

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 66 (1966)

Artikel: Libre passage : le problème des sorties anticipées

Autor: Féraud, Lucien

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966937>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Libre passage : le problème des sorties anticipées

Par Lucien Féraud, Genève

Résumé

L'auteur considère tout d'abord les réserves mathématiques rétrospective et prospective calculées dans le cas du financement à prime moyenne. Selon que l'assuré est entré à la caisse avant ou après l'âge ξ (âge auquel la prime moyenne est égale à la prime individuelle), le paiement, en cas de sortie, de l'une ou de l'autre des réserves peut entraîner pour lui un gain immérité ou, au contraire, une perte injustifiée. On recherchera donc une solution de compromis qui soit techniquement défendable et qui tienne compte, du mieux qu'il est possible, tant des intérêts des assurés sortants que de ceux de la caisse. L'indemnité de départ doit être positive et si possible se situer entre les deux réserves indiquées. L'auteur examine diverses possibilités dont deux – ainsi qu'il apparaît sur les graphiques – satisfont aux conditions requises.

La précédente livraison de ce Bulletin débute par un rapport du président du groupe de travail « Assurance du personnel », M. le Dr G. A. Lehmann, sur l'activité de ce groupe. Ce rapport est suivi d'un texte établi par M. le Dr M. Haldy, après discussion avec d'éminents collègues, qui expose le problème étudié jusqu'ici par le groupe : le libre passage dans le domaine de la prévoyance en faveur du personnel. On trouve également, dans la partie B du même volume, de remarquables études sur le même problème signées par MM. M. Frischknecht, prof. H. Jecklin, Dr W. Schuler.

1. Le problème dit du libre passage fait naturellement partie des préoccupations des actuaires mais, pour ma part, j'avais eu à m'en occuper de plus près au sein de la commission d'experts constituée à Genève en 1957 et dont les travaux sont consignés dans un rapport du 11 janvier 1961¹⁾. J'avais remarqué dès lors qu'au point de vue tech-

¹⁾ Rapport sur le libre passage entre les caisses de prévoyance pour le personnel et sur la création d'une institution cantonale de prévoyance. N° 1725-A, Genève. Service des publications officielles 1961.

nique il ne s'agissait pas d'un problème posé par le *passage* d'une institution à une autre. Il me paraissait et il me paraît toujours que la seconde institution, celle dans laquelle l'assuré va éventuellement entrer n'a pas à intervenir dans le problème tel qu'il se pose sur le plan technique. D'abord il peut se faire que l'assuré qui quitte une institution de prévoyance n'entre pas dans une autre institution (par exemple une jeune fille se marie et cesse d'occuper un emploi). Et même, en admettant que dans la majorité des cas la sortie d'une institution sera suivie à bref délai de l'entrée dans une autre et en se contentant de considérer le cas général, comment la deuxième institution pourrait-elle avoir une influence sur la liquidation des droits de l'assuré sortant de la première? Ces droits seront-ils d'autant plus élevés que la deuxième institution sera plus riche? S'il en était ainsi, l'admission dans la deuxième caisse serait plus facile, mais on avantagerait indûment ceux qui ont la chance d'entrer dans une institution de niveau plus élevé. Un processus ne peut être équitable que s'il ne tient pas compte de la situation de la deuxième institution ni même du fait que l'assuré sortant entre ou n'entre pas dans une nouvelle institution. C'est pourquoi sans plus parler de « passage », je vais dans ce qui suit envisager en lui-même le problème des « sorties anticipées ».

2. Pour une institution de prévoyance couvrant un ou plusieurs risques à long terme (retraite, invalidité, survivants) alimentée par des cotisations à un taux moyen γ on peut considérer :

1^o une différence actuarielle prospective que nous noterons

$$w_{x_e+m}^p = \text{eng}_{x_e+m}(x_e + m, \omega) - \gamma \text{esp}_{x_e+m}(x_e + m, x_a; 1)$$

pour représenter la différence des valeurs actuelles des engagements (eng) et des espérances (esp) de l'assureur sur la tête d'un assuré entré à l'âge x_e et survivant à $x_e + m$.

Par exemple, pour une caisse qui n'assurera que des retraites à l'âge x_a :

$$w_{x_e+m}^p = \mathcal{P}(x_e) \ddot{a}_{x_a} \cdot {}_{x_a-x_e-m}E_{x_e+m} - \gamma \ddot{a}_{x_e+m : \overline{x_a-x_e-m}|}$$

$\mathcal{P}(x_e)$ étant le montant de la retraite.

2^o une différence actuarielle rétrospective que nous noterons

$$w_{x_e+m}^r = \gamma \text{esp}_{x_e+m}(x_e, x_e + m; 1) - \text{eng}_{x_e+m}(x_e, x_e + m).$$

Par exemple, pour une caisse qui n'assureraient que des retraites à l'âge x_a :

$$w_{x_e+m}^r = \gamma \frac{1}{{}_mE_{x_e}} \ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}.$$

On suppose que le taux moyen γ a été calculé sans tenir compte des sorties anticipées, c'est-à-dire dans l'hypothèse que les assurés ne sortiront du groupe que par décès ou par invalidité.

On peut démontrer ou vérifier à l'aide d'une table usuelle¹⁾

- i) que $w_{x_e}^p$ est négative lorsque l'âge d'entrée est inférieur à un certain âge ξ et positive ensuite, et en outre que $w_{x_e+m}^p$ croît avec m ;
- ii) que $w_{x_e}^r = 0$ pour tout x_e , que $w_{x_e+m}^r$ croît avec m et par suite est toujours positive;
- iii) que, pour tout m , $w_{x_e+m}^p$ est inférieure, égale ou supérieure à $w_{x_e+m}^r$ selon que x_e est inférieur, égal ou supérieur à ξ .

3. De ces résultats simples, il s'ensuit immédiatement:

- 1° que pour un assuré entré avant l'âge ξ la sortie de la caisse entraîne une augmentation de la différence actuarielle prospective, si elle se produit tant que $w_{x_e+m}^p < 0$ et une diminution si elle se produit après, alors que $w_{x_e+m}^p > 0$;
- 2° que pour un assuré entré à l'âge ξ ou après cet âge, la sortie entraîne toujours une diminution de la différence actuarielle prospective (car $w_{x_e+m}^p > 0$).

A l'heure actuelle, la sortie d'un assuré ne peut être conçue sans l'octroi d'une certaine somme. La détermination du montant de cette somme est précisément l'objet du problème technique que posent les sorties anticipées. Ainsi que nous l'avons rappelé ces sorties n'ont pas été prises en compte dans le calcul de γ . Le problème peut donc être ainsi formulé: déterminer une règle pour le calcul des indemnités de sortie qui ne perturbe pas l'équilibre actuariel de la caisse, supposé établi par le choix du taux moyen γ . On voit immédiatement que l'équi-

¹⁾ La question a été traitée pour une caisse qui n'assureraient que des retraites dans un travail précédent: Valeurs actuelles dans les Caisses de retraites. Revue internationale d'actuariat et de statistique de la Sécurité sociale, N° 10, 1966.

libre actuariel de la caisse sera maintenu, si au départ d'un assuré on lui octroie la différence actuarielle prospective calculée pour son cas à condition toutefois que celle-ci soit positive.

Deux difficultés sont à résoudre.

La première se présente pour un assuré entré à un âge $x_e < \xi$ qui quitte la caisse tandis que sa différence actuarielle prospective est encore négative. Même si cet assuré ne reçoit rien, la différence actuarielle prospective de la caisse est augmentée et cette augmentation n'est pas couverte. Or l'assuré qui sort de la caisse réclamera qu'on lui verse la différence actuarielle rétrospective $w_{x_e+m}^r$ qui est positive, mais ceci contribuerait encore à rompre l'équilibre actuariel de la caisse car à l'augmentation de la différence actuarielle prospective viendrait s'ajouter la diminution des fonds accumulés.

La deuxième difficulté se présente lorsqu'un assuré entré après l'âge ξ sans versement d'une finance d'entrée ou ayant versé une finance d'entrée incomplète sort de la caisse : il bénéficie d'un avantage difficile à justifier s'il reçoit lors de son départ la différence actuarielle prospective $w_{x_e+m}^p$. Toutefois, s'il appartient à la génération initiale, on peut admettre que la dispense d'une finance d'entrée compense l'impossibilité où il était de s'affilier à une caisse.

En termes simples, on peut dire qu'en valeurs actuelles tout se passe comme si :

- 1° l'assuré qui est entré avant l'âge ξ avait apporté à la caisse un capital $|w_{x_e}^p|$; au moment où il quitte la caisse, si on lui octroie seulement $w_{x_e+m}^p$ lorsqu'elle est positive et rien lorsque $w_{x_e+m}^p$ est négative, il a fait don à la caisse de $|w_{x_e}^p|$; si au contraire, on lui donne $w_{x_e+m}^r$ il récupère la totalité du don qu'il avait fait.
- 2° l'assuré qui est entré après l'âge ξ , qui a versé une finance d'entrée égale à $w_{x_e}^p$ et qui reçoit à son départ $w_{x_e+m}^p$ est traité équitablement.
- 3° l'assuré qui est entré après l'âge ξ , sans verser une finance d'entrée a reçu un don de $w_{x_e}^p$ et, à sa sortie, si on lui verse $w_{x_e+m}^p$ il emporte ce don avec lui, si on lui verse seulement $w_{x_e+m}^r$ il restitue ce don.

Ces considérations suffisent à montrer qu'il y a opposition entre les intérêts des assurés qui quittent la caisse et les intérêts des assurés qui restent dans la caisse.

Aucune argumentation technique ne départagera jamais les prétentions des uns et des autres (qui sont toutes susceptibles d'une justification raisonnable).

La solution qui sera adoptée ne dépendra en fait que de considérations économiques ou sociales; il y aura intérêt à ce que celles-ci soient explicitement formulées et non pas cachées sous de pseudo arguments techniques.

4. Après avoir mis en lumière ce qui précède, l'actuaire pourra, sans sortir de son domaine, envisager ou même proposer un compromis qui consisterait à verser, au départ d'un assuré, un montant intermédiaire entre les deux différences actuarielles. On pourra, par exemple, envisager de calculer le capital versé au départ à l'aide de l'une des formules suivantes:

$$w_{x_e+m} = c(x_e) \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{mE_{x_e}},$$

$$C_1(m) = w_{x_a}^p \frac{m}{x_a - x_e},$$

$$C_2(m) = w_{x_e+m}^r + \frac{w_{x_e}^p}{x_a - x_e} \frac{m}{E_{x_e} (x_a - x_e)},$$

$$C_3(m) = w_{x_e+m}^r + \frac{w_{x_e}^p}{mE_{x_e}} \frac{m}{(x_a - x_e)},$$

dont la signification apparaît aisément:

w_{x_e+m} est la différence actuarielle calculée en prenant $\gamma = c(x_e)$ pour taux de cotisation: il y a alors équivalence individuelle et les différences actuarielles prospective et rétrospective coïncident.

Pour $C_1(m)$: $w_{x_a}^p$ s'acquiert linéairement.

Pour $C_2(m)$ — Si $w_{x_e}^p < 0$: à son entrée à $x_e < \xi$ l'assuré fait don à la caisse de $|w_{x_e}^p|$ que l'on rapporte à x_a , soit $\frac{w_{x_e}^p}{x_a - x_e} \frac{1}{E_{x_e}}$; on suppose que ce don est retenu par la caisse proportionnellement au nombre d'années d'affiliation: en multipliant par $\frac{m}{x_a - x_e}$.

— Si $w_{x_e}^p > 0$: l'assuré a reçu un don à son entrée mais il ne le retient, en cas de départ, que proportionnellement au nombre d'années d'affiliation.

Pour $C_3(m)$: $\frac{w_{x_e}^p}{m E_{x_e}}$. De même que pour $C_2(m)$ il s'agit d'un don de (ou à) l'assuré mais on le rapporte au moment du départ, c'est-à-dire à $x_e + m$; on en prend encore une partie proportionnelle $\frac{m}{x_a - x_e}$.

Autres expressions de w_{x_e+m} , $C_1(m)$, $C_2(m)$, $C_3(m)$

Pour un salaire que nous supposons constamment égal à l'unité il pourra être utile de se servir des formules suivantes (parmi d'autres):

$$w_{x_e+m} = w_{x_e+m}^r + \frac{w_{x_e}^p}{m E_{x_e}} \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}} = c(x_e) \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{m E_{x_e}}, \quad 1)$$

$$C_1(m) = c(x_e) \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{x_a - x_e} \frac{m}{E_{x_e}},$$

$$\begin{aligned} C_2(m) &= w_{x_e+m}^p + w_{x_e}^p \left[\frac{1}{x_a - x_e} \frac{m}{E_{x_e}} - \frac{1}{m E_{x_e}} \right] \\ &= \frac{(c(x_e) - \gamma)}{x_a - x_e} \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{E_{x_e}} \frac{m}{(x_a - x_e)} + \gamma \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{m E_{x_e}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3(m) &= w_{x_e+m}^p + \frac{w_{x_e}^p}{m E_{x_e}} \left(\frac{m}{x_a - x_e} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{m E_{x_e}} \left\{ (c(x_e) - \gamma) \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{E_{x_e}} \frac{m}{(x_a - x_e)} + \gamma \ddot{a}_{x_e:\overline{m}|} \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Cette formule permettrait de donner de w_{x_e+m} une interprétation analogue à celles qui précèdent: on ne retient du don de (ou à) l'assuré que la proportion:

$$\frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}.$$

Etude des 4 fonctions w_{x_e+m} , $C_1(m)$, $C_2(m)$, $C_3(m)$

Nous commençons par considérer w_{x_e+m} .

De son expression prospective et de son expression rétrospective, il suit que si l'on modifie les espérances en substituant γ à $c(x_e)$ on montre, quelles que soient les valeurs relatives de γ et de $c(x_e)$, que w_{x_e+m} est comprise entre $w_{x_e+m}^p$ et $w_{x_e+m}^r$. On peut encore montrer que w_{x_e+m} est toujours comprise entre $C_2(m)$ et $C_3(m)$:

$$w_{x_e+m} - C_3(m) = \frac{w_{x_e}^p}{{}_mE_{x_e}} \left[\frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x_e:x_a-x_e}} - \frac{m}{x_a - x_e} \right],$$

le crochet étant positif

$$w_{x_e+m} \leq C_3(m) \text{ selon que } w_{x_e}^p \leq 0;$$

d'autre part

$$w_{x_e+m} - C_2(m) = \frac{w_{x_e}^p}{{}_mE_{x_e}} \left[\frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x_e:x_a-x_e}} - \frac{m}{(x_a - x_e)} \frac{{}_mE_{x_e}}{x_a - x_e} \right]$$

si le crochet est négatif

$$w_{x_e+m} \geq C_2(m) \text{ selon que } w_{x_e}^p \geq 0,$$

d'où, avec ce qui précède, w_{x_e+m} est comprise entre $C_2(m)$ et $C_3(m)$. Pour démontrer que le crochet est négatif, il suffit de démontrer que

$\frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{{}_mE_{x_e}}$ est une fonction croissante de m .

Or $\frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{{}_mE_{x_e}}$ qui est à un facteur près $w_{x_e+m}^r$ est en m une fonction croissante concave vers le haut¹⁾ qui s'annule pour $m = 0$: il s'ensuit que le quotient de cette fonction par m est une fonction croissante ($m > 0$).

Il reste à étudier l'allure (sens de variation et concavité) des courbes représentant la variation de $C_1(m)$, $C_2(m)$, $C_3(m)$ lorsque m varie de 0 à $x_a - x_e$, les positions relatives de ces courbes et aussi leurs positions par rapport à celles qui représentent les variations de la différence actuarielle prospective et de la différence actuarielle rétrospective.

¹⁾ Cf. Valeurs actuelles dans les Caisses de Retraites. Revue internationale d'actuariat et de statistique de la Sécurité sociale, N° 10, 1966.

Remarquons d'abord :

- i) $C_1(m)$ est une fonction linéaire croissante de m ;
- ii) $C_1(m) > C_2(m)$, la courbe $C_2(m)$ est au-dessous de la droite $C_1(m)$.

$$C_1(m) \text{ s'écrit } \left(w_{x_a}^r + \frac{w_{x_e}^p}{x_a - x_e} E_{x_e} \right) \frac{m}{x_a - x_e},$$

$$C_1(m) - C_2(m) = w_{x_a}^r \frac{m}{x_a - x_e} - w_{x_e+m}^r > 0,$$

car $w_{x_e+m}^r$ croît avec m , sa concavité est tournée vers le haut et $w_{x_e}^r = 0$.

Etudions d'abord le cas $w_{x_e}^p > 0$

- 1° Pour $x_e + m < x_a$ la différence actuarielle rétrospective $w_{x_e+m}^r$ est croissante en m et concave vers le haut.

Il en résulte :

- i) que $C_2(m)$ est croissante en m et concave vers le haut ;
- ii) que $C_3(m)$ est croissante.

Pour démontrer que $C_3(m)$ est également concave vers le haut, il suffit de montrer que $\frac{m}{m E_{x_e}}$ est concave vers le haut.

- 2° $\frac{m}{m E_{x_e}}$ est concave vers le haut.

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \frac{(m+1) u^{m+1}}{l_{x_e+m+1}} - \frac{m u^m}{l_{x_e+m}} = \frac{m u^m}{l_{x_e+m+1}} \left[\frac{m+1}{m} u - \frac{l_{x_e+m+1}}{l_{x_e+m}} \right] \\ &= \frac{m u^m}{l_{x_e+m+1}} \left[\frac{u}{m} + q_{x_e+m} + u - 1 \right] \\ &= \frac{u^{m+1}}{l_{x_e+m+1}} + \frac{m u^m q_{x_e+m}}{l_{x_e+m+1}} + (u-1) \frac{m u^m}{l_{x_e+m+1}}, \end{aligned}$$

Δ_m est la somme de trois termes positifs chacun d'eux croissant avec m .

La concavité vers le haut en résulte.

$$3^o \quad C_2(m) > C_3(m) > w_{x_e+m}^r.$$

Puisque $w_{x_e}^p > 0$ il suffit de remarquer que $_{x_a-x_e}E_{x_e} < {}_mE_{x_e}$.

La dernière inégalité est évidente.

$$4^o \quad C_3(m) < w_{x_e+m}^p,$$

$$C_3(m) \text{ s'écrit } w_{x_e+m}^p - \left(1 - \frac{m}{x_a - x_e}\right) \frac{w_{x_e}^p}{{}_mE_{x_e}} \text{ et } w_{x_e+m}^p - C_3(m) > 0.$$

$$5^o \quad \text{Comparaison de } C_2(m) \text{ à } w_{x_e+m}^p$$

$$C_2(m) - w_{x_e+m}^p = \frac{w_{x_e}^p}{_{x_a-x_e}E_{x_e}} \frac{m}{(x_a - x_e)} - \frac{w_{x_e}^p}{{}_mE_{x_e}}.$$

Cette différence a le signe, pour $w_{x_e}^p > 0$, de

$$d(m) = m {}_mE_{x_e} - (x_a - x_e) {}_{x_a-x_e}E_{x_e}.$$

Calculons $d'(m)$ ou plutôt son signe qui sera celui de

$$\frac{1 + m \operatorname{Log} v}{m} + \frac{l'_{x_e+m}}{l_{x_e+m}} = \frac{1}{m} + \operatorname{Log} v - \mu'_{x_e+m}.$$

Le taux instantané de mortalité étant croissant pour les valeurs de $x_e + m$ considérées, l'expression ci-dessus est d'abord positive, s'annule, puis devient négative. La différence $d(m)$ passera donc par un maximum et un seul entre $m = 0$ et $m = x_a - x_e$.

Si l'on tient compte de $d(0) = -(x_a - x_e) {}_{x_a-x_e}E_{x_e} < 0$ et de $d(x_a - x_e) = 0$ il s'ensuit que $d(m)$ sera d'abord négative puis positive.

$C_2(m)$ commencera par être au-dessous de $w_{x_e+m}^p$ puis passera au-dessus et y restera (voir graphiques 3 et 4).

Considérons maintenant le cas $w_{x_e}^p < 0$

$$1^o \quad C_2(m) < C_3(m) < w_{x_e+m}^r$$

puisque $w_{x_e}^p < 0$ et $_{x_a-x_e}E_{x_e} < {}_mE_{x_e}$.

$$2^o \quad C_3(m) > w_{x_e+m}^p.$$

$$\text{En effet} \quad C_3(m) = w_{x_e+m}^p + \frac{|w_{x_e}^p|}{{}_mE_{x_e}} \left(1 - \frac{m}{x_a - x_e}\right).$$

3° $C_3(m) > 0$.

Si $w_{x_e+m}^p > 0$ cette inégalité résulte de la formule ci-dessus.

Si $w_{x_e+m}^p < 0$

on écrit $C_3(m) = \frac{1}{m E_{x_e}} \left\{ (c(x_e) - \gamma) \ddot{a}_{x_e: \overline{x_a - x_e}} \frac{m}{x_a - x_e} + \gamma \ddot{a}_{x_e: \overline{m}} \right\}$.

Il faut et il suffit:

$$\ddot{a}_{x_e: \overline{m}} > \left(1 - \frac{c(x_e)}{\gamma} \right) \ddot{a}_{x_e: \overline{x_a - x_e}} \frac{m}{x_a - x_e}.$$

Il suffit

$$\frac{\ddot{a}_{x_e: \overline{m}}}{m} > \frac{\ddot{a}_{x_e: \overline{x_a - x_e}}}{x_a - x_e},$$

$$\frac{1 + {}_1E_{x_e} + \dots + {}_mE_{x_e}}{m} > \frac{1 + {}_1E_{x_e} + \dots + {}_{x_a - x_e}E_{x_e}}{x_a - x_e}$$

ce qui est vérifié puisque les ${}_mE_{x_e}$ sont décroissants en m .

4° $C_2(m)$ est concave vers le haut.

Par sa définition même

$$w_{x_e+m}^r + \frac{w_{x_e}^p}{x_a - x_e} \frac{m}{E_{x_e}}.$$

$C_2(m)$ est la somme d'une fonction concave vers le haut.

$w_{x_e+m}^r$ et d'une fonction linéaire de m : elle est donc concave vers le haut.

5° Comparaison de $C_2(m)$ à $w_{x_e+m}^p$

$$C_2(m) - w_{x_e+m}^p = m |w_{x_e}^p| \left[\frac{1}{m {}_mE_{x_e}} - \frac{1}{(x_a - x_e) {}_{x_a - x_e}E_{x_e}} \right].$$

Il suffit de se reporter à la même comparaison conduite dans le cas $w_{x_e}^p > 0$ et de remarquer que les conclusions sont inversées: $C_2(m)$ sera d'abord au-dessus de $w_{x_e+m}^p$ puis passera au-dessous et y restera (voir graphiques 1 et 2).

6° Croissance de $C_3(m)$.

$$\text{A partir de } C_3(m) = \gamma \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{m}|}}{{}_mE_{x_e}} - \frac{[\gamma - c(x_e)] \ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{{}_mE_{x_e}} \frac{m}{(x_a - x_e)},$$

on écrit $\Delta_m = C_3(m+1) - C_3(m)$

$$\begin{aligned} \Delta_m = {}_mE_{x_e} C_3(m) & \left[\frac{1}{{}_{m+1}E_{x_e}} - \frac{1}{{}_mE_{x_e}} \right] + c(x_e) \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{(x_a - x_e)} \frac{1}{{}_{m+1}E_{x_e}} \\ & + \frac{\gamma}{{}_{m+1}E_{x_e}} \left[{}_mE_{x_e} - \frac{\ddot{a}_{x_e:\overline{x_a-x_e}|}}{x_a - x_e} \right]. \end{aligned}$$

Le seul terme qui peut être négatif est le dernier; il a le signe de

$${}_mE_{x_e} - \frac{1 + {}_1E_{x_e} + \dots + {}_{x_a-x_e+1}E_{x_e}}{x_a - x_e}.$$

Comme les ${}_mE_{x_e}$ sont décroissants en m , la différence ci-dessus est d'abord positive, puis négative. On peut donc conclure:

1) au début jusqu'à une certaine valeur de m

$\Delta_m > 0$ c'est-à-dire $C_3(m)$ croît avec m .

2) Après la dite valeur de m , il pourra se faire pour une valeur suffisamment grande de γ que le terme négatif l'emporte, c'est-à-dire que Δ_m soit < 0 et alors $C_3(m)$ décroîtra avec m .

Un contre-exemple montre que l'on peut avoir $\Delta_m < 0$ pour

$\frac{\gamma}{c(x_e)}$ suffisamment grand:

Avec EVK 1960 4% pour $x_e = 20$, $x_a = 65$ et une pension $\mathcal{P}(x_e) = \frac{45}{60}$ on obtient un taux de cotisation $c(20) = 0,052287$ avec lequel on calcule que $C_3(m)$ commence à décroître:

pour	$m = 41$	si	$\gamma > 0,36526$
	42		$\gamma > 0,34051$
	43		$\gamma > 0,32222$
	44		$\gamma > 0,30746$
	45		$\gamma > 0,29196$

En résumé, théoriquement $C_3(m)$ peut décroître si $\frac{\gamma}{c(x_e)}$ est grand

et après une certaine valeur de m ; toutefois en pratique, c'est-à-dire pour les valeurs de γ usuelles $C_3(m)$ sera croissant pour tout m .

Une condition suffisante pour la croissance de $C_3(m)$ peut être obtenue en se bornant à considérer les deux derniers termes de Δ_m :

$$\frac{c(x_e)}{\gamma} > 1 - \frac{(x_a - x_e)_m E_{x_e}}{\ddot{a}_{x_e: \overline{x_a - x_e}|}}$$

et l'on voit aisément qu'elle sera satisfaite si $\frac{\gamma}{c(x_e)}$ n'est pas trop grand: l'inégalité ci-dessus s'écrit

$$\frac{c(x_e)}{\gamma} > 1 - \frac{D_{x_e+m}}{\bar{D}}$$

en posant

$$\bar{D} = \frac{D_{x_e} + D_{x_e+1} + \dots + D_{x_a-1}}{x_a - x_e}.$$

Pour qu'elle soit vérifiée, il suffit que

$$\frac{c(x_e)}{\gamma} > 1 - \frac{D_{x_a-1}}{\bar{D}}.$$

Ce qui donne avec EVK 1960 4%, pour $x_a = 65$ et $x_e = 20$

$$\frac{c(20)}{\gamma} > 1 - \frac{6.720}{21.316,2} \quad \text{d'où} \quad \gamma < 1,460 \cdot c(20).$$

Application numérique ¹⁾

Avec la table EVK 1960 4% les graphiques qui suivent montrent les variations et les positions respectives des deux différences actuarielles et des fonctions $C_1(m)$, $C_2(m)$, $C_3(m)$, pour les âges d'entrées $x_e = 20, 30, 40, 50$, pour les valeurs de $c(x_e)$ qui correspondent à la formule de pension

$$\mathcal{P}(x_e) = \frac{x_a - x_e}{60}, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$c(20) = 0,052287$; $c(30) = 0,067750$; $c(40) = 0,087344$; $c(50) = 0,11278$ et pour $\gamma = 0,074932$. La courbe w_{x_e+m} figure sur le graphique $x_e = 20$, sur les autres elle ne se distinguerait guère de $C_2(m)$ et de $C_3(m)$ entre lesquelles elle est comprise²⁾.

¹⁾ Etablie par M. J.-P. Beausoleil, Membre de l'Association des Actuaires suisses.

²⁾ Des courbes analogues aux nôtres représentent les variations de $w_{x_e+m}^p$, $w_{x_e+m}^r$, w_{x_e+m} dans l'article de M. M. Frischknecht cité au début.

Conclusion

Des quatre fonctions considérées seules deux d'entre elles w_{x_e+m} et $C_3(m)$ possèdent la propriété d'être toujours comprises entre les deux différences actuarielles $w_{x_e+m}^p$ et $w_{x_e+m}^r$.

En outre, elles sont toutes deux positives. La première w_{x_e+m} est toujours croissante; on ne peut l'affirmer en toute généralité pour $C_3(m)$, toutefois ainsi que l'application numérique le suggère, dans les cas qui se présentent en pratique $C_3(m)$ sera croissante. On peut dire qu'au point de vue technique w_{x_e+m} et $C_3(m)$ présentent les mêmes avantages.

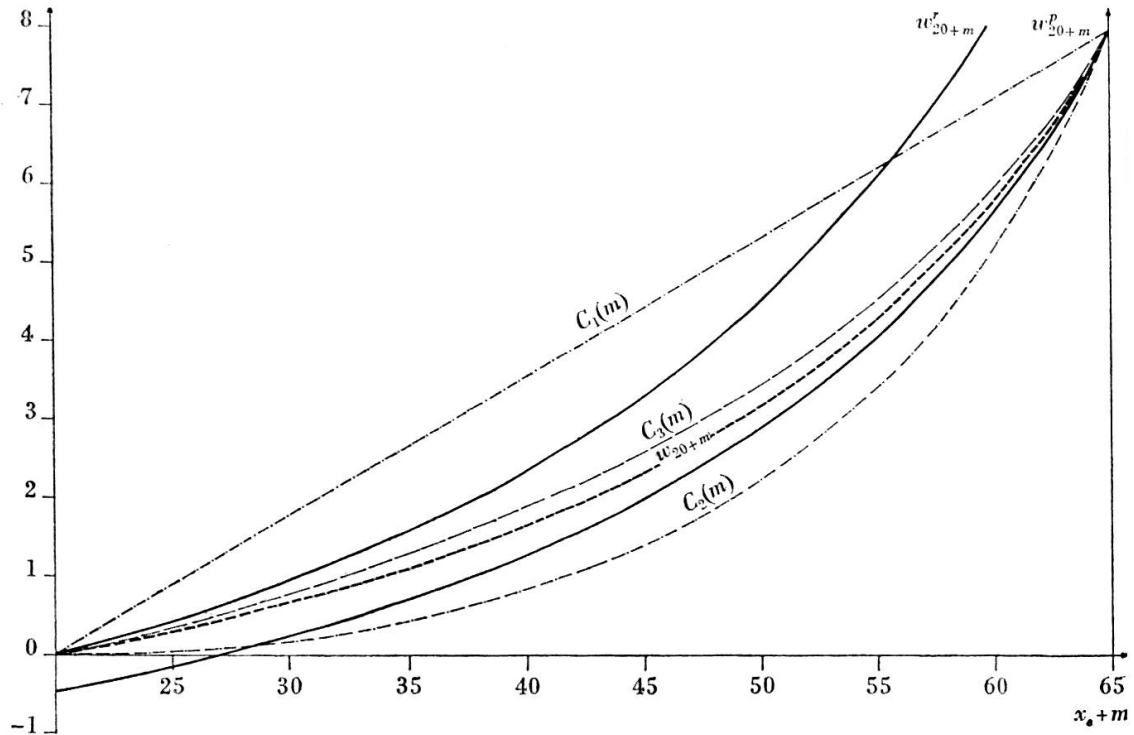
Si l'on envisage les conséquences du choix de l'une ou de l'autre pour déterminer le capital à attribuer en cas de sortie anticipée on ne peut manquer de remarquer d'une part que $C_3(m)$ est au-dessus de w_{x_e+m} si $w_{x_e}^p < 0$ et par suite conduit donc la caisse à être plus généreuse (qu'en appliquant w_{x_e+m}) au départ d'un assuré qui, en quelque sorte fait, à son entrée, un don à la caisse et auquel il s'agit de restituer une partie de ce don; d'autre part que $C_3(m)$ est au-dessous de w_{x_e+m} si $w_{x_e}^p > 0$ et par suite conduit la caisse à être moins généreuse (qu'en appliquant w_{x_e+m}) au départ d'un assuré qui, en quelque sorte, a reçu à son entrée un don de la caisse et sur lequel il s'agit de récupérer une partie de ce don.

Ces considérations peuvent inciter à accorder une préférence à $C_3(m)$ à condition, bien entendu, de s'assurer qu'elle est croissante.

Il est vraisemblable que la formule donnée pour $C_3(m)$ donnera également de bons résultats dans les cas — que nous n'avons pas étudiés — où l'assurance de retraites est jointe à une assurance invalidité et à une assurance survivants.

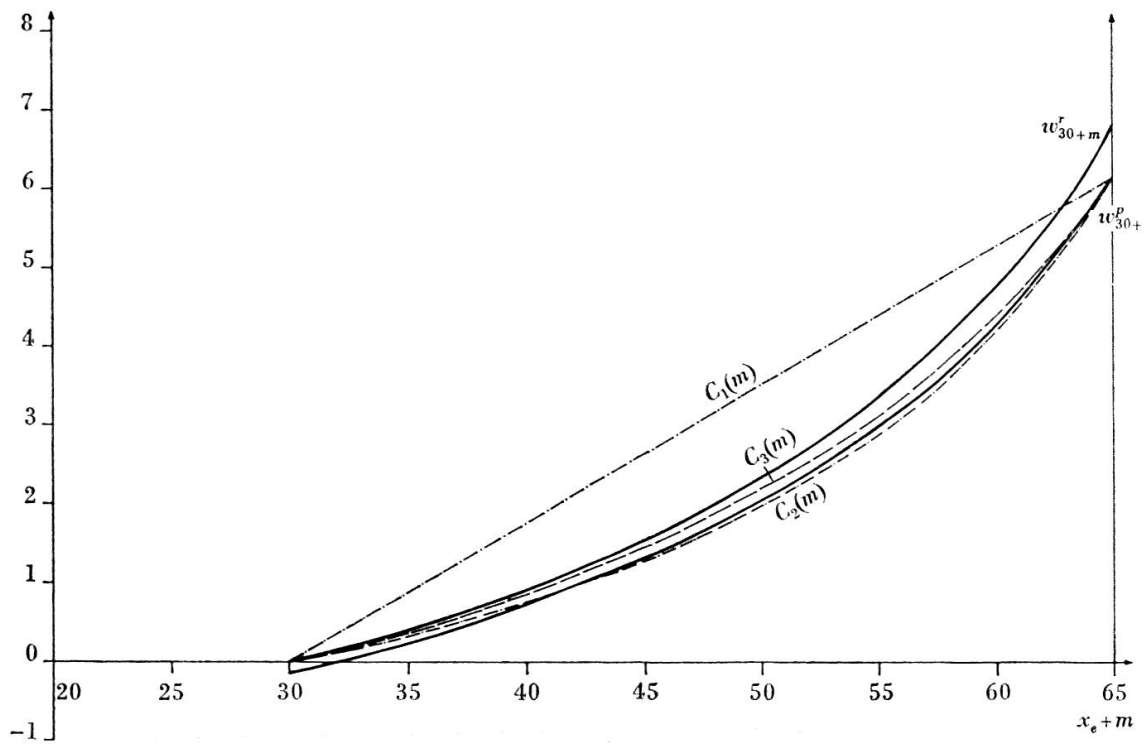
Graphique 1

$$x_e = 20$$



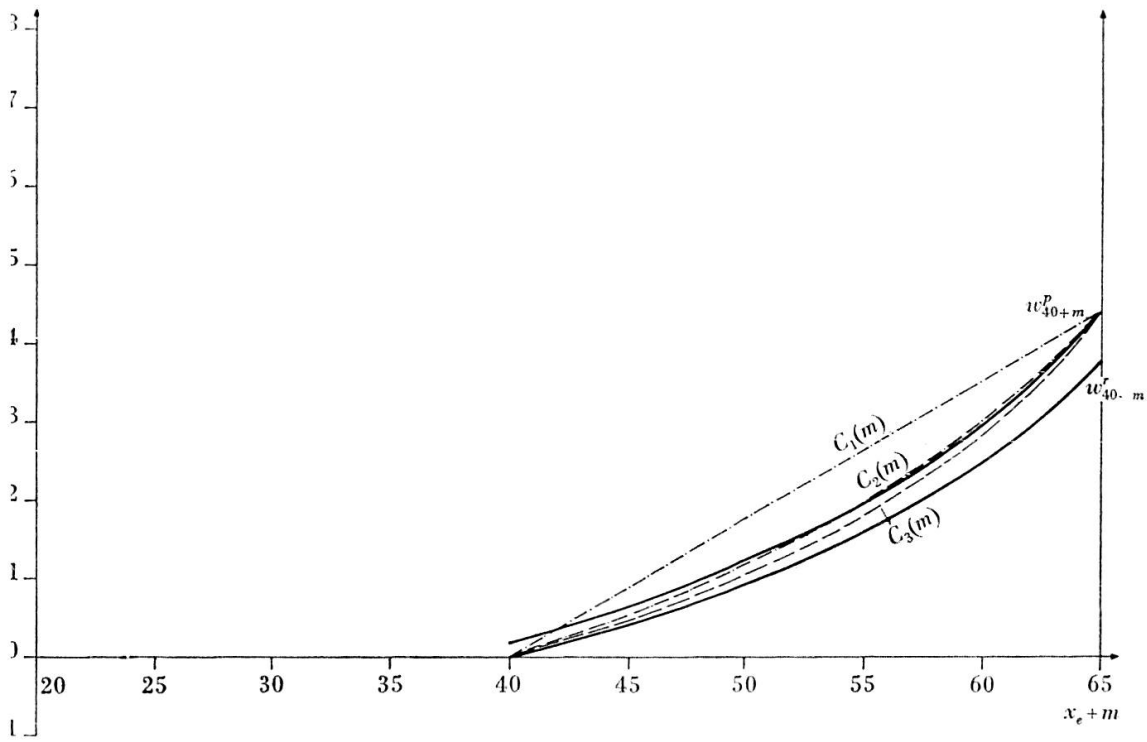
Graphique 2

$$x_e = 30$$



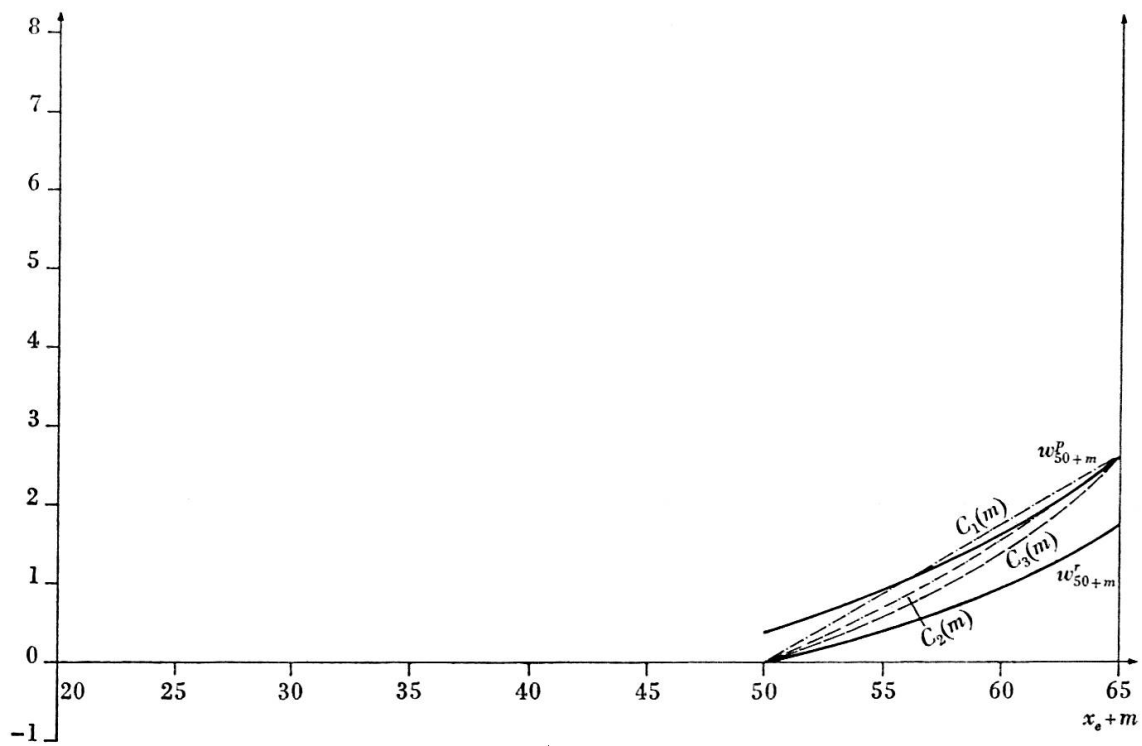
Graphique 3

$$x_e = 40$$



Graphique 4

$$x_e = 50$$



Zusammenfassung

Der Verfasser betrachtet zunächst die bei Finanzierung mit Durchschnittsprämie sich ergebenden retrospektiven und prospektiven Deckungskapitalien. Je nachdem der Versicherte vor oder nach dem Alter ξ ($=$ Alter, für welches die Durchschnittsprämie gleich der individuellen Prämie) eingetreten ist, kann beim Dienstaustritt die Auszahlung des einen oder andern der beiden Deckungskapitalien für den Versicherten unverdient hoch oder unzumutbar tief sein. Es wird daher nach einer Kompromisslösung gesucht, die vom versicherungstechnischen Standpunkt aus vertretbar ist und den Interessen des Austretenden und der Kasse weitgehend entgegenkommt. Die Austrittsabfindung soll positiv sein und wenn möglich zwischen den beiden erwähnten Deckungskapitalien liegen. Der Autor diskutiert verschiedene Möglichkeiten, von denen zwei die genannten Forderungen erfüllen, wie anschaulich durch die beigelegten Graphiken belegt wird.

Summary

The author considers at first the retrospective and the prospective policy reserves which result when the basis adopted for financing is an average premium. Depending upon whether the insured joins before or after age ξ (age for which the average premium is equal to the individual premium), payment on termination of service of the one or the other of these reserves might be undeservedly high or unjustly low for the insured. A compromise solution, which may be acceptable from an actuarial point of view and at the same time has due regard to the interests of the fund as well as of the person opting out, is therefore sought. The lump sum settlement should be positive and should lie, if possible, somewhere between the aforesaid two values of the mathematical reserves. The author proceeds to discuss various possibilities, out of which two fulfill the requirements stated as is made visually plain by the graphs exhibited.

Riassunto

L'autore considera anzitutto le riserve matematiche, ottenute sia con il metodo retrospettivo che con il metodo prospettivo, finanziate per mezzo di un premio medio. Secondo che l'assicurato venga ammesso prima o dopo l'età ξ (età alla quale il premio medio è uguale al premio individuale) l'ammontare del versamento in caso d'uscita che ne risulta per lui può essere, secondo l'una o l'altra riserva matematica, ingiustamente alto o basso. Viene dunque ricercata una soluzione di compromesso che sia ammissibile dal punto di vista tecnica dell'assicurazione e che tenga conto in ampia misura degli interessi dell'assicurato e della cassa. La tacitazione in caso di dimissione dovrebbe essere positiva ed il suo importo essere situato possibilmente tra le due riserve matematiche suddette. L'autore discute più possibilità, delle quali due adempiono le condizioni menzionate come viene documentato dai grafici allegati.