

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	66 (1966)
Artikel:	Variation der Versicherungsdauer bei anomalen Risiken in der Lebensversicherung
Autor:	Jecklin, H.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-966935

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Variation der Versicherungsdauer bei anomalen Risiken in der Lebensversicherung

Von H. Jecklin, Zürich

Zusammenfassung

Bei erhöhten Risiken wird oftmals eine Abkürzung der Versicherungsdauer empfohlen, wodurch die Sonderprämie gesenkt wird. Dieses Vorgehen ist in verschiedener Hinsicht problematisch. Es empfiehlt sich daher, unter Umständen umgekehrt zu verfahren, nämlich bei ungeänderter Prämienzahlungsdauer den Endtermin der Versicherung hinauszuschieben.

Bei der technischen Behandlung der erhöhten Risiken in der Lebensversicherung stützt man sich weitgehend auf die Arbeitshypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit. Wenn q_x die jährliche Sterbenswahrscheinlichkeit des normalen Risikos ist, so setzt man jene des anomalen Risikos

$$q_x^{(\alpha)} = (1 + \alpha) q_x, \quad (1)$$

worin α eine dem Erschwerungsgrad entsprechende Konstante ist. Vom hypothetischen Sterblichkeitsverlauf zu unterscheiden ist der Verlauf der Sterblichkeit in jener Klasse von Übersterblichkeitsursachen, welcher das Risiko zugehört. Dieser durch statistische Untersuchungen festgestellte Verlauf kann, gemessen am normalen Sterblichkeitsverlauf, steigend, konstant, fallend oder variabel sein [1]. Die einer Erschwerungsursache im Durchschnitt entsprechende Übersterblichkeit wird grosso modo durch die genannte Konstante α repräsentiert.

Die einem bestimmten α entsprechende jährliche Sonderprämie ist im wesentlichen eine zusätzliche durchschnittliche Risikoprämie und zufolgedessen eine Funktion des Eintrittsalters x und der Versicherungs-

dauer n . Bekannt ist die Näherungsformel für den Prämienzuschlag bei gemischter Versicherung [2]

$$\Delta_{x:\bar{n}}^{(\alpha)} \approx \alpha \Delta_{x:\bar{n}}^{(1)} = \alpha (P_{x:\bar{n}} - P_{\bar{n}}). \quad (2)$$

Für festes x steigt $\Delta_{x:\bar{n}}^{(\alpha)}$ mit wachsendem n . Aus diesem Grunde wird manchmal jenen Versicherungskandidaten, welchen die Höhe der Zuschlagsprämie nicht behagt, der Versicherungsabschluss auf eine kürzere Dauer empfohlen, weil dann bei gleichem α eine niedrigere Zuschlagsprämie resultiert. Es erscheint dies eigentlich nur sinnvoll, wenn es sich um temporäre Todesfallversicherung handelt, weil dann der Prämienzuschlag praktisch der normalen Tarifprämie proportional ist und die Tarifprämie selbst bei Kürzung der Versicherungsdauer kleiner wird. Handelt es sich dagegen um gemischte Versicherung, dann steigt bei Kürzung der Versicherungsdauer die Gesamtprämie. Denn wie die folgende kleine Tabelle zeigt, nimmt in dem für die Praxis in Frage kommenden Spielraum bei einer Kürzung der Versicherungsdauer die Sparprämie wesentlich stärker zu als die durchschnittliche Risikoprämie abnimmt.

Grundlagen: SM 1948/53 zu $2\frac{1}{2}\%$, $x = 30$.

n	$P_{x:\bar{n}}$	$P_{\bar{n}}$	$\Delta_{x:\bar{n}}^{(1)}$
	%	%	%
10	88.13	87.08	1.05
15	55.66	54.41	1.25
20	39.68	38.19	1.49
25	30.38	28.56	1.82
30	24.48	22.22	2.26
35	20.59	17.76	2.83
40	18.02	14.47	3.55

Aus der theoretischen Gleichsetzung

$$P_{x:\bar{n}} + \alpha (P_{x:\bar{n}} - P_{\bar{n}}) = P_{x:\bar{m}} + \alpha (P_{x:\bar{m}} - P_{\bar{m}}), \quad m < n,$$

kann bei gegebenen x, n und m die Übersterblichkeit α bestimmt werden, bei welcher Gleichheit der Gesamtprämie für die Dauern n und m bestehen würde. Es ist

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{P_{\bar{m}} - P_{\bar{n}}}{P_{x:\bar{m}} - P_{x:\bar{n}}} - 1.$$

Dies ergibt beispielsweise auf Basis voriger Tabelle folgende Werte für

n	m	α
40	35	3.5
40	30	5
30	25	13.3
30	20	20
20	15	66.6

Derartige Übersterblichkeiten scheiden sowohl theoretisch als praktisch aus. Der Kürzung der Versicherungsdauer bei erhöhten Risiken ist ohnehin eine Problematik inhärent. Dass ein vorhandener Erschwerungsgrund durch eine Kürzung der Versicherungsdauer nicht aus der Welt geschafft werden kann, dürfte hinreichend klar sein. Wenn das zu versichernde Risiko einer Erschwerungsklasse mit steigender Übersterblichkeit zugehört, so ist es vom Standpunkt des Versicherers aus gesehen immerhin verständlich, wenn auf eine Reduktion der Versicherungsdauer abgezielt wird. Umgekehrt aber ist es verfehlt, bei einem Risiko mit effektiv fallender Übersterblichkeit auf eine Kürzung der Versicherungsdauer zu dringen, wenn die Sonderprämie mit der Arbeitshypothese konstanter Übersterblichkeit berechnet wird. Direkt verwerflich aber ist es unseres Erachtens, wenn die Versicherungsdauer gekürzt wird in der Absicht, die Sonderprämie dadurch unter jene Grenze zu bringen, unterhalb welcher eine Extraprämie nicht eingehoben zu werden pflegt. Wir verfechten übrigens den Standpunkt, dass es technisch und logisch nicht zu vertreten ist, Zuschlagsprämien kleiner Größenordnung nicht in Anrechnung zu bringen [3]. Es ist beispielsweise nach SM 1948/53 à 2½% für $\alpha = 0.5$ (50% Übersterblichkeit) und $n = 20$ die Sonderprämie

$$\text{bei } x = 30: 0.5 \Delta_{30:20}^{(1)} = 0.75 \text{ \%},$$

$$\text{bei } x = 40: 0.5 \Delta_{40:20}^{(1)} = 1.65 \text{ \%}.$$

Wird die Grenze, unterhalb welcher nicht verrechnet wird, mit 1% angesetzt, so hat der 40jährige eine Sonderprämie zu entrichten, der 30jährige dagegen nicht, notabene bei genau gleicher prozentualer Übersterblichkeit. Ein solches Prozedere läuft auf Betrug eines Teiles der anomalen Risiken hinaus. Dagegen wird argumentiert, dass kleine Sonderprämien wegen der damit verbundenen Kosten und Umtriebe nicht gerechtfertigt seien. Dieses Argument steht jedoch auf ganz

schwachen Füssen, denn die hauptsächlichsten Kosten entstehen doch durch die Tarifierung und Prämienberechnung. Diese Kosten gehen der Feststellung, dass eine kleine Prämie resultiert, voraus und können nicht rückgängig gemacht werden. In der Folge aber entstehen bei der heutigen Rationalisierung, wobei Ausfertigung der Prämienverfallsanzeigen, Verbuchungen und Reserveberechnungen vollautomatisch erfolgen, praktisch keine zusätzlichen Umtriebe und Kosten. In bezug auf die Gesamtheit der normalen Versicherten jedoch geht die Sache gar nicht in Ordnung; sie wird mit anomalen Risiken belastet, was den technischen Gewinn beeinflussen kann, und die bezüglichen anomalen Risiken geniessen die Leistungen des normalen Bestandes, insbesondere den normalen Rückkauf, ohne dafür die technisch notwendige Sonderleistung erbracht zu haben. Und letztere ist, gerade weil sie klein ist, zumutbar. Die Verfälschung des Risikoprämientotals der Anomalengesamtheit sei nur nebenbei erwähnt.

Es scheint uns die Frage berechtigt, weshalb man nicht umgekehrt vorgehen soll, wenn eine Sonderprämie beim Versicherten auf Widerstand stösst, nämlich die Versicherungsdauer zu verlängern statt zu verkürzen, unter Belassung der Prämienzahlungsdauer. Es ist sicher

$$\frac{A_{x:n+k}^{(\alpha)}}{\ddot{a}_{x:n}^{(\alpha)}} < \frac{A_{x:n}^{(\alpha)}}{\ddot{a}_{x:n}^{(\alpha)}} = P_{x:n}^{(\alpha)}, \quad 0 < k.$$

und es liegt daher nahe, den Endtermin der Versicherung soweit hinauszuschieben, dass

$$\frac{A_{x:n+k}^{(\alpha)}}{\ddot{a}_{x:n}^{(\alpha)}} = P_{x:n}^{(\alpha)}.$$

Der anomale Versicherte zahlt also in diesem Falle die gleiche Prämie über die gleiche Dauer wie das normale Risiko, und die Sonderprämie wird durch Aufschub des Versicherungstermins kompensiert. Eine solche Lösung darf natürlich nicht zur Anwendung kommen, wenn nach ärztlicher Feststellung eine typisch steigende Übersterblichkeit vorliegt.

Der Vorschlag könnte auf Abneigung stossen, weil die Extraprämie im Falle abgekürzter Prämienzahlung eine Berechnung auf Basis der an die Übersterblichkeit angepassten Kommutationszahlen nötig erscheinen lässt. Die Sonderprämie lässt sich jedoch auch hier auf einfache Art näherungsweise bestimmen.

Es ist nämlich

$$P_{x:\overline{n+k/n}}^{(\alpha)} = \frac{A_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(\alpha)}} \approx P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}, \quad (3)$$

wenn nur k nicht zu gross, und es ist dies leicht einzusehen:

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n+k/n}}^{(\alpha)} &= \frac{P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \ddot{a}_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(\alpha)}} = P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \frac{(1+\alpha) P_{x:\overline{n}} - \alpha P_{\overline{n}} + d}{(1+\alpha) P_{x:\overline{n+k}} - \alpha P_{\overline{n+k}} + d} \\ &= P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \frac{(1+\alpha) \ddot{a}_{\overline{n}} - \alpha \ddot{a}_{x:\overline{n}}}{(1+\alpha) \ddot{a}_{\overline{n+k}} - \alpha \ddot{a}_{x:\overline{n+k}}} \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n+k}} \ddot{a}_{\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}} \ddot{a}_{\overline{n}}} \approx P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}. \end{aligned}$$

Nunmehr setzen wir, um auf die vorige Fragestellung zurückzukommen,

$$P_{x:\overline{n+k}}^{(\alpha)} \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} = P_{x:\overline{n}}. \quad (4)$$

Hierin sind gegeben x, n und α , gesucht k . Eine praktische und zugleich hinreichend genaue explizite Lösung lässt sich kaum angeben. Da aber die Werte $P_{x:\overline{n}}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$, $A_{x:\overline{n}}^{(1)}$ in jedem Betrieb, der sich mit der Versicherung erhöhter Risiken befasst, tabelliert vorliegen, ergibt sich k durch probierendes Rechnen, indem man nach jenem k sucht, das folgende Gleichsetzung möglichst gut befriedigt:

$$(P_{x:\overline{n+k}} + \alpha A_{x:\overline{n+k}}^{(1)}) \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \approx P_{x:\overline{n}}. \quad (5)$$

Nachstehend einige Tabellenwerte nach SM 1948/53 zu $2\frac{1}{2}\%$, $x = 30$, die wir für die anschliessenden Beispiele benötigen:

n	$P_{x:\overline{n}}$ %	$\ddot{a}_{x:\overline{n}}$	$A_{x:\overline{n}}^{(1)}$ %
20	39.68	15.607	1.49
21	37.44	16.174	1.55
22	35.41	16.722	1.61
23	33.57	17.253	1.67
24	31.90	17.764	1.74
25	30.38	18.258	1.82
26	28.99	18.734	1.90

Es seien nun gegeben $x = 30$, $n = 20$, $\alpha = 0.75$. Die Jahresprämie ist diesfalls $P_{30:\overline{20}}^{(\alpha)} = 40.80\%$. Um sie auf das Niveau der normalen Prämie (nämlich 39.68%) herabzumindern, ist der Endtermin der

Versicherung bei gleicher Dauer der Prämienzahlung um $1\frac{1}{2}$ Jahre hinauszuschieben. Denn

$$\begin{aligned} \text{für } k = 1 \text{ folgt: } & (37.44 + 0.75 \cdot 1.55) \frac{16.174}{15.607} \% = 40.00 \% \\ \text{für } k = 2 \text{ folgt: } & (35.41 + 0.75 \cdot 1.61) \frac{16.722}{15.607} \% = 39.23 \% \\ \text{für } k = 1.5 \text{ also eine Prämie von } & 39.62 \% \end{aligned}$$

Sei, bei im übrigen gleicher Ausgangslage, $\alpha = 2$. Diesfalls muss der Termin um 5 Jahre hinausgeschoben werden, denn

$$\text{für } k = 5 \text{ folgt: } (30.38 + 2 \cdot 1.82) \frac{18.258}{15.607} \% = 39.80 \%$$

Man kann anschliessend die Probe aufs Exempel machen, indem man (4) nach α auflöst. Aus

$$[(1 + \alpha) P_{x:\overline{n+k}} - \alpha P_{\overline{n+k}}] \ddot{a}_{x:\overline{n+k}} = P_{x:\overline{n}} \ddot{a}_{x:\overline{n}}$$

folgt

$$\alpha = \frac{A_{x:\overline{n}} - A_{x:\overline{n+k}}}{(P_{x:\overline{n+k}} - P_{\overline{n+k}}) \ddot{a}_{x:\overline{n+k}}}.$$

Numerisch erhalten wir beim ersten der beiden vorigen Beispiele $\alpha = 0.78$ und beim zweiten $\alpha = 1.95$.

Im Zusammenhang mit Vorstehendem mag noch auf eine verwandte Fragestellung im Rahmen der Versicherung normaler Risiken hingewiesen werden. Wenn man bei der jährlichen Prämie der gemischten Versicherung die Prämienzahlungsdauer verkürzt, unter Belassung der Versicherungsdauer, so wird bekanntlich die Prämie grösser, und wenn man umgekehrt die Versicherungsdauer verlängert, unter Belassung der Prämienzahlungsdauer, so erniedrigt sich die Prämie. In Formeln

$$\begin{aligned} \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n-l}}} &> \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}, & 0 < l < n, \\ \frac{A_{x:\overline{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} &< \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}, & 0 < k. \end{aligned}$$

Nun kann man sich fragen, um wieviel die Versicherungsdauer bei gegebener Verkürzung der Prämienzahlungsdauer zu verlängern beziehungsweise um wieviel die Prämienzahlungsdauer bei gegebener Verlängerung der Versicherungsdauer zu kürzen ist, damit das jährliche Prämenniveau der ursprünglichen gewöhnlichen gemischten Versicherung gewahrt

bleibt. Es soll also sein

$$\frac{A_{x:\bar{n+k}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n+l}}} = \frac{A_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}. \quad (6)$$

Es ist dies eine Bestimmungsgleichung für k , wenn x, n und l gegeben, bzw. für l , wenn x, n und k gegeben. Für den reinen Sparvertrag sind die Lösungen leicht explizit anzugeben. Aus

$$\frac{v^{n+k}}{\ddot{a}_{\bar{n+l}}} = \frac{v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}}$$

folgt in einfacher Umformung

$$k = \frac{\log L}{\log v}, \quad \text{wenn} \quad \frac{1 - v^{n-l}}{1 - v^n} = L \quad \text{gesetzt wird}$$

bzw.

$$l = \frac{\log K}{\log v}, \quad \text{wenn} \quad \frac{v^n}{1 - v^k + v^{n+k}} = K \quad \text{gesetzt wird.}$$

In Anwendung auf die gemischte Versicherung würden diese expliziten Lösungen aber viel zu ungenaue Resultate ergeben. Aus Gleichung (6) folgt jedoch nach einigen elementaren Umformungen

$$N_{x+n+k} = N_{x+n-l} - a(N_{x+n-l} - N_{x+n}) \quad (7)$$

bzw.

$$N_{x+n-l} = N_{x+n} + \frac{1}{a-1}(N_{x+n} - N_{x+n+k}), \quad (8)$$

wenn $a = 1/d\ddot{a}_{x:\bar{n}}$ bedeutet. Auf Basis dieser Beziehungen kann bei gegebenen x, n, l das Terminalter der Versicherung $x + n + k$ bzw. bei gegebenen x, n, k das Endalter der Prämienzahlung $x + n - l$ aus der Kolumne der N_x interpoliert werden.

Beispiel auf Basis SM 1948/53 à 2½ %, $x = 40$, $n = 20$.

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}} = 15.178, \quad d = 0.02439, \quad a = 2.7013, \quad 1/(a-1) = 0.5878.$$

1. $l = 5$, gesucht k .

$$N_{x+n+k} = 318\,814.6 - 2.7013(318\,814.6 - 221\,639.3) = 56\,315.0, \\ x + n + k = 73.09, \quad n + k = 33.09.$$

2. $k = 5$, gesucht l .

$$N_{x+n-l} = 221\,639.3 + 0.5878(221\,639.3 - 143\,530.8) = 267\,551.5, \\ x + n - l = 57.55, \quad n - l = 17.55.$$

Man sieht schon aus diesem einen Beispiel, dass k und l nicht auswechselbar sind. Wie die folgende kleine Tabelle korrespondierender Werte zeigt, steigt k rascher an als l . Es gilt für $x = 40$ und $n = 20$ nach SM 1948/53 zu $2\frac{1}{2}\%$

$n + k$	$n - l$	$n - l$	$n + k$
21	19.4	19	21.8
22	18.9	18	23.9
23	18.4	17	26.3
24	17.9	16	29.2
25	17.5	15	33.1
26	17.1	14	49.5
27	16.7	13	> 65
28	16.4		
29	16.1		
30	15.8		

Ein ähnliches einfaches Problem bietet die Frage nach der Prämienzahlungsdauer der lebenslänglichen Todesfallversicherung, wenn sie gleiche Prämienhöhe haben soll wie eine gemischte Versicherung gleichen Eintrittsalters. Aus

$$\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\bar{n}-l}} = \frac{A_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \quad (9)$$

ergibt sich in leichter Umformung, wenn $d\ddot{a}_{x:\bar{n}} = b$ gesetzt wird,

$$N_{x+n-l} = \frac{N_{x+n}}{1-b}. \quad (10)$$

Sei beispielsweise für die gemischte Versicherung $n = 20$, so erhält man, bei gleichen Rechnungsgrundlagen wie vorhin, wieder durch Interpolation aus der Kolonne der N_x für nachstehende Eintrittsalter

x	$n - l$
30	10.85
40	13.54
50	16.18

In Umkehrung kann die Dauer einer gemischten Versicherung gefunden werden mit gleicher Prämie und gleichem Eintrittsalter wie eine gege-

bene lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung, indem

$$N_{x+n} = N_{x+n-l} \frac{dN_x - D_x}{dN_{x+n-l} - D_x}.$$

Die vorstehend behandelten Fragen sind, gemessen am gegenwärtigen Höhenflug der Versicherungsmathematik, zugegebenermassen sehr elementarer Natur. Sie können jedoch von Wert sein für die Praxis, und ihre Lösungen zeigen unseres Erachtens jene gewisse Eleganz, welche Freude an der spielerischen Beschäftigung mit solch einfachen Problemen wecken kann.

Literaturverzeichnis

Siehe in früheren Arbeiten des Verfassers:

- [1] Betrachtungen zum Sterblichkeitsverlauf erhöhter Risiken. MVSV Bd. 61/1, 1961, insbes. Seite 143.
- [2] Anhang zu W. Sacher, Versicherungsmathematik II. Springer Verlag 1958, Seite 234.
- [3] Betrachtungen zum Sterblichkeitsverlauf erhöhter Risiken. MVSV Bd. 61/1, 1961, Seiten 146/147.

Résumé

Lors de l'assurance de risques aggravés, on recommande fréquemment de diminuer la durée d'assurance, ce qui diminue également la surprime. Selon les points de vue, ce procédé peut devenir incertain. Il sera donc préférable, dans certaines circonstances, de procéder de façon inverse et de reculer le terme de l'assurance en maintenant inchangée la durée du paiement des primes.

Summary

Curtailment of the period of insurance is often recommended in the case of substandard risks, the idea being to cut down extra loading. In various respects, however, this procedure is questionable. It may be advisable in certain circumstances to adopt the opposite course and defer the maturity date of insurance, keeping the period of premium payment unaltered.

Riassunto

In caso di rischi maggiorati viene spesso raccomandato un accorciamento della durata assicurativa, mediante la quale si ottiene una riduzione del premio speciale. Questo modo di procedere è problematico sotto diversi rapporti. Si raccomanda quindi di procedere eventualmente in modo contrario, precisamente lasciando immutata la durata del pagamento dei premi e differire il termine finale dell'assicurazione.