**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

**Swiss Actuaries** 

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 65 (1965)

Artikel: Kredibilität im Versicherungswesen

Autor: Derron, Marcel

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-550810

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Kredibilität im Versicherungswesen

Von Marcel Derron, Zürich

### Zusammenfassung

Es wird eine Einführung in die vor allem in den Vereinigten Staaten häufig verwendete «Credibility Theory» gegeben. Diese Theorie befasst sich damit, Kriterien über die Aussagekraft einer statistischen Erhebung aufzustellen und die Angemessenheit des verwendeten Tarifs zu überprüfen.

### 1. Begriff der Kredibilität

Das Wort «Credibility» wurde in den USA ursprünglich eingeführt, um ein Mass für die Aussagekraft einer statistischen Erhebung, die zum Zwecke einer Tarifrevision durchgeführt wurde, zu schaffen. In vielen Fällen genügt das vorhandene statistische Material nicht, um einen Tarif abzuleiten. Trotzdem ist eine solche Statistik nicht völlig wertlos, indem sie auch eine gewisse – allerdings beschränkte – Aussagekraft besitzt. Die Kredibilitätstheorie ordnet einer voll aussagekräftigen Statistik den Kredibilitätswert 1, einer nicht aussagekräftigen Statistik den Kredibilitätswert 0 zu. Die Theorie befasst sich mit der Frage, bei welchem Stichprobenumfang volle Kredibilität gewährleistet ist und in welchem Ausmass Statistiken mit kleinerem Stichprobenumfang für die Tarifierung verwendet werden können.

Die Kredibilitätstheorie verdankt ihr Entstehen der ausgeprägten Tendenz im amerikanischen Versicherungsgewerbe, die verschiedenen Risiken in eine grosse Zahl von Klassen einzuteilen. Man beabsichtigt damit, dem wahren Risiko möglichst gerecht zu werden. Die Statistiken in den Vereinigten Staaten werden in erster Linie nach Staaten aufgeteilt, da die Versicherungsaufsicht eine Angelegenheit der Staaten und nicht des Bundes ist. Innerhalb der Staaten erfolgt eine Einteilung nach

verschiedenen Gesichtspunkten, beispielsweise nach regionalen. So kennt der Staat New York in der Automobilversicherung insgesamt 45 verschiedene regionale Tarifzonen. Noch ausgeprägter ist die Klassenunterteilung in der Feuerversicherung, die 115 verschiedene Arten von Besitzund Mietverhältnissen eines Gebäudes kennt. Innerhalb der einzelnen Klassen wird weiter nach Bauart (Holz, Ziegel, feuersicher usw.) und Feuerschutz (etwa Entfernung vom nächsten Hydranten) unterschieden.

Zieht man noch in Betracht, dass in den Vereinigten Staaten die Prämien in der Sachversicherung fast alljährlich ändern, dann ist leicht einzusehen, dass das Beobachtungsmaterial in den einzelnen Klassen kaum ausreichend sein kann, um jedes Jahr einen neuen Tarif aufzustellen. Es ergab sich deshalb die Notwendigkeit, ein Standardmass einzuführen, das die Aussagekraft einer Statistik charakterisiert. Dieses mit Kredibilität bezeichnete Mass soll zeigen, wie weit die Ergebnisse neuester Untersuchungen aussagekräftig sind im Vergleich zu einem grössern Stichprobenumfang, Statistiken früherer Jahre oder anderer Staaten.

Aus dem Gesagten wird deutlich, weshalb die Kredibilitätstheorie vor allem für Feuer- und Automobilversicherungen verwendet wird, obschon sie auch auf andern Gebieten der Versicherungstechnik anwendbar wäre, beispielsweise auch in der Lebensversicherung.

Das Gebiet der Kredibilität ist ziemlich umfangreich. Durch langjährige Erfahrungen in der Praxis haben sich gewisse Regeln eingebürgert, für die ein mathematischer Beweis fehlt. Es würde jedoch zu weit führen, im Rahmen dieses Kurzberichtes auf alle Verfahren einzutreten.

Unseres Wissens ist im deutschen Sprachraum bisher noch keine Arbeit zu diesem Spezialgebiet der kollektiven Risikotheorie erschienen. Allerdings finden sich im letzten Bericht der SUVA<sup>1</sup>) gewisse Hinweise, dass diese Anstalt bei der Bestimmung von betriebseigenen Prämiensätzen die Grundsätze der Kredibilitätstheorie anwendet. Zudem hat Bühlmann [4]<sup>2</sup>) im letzten Heft der Mitteilungen einen interessanten Beitrag zur Kredibilitätstheorie geleistet.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>) Ergebnisse der Unfallstatistik der achten fünfjährigen Beobachtungsperiode 1953–1957.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Zahlen in eckiger Klammer verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Berichtes.

### 2. Volle Kredibilität (Full Credibility)

Zur Bestimmung der Masszahl für volle Kredibilität sei ein mathematisches Modell, das die folgenden drei Festsetzungen erfüllt, verwendet:

- 1. Die Wahrscheinlichkeit eines Schadens während einer bestimmten Zeit ist gleich hoch für alle Versicherten;
- 2. die Wahrscheinlichkeit eines Schadens ist proportional zur Zeit, während der das versicherte Objekt unter Risiko steht, und
- 3. der Schadenbetrag ist für alle Versicherten der gleiche, d.h. es wird nur die Schadenhäufigkeit und nicht die Schadenhöhe betrachtet.

Die Schadenhäufigkeit sei mit q, die Anzahl der Risiken mit der Schadenhäufigkeit q mit n, die Schadenzahl mit r und das Zeitintervall mit 1/s bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gesamte Schadenzahl genau r sein wird, wobei s gross genug sein muss, damit für keines der n Risiken im Zeitintervall 1/s mehr als ein Schaden auftritt, ist gegeben durch den (r+1)-sten Ausdruck aus der binomischen Entwicklung  $[(1-q/s)+q/s]^{ns}$ , wobei q/s die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Schadens im Zeitintervall 1/s bedeutet. Dieser (r+1)-ste Ausdruck der binomischen Entwicklung kann dargestellt werden durch

$$_{ns}C_{r}(1-q/s)^{ns-r}(q/s)^{r},$$

wobei mit  $_{ns}C_r$  der entsprechende Binomialkoeffizient bezeichnet sei.

Die Wahrscheinlichkeit P, dass die Anzahl der Schäden in ns Versuchen innerhalb von  $\pm$  100 k % des Erwartungswertes n q liegt, ist deshalb gleich dem Ausdruck

$$P = \sum_{r=(1-k)}^{r=(1+k)} {n \choose r} {r \choose r} {r \choose r} {r \choose r} {r \choose r},$$
 (1)

wobei nq endlich ist und s gegen unendlich strebt.

Unter Verwendung der Stirlingschen Formel kann man zeigen, dass dieser Ausdruck durch folgende Formel approximiert wird:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi nq}} \int_{0}^{knq} e^{-\frac{x^{2}}{2nq}} dx, \qquad (2)$$

sofern s sehr gross wird und falls n gross und k klein sind.

Führt man noch die neue Veränderliche  $t = x/\sqrt{nq}$  ein, so erhält man schliesslich die eigentliche Standardformel für die volle Kredibilität:

$$P = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{k\sqrt{nq}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right]. \tag{3}$$

Eine genaue Herleitung findet sich bei Perryman [5].

Wie schon Poisson gezeigt hat, kann die nach ihm benannte Verteilung als Grenzfall der binomischen Verteilung betrachtet werden, und zwar dann, wenn die Schadenhäufigkeit gegen null und die Anzahl der Versuche oder beim Urnenmodell die Anzahl der Ziehungen gegen unendlich strebt, aber so, dass  $q/s \cdot ns$  endlich bleibt. Die einleitend gestellten Bedingungen für das Modell für volle Kredibilität entsprechen den Postulaten der Poisson-Verteilung, indem die Wahrscheinlichkeit, dass während der Zeiteinheit 1 genau r Schäden eintreten, gegeben ist durch die Formel

$$P(r) = \frac{e^{-nq} (nq)^r}{r!}.$$
 (4)

Die vorher hergeleitete Wahrscheinlichkeit P könnte deshalb auch gefunden werden, indem man die Poisson-Verteilung durch die Normalverteilung approximiert.

Für einige Werte von P und k ergeben sich folgende Zahlen:

Höchstzulässige	Wahrscheinlichkeitsgrad $P$		
Abweichung $k$	99 %	95 %	90 %
vom Erwartungswert $nq$	Erforderliche	Anzahl von Sc	hadenfällen
$2\frac{1}{2}$ %	$10\;623$	$6\ 147$	$4\ 326$
5 %	$2\;656$	1 537	$1\ 082$
$7\frac{1}{2}^{\circ}_{0}$	1 180	683	481
10 %	664	384	271

Viele Kredibilitätstafeln in den Vereinigten Staaten für die Automobil-Haftpflichtversicherung basieren auf einem P von 90% und einem k von 5%, was 1082 Schäden entspricht. Die Zahl von 1082 Schadenfällen stellt eine anerkannte Masszahl für volle Kredibilität dar.

Bei der zur Zeit in der Schweiz herrschenden Schadenhäufigkeit in der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung von rund 22% würde dies heissen, dass unter den Annahmen P=90%, k=5%, volle Kredibilität gewährleistet ist, wenn in jeder Tarifklasse mindestens 4918 Jahresrisiken versichert sind.

Nun darf jedoch nicht vergessen werden, dass gerade die dritte Annahme im Modell keineswegs der Wirklichkeit entspricht, wurde doch für alle Schadenfälle die gleiche Schadenhöhe angenommen. Der vor einigen Jahren verstorbene amerikanische Versicherungsmathematiker Perryman hat vorgeschlagen, der Schadensummenverteilung in der Art Rechnung zu tragen, dass die Zahl der Schäden, die für volle Kredibilität erforderlich ist, mit dem Faktor  $1+s^2/d^2$  erhöht wird, wobei d und s Durchschnitt und Standardabweichung der Schadensummenverteilung darstellen. Auf Grund von-allerdings ziemlich alten-statistischen Untersuchungen in der Motorfahrzeugversicherung hat Perryman festgestellt, dass dieser Faktor ungefähr 6 für Personenschäden und ungefähr 4 für Sachschäden beträgt [5]. Für einen mittleren Faktor von 5 sind somit ungefähr 25 000 versicherte Fahrzeuge in jeder Tarifklasse notwendig, damit in der schweizerischen Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung volle Kredibilität gewährleistet wäre.

Aber auch die erste Voraussetzung im Modell ist, wie die Erfahrungen bewiesen haben, nicht erfüllt. Wäre nämlich die Schadenhäufigkeit für alle Fahrer die gleiche, so würde man von einem homogenen Bestand sprechen können. Nun steht aber auf Grund vielfältiger Untersuchungen auf der ganzen Welt fest, dass diese Voraussetzung nicht zutrifft und dass in der Automobilversicherung mit einem heterogenen Bestand gerechnet werden muss. Bekanntlich ergibt die negative Binomialverteilung eine bessere Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Schadenverlauf, als dies bei der Poisson-Verteilung der Fall ist. Die Ersetzung der Poisson-Hypothese durch die negative Binomialverteilung würde deshalb zu besseren Ergebnissen führen.

In den USA hat man auf die Verwirklichung beider Postulate verzichtet. Insbesondere die Einbeziehung einer Schadensummenverteilung würde die technische Auswertung ziemlich erschweren. Man weiss, dass

die lognormale Verteilung in den meisten Sachversicherungsgebieten eine gute Annäherung an empirische Schadensummenverteilungen ergibt, vor allem im Bereiche der hohen Schadensummen. Leider ist jedoch diese Funktion einer Faltung nicht sehr zugänglich. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre die Gammaverteilung als Schadensummenverteilung besonders geeignet, aber bis heute liegt noch keine Untersuchung vor, die beweist, dass eine Gammaverteilung die empirischen Ergebnisse in hinreichender Weise annähert, so dass sie in der Feuer- oder Automobilversicherung als Schadensummenverteilung verwendet werden könnte.

### 3. Teilkredibilität (Partial Credibility)

Der Vorteil der Hypothese einer Poisson-Verteilung liegt auch darin, dass die Wahrscheinlichkeit proportional zur Zeit ist. Das bedeutet, dass 100 000 Wagen in einem Jahr die gleiche Kredibilität aufweisen wie 10 000 Wagen in 10 Jahren. Man hätte es somit in der Hand, auch bei kleinen Beständen aussagekräftige Statistiken herzuleiten, indem die Beobachtungszeit passend gewählt wird.

Die Kredibilität eines bestimmten Beobachtungsmaterials wird ausgedrückt durch einen Faktor zwischen 0 und 1. Falls der Kredibilitätsfaktor 1 ist, bedeutet dies, dass volle Kredibilität vorhanden ist und dass die neuen statistischen Ergebnisse unabhängig vom bisherigen Tarif in vollem Umfang aussagekräftig sind. Falls andererseits der Kredibilitätsfaktor 0 ist, bedeutet dies, dass das vorliegende statistische Material für die Tarifierung nicht verwendet werden kann. Im allgemeinen wird der Kredibilitätsfaktor zwischen 0 und 1 schwanken. Er wird meist mit z bezeichnet.

Bei teilweiser Kredibilität wird die neue Prämie nach der folgenden Formel berechnet:

$$P^{\text{neu}} = z A + (1 - z) B. (5)$$

Dabei bedeutet A die Prämie, die sich auf Grund der neuesten statistischen Erhebung ergibt, und B die bisherige Prämie. Ist z=0, dann wird auch weiterhin mit der bisherigen Prämie gerechnet; ist z=1, dann erfolgt die Prämienberechnung ausschliesslich auf Grund der neuesten Statistik. Der Kredibilitätsfaktor z bedeutet deshalb nichts anderes als das «Gewicht», das einer neuen Statistik im Vergleich zu der Statistik, auf die der bisherige Tarif abstellt, zuerkannt wird.

Die Herleitung des Kredibilitätsfaktors z kann auf verschiedene Weise geschehen. Eine streng mathematische Ableitung stammt von A. Bailey [2] unter Verwendung des Theorems von Bayes. Meistens werden jedoch die Kredibilitätstafeln auf Grund von näherungsweisen Überlegungen aufgestellt. Das heute am meisten verwendete Verfahren beruht auf der folgenden Überlegung:

 $\operatorname{Mit} z_n$  sei der Kredibilitätsfaktor einer Stichprobe von n Elementen und  $\operatorname{mit} z_t$  derjenige einer Stichprobe von t Elementen bezeichnet. Dann gilt bei Annahme einer Normalverteilung, dass sich die Kredibilitäten dieser Stichproben wie die reziproken Werte ihrer Standardabweichungen verhalten.

Das heisst 
$$z_t : z_n = \frac{\sqrt{t}}{\sigma} : \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$
 (6)

oder  $\frac{z_t}{z_n} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}}.$  (6')

Wenn wir einem Stichprobenumfang von n Elementen volle Kredibilität zuordnen, dann erhalten wir, da  $z_n=1$ 

$$z_t = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}}.$$

Obschon diese Ableitung eigentlich nur gilt, wenn eine Normalverteilung vorliegt, wird dieses Verfahren seit Jahren mit Erfolg in der Praxis verwendet, obschon sich die zuständigen Versicherungsmathematiker bewusst sind, dass diese Annahme nur eine Näherung darstellt.

## 4. Praktische Anwendung

Abschliessend sei zur Illustration ein vereinfachtes hypothetisches Beispiel für die Anwendung der Kredibilitätstheorie angeführt:

Eine kleinere Gesellschaft beabsichtigt dank gutem Schadenverlauf, in der Motorfahrzeugversicherung nicht mehr den bisher verwendeten Gemeinschaftstarif anzuwenden, sondern einen eigenen Tarif herzuleiten.

Der bisherige Nettotarif einer bestimmten Tarifklasse beruhe auf folgenden Elementen:

durchschnittliche Schadenhäufigkeit: 22 % durchschnittlicher Schadenbetrag: 1000

Die Nettoprämie beträgt somit 220.

Im abgelaufenen Jahr wies die Schadenstatistik der Gesellschaft folgende Zahlen auf:

ganzjährige Risiken: $20\ 000$ gemeldete Schäden: $3\ 800$ geschätzte Schadensumme: $3\ 800\ 000$ Durchschnitt d: $1\ 000$ Standardabweichung s: $2\ 200$ 

In der Formel (5)

$$P^{\text{neu}} = zA + (1-z)B$$

sind somit

A = 190 («statistische» Prämie),

B = 220 (bisherige Prämie).

Aus Sicherheitsgründen entschliesst sich die Geschäftsleitung, für die Festsetzung der Parameter P und k vorsichtige Annahmen zu treffen, weshalb  $P=99\,\%$  und  $k=5\,\%$  als Ausgang zur Bestimmung der Zahl für volle Kredibilität dienen. Wie man der Tabelle auf Seite 48 entnehmen kann, ist volle Kredibilität bei Vorliegen von mindestens 2656 Schadenfällen gewährleistet.

Berücksichtigt man noch die Schadensummenstreuung nach dem Vorschlag von Perryman, dann beträgt die Zahl der notwendigen Schadenfälle für z=1

$$n = 2656 \left( 1 + \frac{s^2}{d^2} \right) = 15511.$$

Andererseits beträgt für die in Frage stehende Gesellschaft t=3800. Wir erhalten:

$$\mathbf{z}_t = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}} = 0.495.$$

Die neue Prämie ergibt sich somit zu

$$\begin{split} P^{\text{neu}} &= z\,A + (1\!-\!z)\,B \\ &= 0.495\cdot 190 + (1\!-\!0.495)\cdot 220 \\ P^{\text{neu}} &= 205.15\,. \end{split}$$

Auf Grund der Erkenntnisse der Kredibilitätstheorie könnte also die Gesellschaft ihren Tarif dank günstigem Schadenverlauf senken.

Zwar darf sie sich dazu nicht ausschliesslich auf ihre eigene Schadenerfahrung stützen, sondern nur zu 49,5 %, da ihr Bestand zu klein ist, um volle Kredibilität zu gewährleisten.

### 5. Zusammenhänge mit der sequentiellen Analyse

Die Sequenz-Analyse (sequential analysis), wie sie von Wald [6] entwickelt wurde, zeichnet sich dadurch aus, dass der Stichprobenumfang keine zum voraus bestimmte feste Grösse ist, sondern ihrerseits wieder eine Zufallsvariable darstellt. Der Vorteil der Sequenz-Analyse liegt darin, dass sie im Durchschnitt weniger Beobachtungen benötigt als andere, gleich zuverlässige Testverfahren mit vorgegebenem Stichprobenumfang. Sie bedeutet deshalb eine wertvolle Erweiterung der Testtheorie von Neyman und Pearson.

Es lässt sich leicht einsehen, dass von der Kredibilitätstheorie aus gewisse Querverbindungen zu den sequentiellen Testverfahren bestehen. Auch bei der Kredibilitätstheorie ist der Stichprobenumfang vorerst unbekannt; im Gegenteil, er stellt die gesuchte Grösse dar. Bei einem sequentiellen Test zur Prüfung der Hypothese H können für jeden Schritt des Tests drei Entscheide gefällt werden:

- 1. Die Hypothese H kann als erfüllt betrachtet werden;
- 2. die Hypothese H wird abgelehnt;
- 3. der Versuch wird um einen Schritt weitergeführt.

Trifft einer der beiden ersten Entscheide zu, dann wird der Test abgebrochen. Wird die letzte der Entscheidungsmöglichkeiten getroffen, dann wird der Test weitergeführt und um eine Beobachtung erweitert, wobei für diese neue Beobachtung wiederum die drei vorher dargelegten Entscheidungen getroffen werden können. Der Test wird bis zu dem Zeitpunkt weitergeführt, da die Hypothese H entweder angenommen oder abgelehnt wird.

Bühlmann [4] hat gerade kürzlich mit Hilfe der Theorie der sequentiellen Schätzverfahren die Herleitung von Prämienstufensystemen untersucht, wobei als Spezialfall die Hauptformel der Kredibilitätstheorie hergeleitet werden konnte. Damit ist auch angedeutet, dass zwischen der sequentiellen Analyse und der Kredibilitätstheorie Zusammenhänge bestehen, deren weitere Erforschung eine dankbare Aufgabe darstellt.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Ammeter Hans: Risikotheoretische Grundlagen der Erfahrungstarifierung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 61. Band, Heft 2, 1961.
- [2] Bailey Arthur: Credibility Procedures. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Volume XXXVII, 1950.
- [3] Bichsel Fritz: Erfahrungstarifierung in der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 64. Band, Heft 1, 1964.
- [4] Bühlmann Hans: Optimale Prämienstufensysteme. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 64. Band, Heft 2, 1964.
- [5] Perryman F.S.: Some Notes on Credibility. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Volume XIX, 1932.
- [6] Wald Abraham: Sequential Analysis. New York 1947.

### Résumé

Une introduction de la «Credibility Theory» est donnée, cette dernière étant fréquemment appliquée aux Etats-Unis.

Cette théorie envisage de déterminer le critère de la crédibilité d'un recueil de statistiques et les conclusions qui découlent d'une série d'observations concernant la conformité des tarifs appliqués.

## Summary

An introduction to the «Credibility Theory», which finds frequent recourse particularly in the United States, is given here. The theory seeks to determine the criteria for the credence that should be given to a certain body of experience and the inferences that can be drawn from a series of observations about the fitness of the tariffs applied.

#### Riassunto

Viene data un'introduzione della «Credibility Theory», la quale è frequentemente applicata negli Stati Uniti. Questa teoria vuole determinare il criterio della credibilità da una raccolta di statistiche e le conclusioni che derivano da una serie di osservazioni concernenti la conformità delle tariffe applicate.