

Le processus de Markov et le problème du renouvellement

Autor(en): **Hort, Michel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **66 (1966)**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966938>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le processus de Markov et le problème du renouvellement

Par Michel Hort, Yverdon

Résumé

L'auteur rappelle les notations et les propriétés les plus simples d'un processus régulier de Markov. Il interprète ensuite le problème du renouvellement comme un tel processus. Un exemple numérique illustre l'exposé.

1. Le processus de Markov

Considérons un «ensemble» qui peut prendre, de façon aléatoire, r états: A, B, C, \dots, R . A la fin de chaque période – par exemple à la fin de chaque heure – un tirage au sort détermine l'état de l'ensemble pour la période suivante. Les modalités de ces tirages dépendent elles-mêmes de l'état de l'ensemble pendant la période à la fin de laquelle ils ont lieu. Ainsi la probabilité de voir apparaître un état donné j est fonction de l'état i qui le précède. Soit, dans ces conditions, p_{ij} la probabilité que l'état j succède à l'état i .

Les *données* sont :

- 1^o les probabilités a, b, c, \dots, r que l'état initial soit l'état A, B, C, \dots, R .
- 2^o les probabilités de passage p_{ij} . Pour tout i , nous considérerons que l'on a :

$$p_{iA} + p_{iB} + p_{iC} + \dots + p_{iR} = 1.$$

Cette relation exprime qu'à l'état i succède nécessairement l'un des r états A, B, C, \dots, R .

Ce qui est *cherché*, c'est la probabilité $P_i^{(k)}$ que le k^{e} état soit l'état i .

Nous notons $p_{ij}^{(k)}$ la probabilité que l'on passe en k périodes de l'état i à l'état j .

Calculons maintenant les probabilités $P_i^{(k)}$:

Etat initial (données)	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$...	$k = \infty$
$P_A^{(k)}$	0.2	0.54	0.488	0.3936	0.48992	... 0.4546
$P_B^{(k)}$	0.6	0.16	0.432	0.3904	0.31488	... 0.3636
$P_C^{(k)}$	0.2	0.30	0.080	0.2160	0.19520	... 0.1818

II. Le problème du renouvellement

Considérons un groupe de N personnes. A l'instant initial, dans ce groupe:

- $n(0; x)$ personnes ont l'âge x
- $n(0; x + 1)$ personnes ont l'âge $x + 1$
- $n(0; x + 2)$ personnes ont l'âge $x + 2$
-
- $n(0; x + m)$ personnes ont l'âge $x + m$

Les personnes du groupe sont soumises à une loi de sortie. Pour fixer les idées, disons à une loi de mortalité. Les personnes décédées sont remplacées par des nouveaux venus, tous d'âge x , de manière que l'effectif total reste constamment égal à N . Nous supposons que tous les décès ont lieu à la fin de chaque unité de temps.

Les données du problème sont:

- 1° La répartition par âges des personnes du groupe à l'instant initial, soit: $n(0; x)$, $n(0; x + 1)$, ..., $n(0; x + m)$.
- 2° Les probabilités de décès à chaque âge: $q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+m}$. (Pour simplifier, nous considérons m fini, avec $q_{x+m} = 1$.)

Ce qui est *cherché*, c'est la répartition par âge après k unités de temps: $n(k; x)$, $n(k; x + 1)$, ..., $n(k; x + m)$ et, en particulier, la limite de cette répartition lorsque k tend vers l'infini.

Solution

On sait que, si aucune des probabilités q_{x+i} n'est nulle¹⁾, on a pour tout i :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n(k; x+i) = \frac{N}{\sum_i l_{x+i}} l_{x+i}.$$

Les nombres l_{x+i} apparaissant dans cette relation sont ceux qui forment l'ordre de survie déduit des probabilités q_{x+i} de décès.

Résolution à l'aide du processus de Markov

Prenons une des personnes du groupe; on peut identifier:

- l'âge x avec l'état A ,
- l'âge $x+1$ avec l'état B ,
-
- l'âge $x+m$ avec l'état R .

Dans ces conditions on a:

- 1° la probabilité $a = \frac{n(0; x)}{N}$
- la probabilité $b = \frac{n(0; x+1)}{N}$
-
- la probabilité $r = \frac{n(0; x+m)}{N}$

2° les probabilités de passage sont:

$$\begin{aligned} p_{AA} &= q_x & p_{AB} &= 1 - q_x = p_x \\ p_{BA} &= q_{x+1} & p_{BC} &= 1 - q_{x+1} = p_{x+1} \\ &..... & & \\ p_{RA} &= q_{x+m} = 1 \end{aligned}$$

¹⁾ Cette condition suffisante n'est cependant pas nécessaire (voir paragraphe III).

Les autres probabilités de passage sont nulles. Malgré la présence de probabilités de passage nulles, nous nous trouvons dans le cas positivement régulier, comme on le verra par l'exemple numérique ci-dessous.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} n(k; x) &= NP_A^{(k)} \\ n(k; x+1) &= NP_B^{(k)} \\ \dots\dots\dots \\ n(k; x+m) &= NP_R^{(k)} \end{aligned}$$

Ces relations sont valables pour toute valeur de k et le restent lorsque k tend vers l'infini.

Exemple numérique

Reprenons l'exemple numérique déjà considéré. On a :

$$\begin{aligned} p_{AA} = q_x &= 0.2 & p_{AB} = 1 - q_x &= 0.8 \\ p_{BA} = q_{x+1} &= 0.5 & p_{BC} = 1 - q_{x+1} &= 0.5 \\ p_{CA} = q_{x+2} &= 1.0 \end{aligned}$$

Groupons les résultats obtenus dans le tableau suivant :

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$...	$k = \infty$
	(données)						
$n(k; x)$	200	540	488	394	490	...	455
$n(k; x+1)$	600	160	432	390	315	...	364
$n(k; x+2)$	200	300	80	216	195	...	181
N	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>

On constate que l'on a bien :

$$\begin{aligned} n(k; x) &= NP_A^{(k)} \\ n(k; x+1) &= NP_B^{(k)} \\ n(k; x+2) &= NP_C^{(k)} \end{aligned}$$

D'autre part, on peut vérifier les résultats par récurrence à l'aide de la formule :

$$n(k+1; x+i+1) = (1 - q_{x+i}) n(k; x+i).$$

III. Cas singulier, méthode générale de M. Ed. Francks

Au paragraphe II, nous avons admis que tous les q_{x+t} étaient non nuls. S'il existe des q_{x+t} nuls, des singularités peuvent se produire.

Posons $q_{x+t} = q_{(x-1)+u}$. Si toutes les variables u se rapportant aux $q_{(x-1)+u}$ non nuls admettent un plus grand commun diviseur $d \neq 1$, on a, à la limite, d répartitions par âge, qui se succèdent périodiquement comme il suit :

$$R_1 R_2 \dots R_{d-1} R_d R_1 R_2 \dots$$

Nous ne traiterons pas en détail ce cas singulier. Dans une note adressée à l'Académie des Sciences de Paris, M. Ed. Francks a montré que le problème du renouvellement pouvait être ramené au processus de Markov de manière tout à fait générale. Sa démonstration repose sur les propriétés des matrices dites élémentaires et sur le fait que les renouvellements successifs peuvent être mis sous la forme du produit scalaire d'un « vecteur initial » \vec{I} et d'un « vecteur adjoint » \vec{V}_k , de sorte que

$$n(k; x) = \vec{I} \cdot \vec{V}_k.$$

Bibliographie

- H. Ammeter*: Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1955. (Cet article contient une bibliographie de 65 titres.)
- E. Francks*: Relation entre les ensembles renouvelés et les probabilités en chaîne. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1950. (Cette communication a été présentée par M. Emile Borel.)
- La génération d'une chaîne de Markov. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1953.
- M. Girault*: Première initiation aux processus de Markov. Revue de statistique appliquée, Paris 1964, vol. XII, N° 3.

Zusammenfassung

Es werden die Bezeichnungen und einfachsten Eigenschaften eines regulären Markoffschen Prozesses wiedergegeben, dann das Erneuerungsproblem als solcher Prozess interpretiert. Ein numerisches Beispiel dient der Veranschaulichung.

Summary

The notations and simplest characteristics of a regular Markov process have been reproduced and then the problem of renewal has been interpreted in terms of such a process. A numerical example serves to clarify the matter.

Riassunto

Sono riprodotte le caratteristiche e le più semplici proprietà di un processo regolare di Markov, poi il problema del rinnovamento viene interpretato come tale. Un esempio numerico serve di illustrazione.