorsque $k$ tend vers l'infini.

*Exemple numérique*

Reprenons l'exemple numérique déjà considéré. On a:

$$\begin{aligned} p_{AA} &= q_x = 0.2 & p_{AB} &= 1-q_x = 0.8 \\ p_{BA} &= q_{x+1} = 0.5 & p_{BC} &= 1-q_{x+1} = 0.5 \\ p_{CA} &= q_{x+2} = 1.0 \end{aligned}$$

Groupons les résultats obtenus dans le tableau suivant:

| | $k=0$ (données) | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | ... | $k=\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n(k;x)$ | 200 | 540 | 488 | 394 | 490 | ... | 455 |
| $n(k;x+1)$ | 600 | 160 | 432 | 390 | 315 | ... | 364 |
| $n(k;x+2)$ | 200 | 300 | 80 | 216 | 195 | ... | 181 |
| $N$ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |

On constate que l'on a bien:

$$\begin{aligned} n(k;x) &= N P_A^{(k)} \\ n(k;x+1) &= N P_B^{(k)} \\ n(k;x+2) &= N P_C^{(k)} \end{aligned}$$

D'autre part, on peut vérifier les résultats par récurrence à l'aide de la formule:

$$n(k+1;x+i+1) = (1-q_{x+i})\, n(k;x+i).$$

## III. Cas singulier, méthode générale de M. Ed. Francks

Au paragraphe II, nous avons admis que tous les $q_{x+t}$ étaient non nuls. S'il existe des $q_{x+t}$ nuls, des singularités peuvent se produire.

Posons $q_{x+t} = q_{(x-1)+u}$. Si toutes les variables $u$ se rapportant aux $q_{(x-1)+u}$ non nuls admettent un plus grand commun diviseur $d \neq 1$, on a, à la limite, $d$ répartitions par âge, qui se succèdent périodiquement comme il suit:

$$R_1 \, R_2 \, \ldots \, R_{d-1} \, R_d \, R_1 \, R_2 \, \ldots$$

Nous ne traiterons pas en détail ce cas singulier. Dans une note adressée à l'Académie des Sciences de Paris, M. Ed. Francks a montré que le problème du renouvellement pouvait être ramené au processus de Markov de manière tout à fait générale. Sa démonstration repose sur les propriétés des matrices dites élémentaires et sur le fait que les renouvellements successifs peuvent être mis sous la forme du produit scalaire d'un «vecteur initial» $\vec{I}$ et d'un «vecteur adjoint» $\vec{V_k}$, de sorte que

$$n(k;x) = \vec{I} \cdot \vec{V_k}.$$

## Bibliographie

*H. Ammeter:* Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1955. (Cet article contient une bibliographie de 65 titres.)

*E. Francks:* Relation entre les ensembles renouvelés et les probabilités en chaîne. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1950. (Cette communication a été présentée par M. Emile Borel.)

– La génération d'une chaîne de Markov. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1953.

*M. Girault:* Première initiation aux processus de Markov. Revue de statistique appliquée, Paris 1964, vol. XII, N° 3.

## Zusammenfassung

Es werden die Bezeichnungen und einfachsten Eigenschaften eines regulären Markoffschen Prozesses wiedergegeben, dann das Erneuerungsproblem als solcher Prozess interpretiert. Ein numerisches Beispiel dient der Veranschaulichung.

## Summary

The notations and simplest characteristics of a regular Markov process have been reproduced and then the problem of renewal has been interpreted in terms of such a process. A numerical example serves to clarify the matter.

## Riassunto

Sono riprodotte le caratteristiche e le più semplici proprietà di un processo regolare di Markov, poi il problema del rinnovamento viene interpretato come tale. Un esempio numerico serve di illustrazione.