Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 65 (1965)

Artikel: Globale Reserveberechnung auf Basis durchschnittlicher Dauern

Autor: Jecklin, Heinrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550727

Globale Reserveberechnung auf Basis durchschnittlicher Dauern

Von Heinrich Jecklin, Zürich

Zusammenfassung

Mit elementaren Überlegungen wird untersucht, wie bei einem Portefeuille gemischter Versicherungen eine einfache Globalberechnung der Reserven erfolgen kann, wenn der Versicherungsbestand nach bestimmten Gesichtspunkten in Gruppen unterteilt wird. Vorausgesetzt ist, dass für jede Gruppe ein durchschnittliches Eintrittsalter berechnet werden kann. Vorerst wird die Reserveberechnung für Gruppen gleicher abgelaufener Dauer auf Basis einer mittleren Versicherungsdauer diskutiert. Sodann werden Gruppen gleicher Versicherungsdauer supponiert und für diese die Reserven mit Hilfe einer mittleren abgelaufenen Dauer errechnet. Als Fernziel gewissermassen wird noch die Möglichkeit erwogen, die Totalreserve eines Portefeuilles mit einfachem Rechenaufwand zu bestimmen, wenn die Verteilungen von Eintrittsalter, Versicherungsdauer und abgelaufener Dauer bekannt sind.

Im Rahmen seiner verschiedenen Untersuchungen zur globalen Reserveberechnung hat Verfasser darauf hingewiesen, dass es möglich sein sollte, für ein Portefeuille gemischter Versicherungen verschiedenen Eintrittsalters und verschiedener Dauer bei Gruppierung nach gleicher abgelaufener Dauer t die Reserve unter Basierung auf ein mittleres Eintrittsalter ξ und eine durchschnittliche Versicherungsdauer ν gruppenmässig zu berechnen [1]. Wir nannten dieses Verfahren n-Methode. Die Totalreserve der einzelnen t-Gruppe ergäbe sich also nach der Formel

$$_tV_{\xi\overline{\nu}|} \sum S = \sum S \, _tV_{x\overline{n}|}, \tag{I}$$

wenn wir mit S die Summe der einzelnen Versicherung bezeichnen.

Bekanntlich reagiert die Reserve der gemischten Versicherung bei gegebener Dauer n nicht wesentlich auf eine nicht zu grosse Variation des Eintrittsalters x. Die Bestimmung eines mittleren Eintrittsalters ergibt daher kaum ein Problem, und man ermittelt ξ am einfachsten als quasiarithmetisches Mittel aus der Relation [2]

$$q_\xi \sum S = \sum q_x S,$$

oder, wenn die Makehamsche Konstante c bekannt, aus der Bestimmungsgleichung

$$c^\xi \sum S = \sum c^x S,$$

also

$$\xi = \frac{1}{\log c} (\log \sum c^x S - \log \sum S).$$

Wir nehmen in der Folge, soweit keine Unklarheit bestehen kann, an, dass alle Versicherungen auf eine gewisse Einheit lauten. Wenn dies in praxi nicht der Fall ist, so kann es durch Zerlegung der Versicherungen erreicht werden. Durch diese Annahme wird die Darstellung vereinfacht, indem nun

$$\sum S = N$$ gesetzt werden kann.

Für $c > 1$ ist c^x monoton konkav steigend, und nachdem für konkave Funktionen gilt

$$\tfrac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) > f\left(\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right),$$

ist

$$\tfrac{1}{2}(c^{x_1} + c^{x_2}) > c^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}.$$

Durch Iteration folgt hieraus

$$\frac{1}{N} \sum c^x > c^{\frac{1}{N} \Sigma x},$$

$$\log \sum c^x - \log N > \frac{\sum x}{N} \log c,$$

also

$$\xi = \frac{1}{\log c} (\log \sum c^x - \log N) > \frac{\sum x}{N}.$$

Das technische Durchschnittsalter ξ ist also stets höher als das arithmetische Mittel der Eintrittsalter x. Wenn ξ bestimmt ist, so ist die mittlere Dauer ν durch die globale Reserveformel (I) formal festgelegt. Praktisch dagegen ergeben sich für eine genaue Bestimmung von ν kaum überwindliche Schwierigkeiten [3]. Dass ν nicht etwa das arithmetische Mittel der Dauern n sein kann, ist leicht einzusehen.

Sehen wir von Sterblichkeit und Zins ab, so haben wir einen linearen Reserveanstieg

$$ {}_tV_{\overline{n}|} = 1 - \frac{n-t}{n} = \frac{t}{n}. $$

Für eine t-Gruppe ist mithin

$$ N\,{}_tV_{\overline{\nu}|} = N\frac{t}{\nu} = \sum\frac{t}{n} = t\sum\frac{1}{n}, $$

und, da t fest, folgt für ν die harmonische Mittelbildung

$$ \nu = \frac{N}{\sum\frac{1}{n}}. \tag{II} $$

Es ist auch an einem einfachen empirischen Beispiel zu ersehen, dass ν nicht arithmetisch aus den n gemittelt werden kann. Wir rechnen für sieben auf die Summeneinheit lautende Versicherungen mit verschiedener Dauer n gemäss folgender Aufstellung die 5. Reserve. Dabei soll im ersten Fall bei allen Versicherungen das Eintrittsalter einheitlich 30 Jahre, im zweiten Fall das Endalter einheitlich 70 Jahre betragen. Rechnungsgrundlagen SM 1939–44 2½%.

x	n	${}_5V_{\overline{xn}|}$	x	n	${}_5V_{\overline{xn}|}$
30	10	465,59 ‰	60	10	442,71 ‰
30	15	289,15 ‰	55	15	280,51 ‰
30	20	202,63 ‰	50	20	204,89 ‰
30	25	152,38 ‰	45	25	159,36 ‰
30	30	120,63 ‰	40	30	129,02 ‰
30	35	99,85 ‰	35	35	105,76 ‰
30	40	86,32 ‰	30	40	86,32 ‰

Der Reservedurchschnitt (arithmet. Mittel) beträgt im ersten Fall 202,36 ‰, im zweiten Fall 201,22 ‰, liegt also in der Nähe der Dauer 20, wogegen das arithmetische Mittel der Versicherungsdauern 25 Jahre beträgt. Das harmonische Mittel der n errechnet sich zu 20,37 und liegt offensichtlich nahe bei der durchschnittlichen Versicherungsdauer ν. Nachrechnung ergibt, dass das genaue ν etwas kleiner ist, es ist aber, wie wir noch zeigen werden, nicht möglich, eine gerichtete Ungleichung zwischen dem genauen ν und dem harmonisch aus den n gemittelten Wert anzugeben.

Vorerst jedoch suchen wir einen Weg zu genauerer Bestimmung von ν. Durch die Feststellung gewitzigt, dass schon mit recht einfachen Sterbegesetzen nicht durchzukommen ist, basieren wir uns auf die wohl einfachste Annahme der Sterbeformel von Dormoy mit

$$l_x = k s^x, \quad D_x = k s^x v^x = k(sv)^x, \quad \text{wobei } 0 < s < 1.$$

Dann ist

$$_tV_{\overline{xn}|} = 1 - \frac{1-(sv)^{n-t}}{1-(sv)^n} = \frac{1-(sv)^{-t}}{1-(sv)^{-n}}.$$

Die Reserve ist also in diesem Falle vom Eintrittsalter x unabhängig, was aber wenig zu bedeuten hat, nachdem ja die Reserve bei gegebenem n nicht stark von x abhängig ist. Setzen wir $(sv) = v^*$, so haben wir es einfach mit einer gewöhnlichen Sparversicherung zu tun mit dem Zinssatz $i^* = \frac{1+i}{s} - 1 > i$. Wir können also zur formelmässigen Vereinfachung $v^* = v$ setzen, und nachdem

$$\frac{1-v^{n-t}}{1-v^n} = 1 + (1-v^{-t})\frac{v^n}{1-v^n},$$

haben wir bei festem t für ν die Bestimmungsgleichung

$$N\frac{v^\nu}{1-v^\nu} = \sum \frac{v^n}{1-v^n},$$

$$\frac{1}{v^\nu} = r^\nu = 1 + \frac{N}{\sum \frac{v^n}{1-v^n}} = 1 + \frac{N}{\sum \frac{1}{r^n - 1}}$$

und hieraus folgt

$$\nu = \frac{1}{\log r} \log\left(1 + \frac{N}{\sum \frac{1}{r^n-1}}\right). \tag{III}$$

Nach zahlreichen empirischen Rechnungen zu schliessen, ist für den Wertevorrat der Praxis das gemäss der Formel (III) bestimmte ν kleiner als jenes nach (II), doch ist die Differenz gering. Man kann diesen Sachverhalt wie folgt plausibel machen:

Es sei

$$n_2 > n_1 > 0, \qquad H = \frac{2 n_1 n_2}{n_1 + n_2}, \qquad A = \frac{n_1 + n_2}{2}.$$

H ist also das harmonische, A das arithmetische Mittel von n_1 und n_2.

Für $r > 1$ ist r^x mit $x > 0$ eine konkave monoton steigende Funktion, daher

$$r^H < r^A < \tfrac{1}{2}(r^{n_1} + r^{n_2}).$$

Hieraus folgt

$$2r^H < r^{n_1} + r^{n_2},$$

und es gilt stets

$$r^H - r^{n_2} < r^{n_1} - r^H.$$

Man beachte, dass beide Seiten dieser Ungleichung negativ sind. Anderseits gilt offenbar

$$r^{n_1} - 1 < r^{n_2} - 1,$$

wobei beide Seiten positiv sind. Für die Plausibilität voriger Aussage wäre nun wünschenswert, dass

$$(r^H - r^{n_2})(r^{n_1} - 1) > (r^{n_1} - r^H)(r^{n_2} - 1).$$

Nun benötigen wir folgenden Satz:

Wenn vier Grössen gegeben sind, derart dass

$$a < b < 0 \quad \text{und} \quad 0 < c < d,$$

dann ist

$$ac > bd \quad \text{für} \quad |ac| < |bd|,$$
$$ac < bd \quad \text{für} \quad |ac| > |bd|.$$

Wenn die vorhin angeführte Ungleichung richtig sein soll, ist also nötig, dass

$$|(r^H - r^{n_2})(r^{p_1} - 1)| < |(r^{n_1} - r^H)(r^{n_2} - 1)|,$$

oder

$$(r^{n_2} - r^H)(r^{n_1} - 1) < (r^H - r^{n_1})(r^{n_2} - 1).$$

Wir können dies als Bestimmungsgleichung für r auffassen, und es folgt dann daraus, dass

$$r^H > \frac{2r^{n_1+n_2} - (r^{n_1} + r^{n_2})}{(r^{n_1} + r^{n_2}) - 2}$$

sein müsste. In Tabelle I am Schluss ist für $r = 1{,}035$ die Rechnung für zahlreiche Wertepaare n_1 und n_2 durchgeführt, und es zeigt sich, dass diese Ungleichung durchwegs erfüllt ist. Für die in der Praxis vorkommenden Werte dürfen wir daher setzen

$$(r^H - r^{n_2})(r^{n_1} - 1) > (r^{n_1} - r^H)(r^{n_2} - 1),$$

$$\{(r^H - 1) - (r^{n_2} - 1)\}(r^{n_1} - 1) > \{(r^{n_1} - 1) - (r^H - 1)\}(r^{n_2} - 1),$$

und daraus in einfacher Umformung

$$r^H - 1 > \frac{2(r^{n_1}-1)(r^{n_2}-1)}{(r^{n_1}-1)+(r^{n_2}-1)},$$

$$r \exp \frac{2}{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}} - 1 > \frac{2}{\dfrac{1}{r^{n_1}-1}+\dfrac{1}{r^{n_2}-1}}.$$

Hieraus folgt durch Iteration

$$r \exp \frac{N}{\sum \dfrac{1}{n}} - 1 > \frac{N}{\sum \dfrac{1}{r^n-1}},$$

$$\frac{N}{\sum \dfrac{1}{n}} \log r > \log\left(1+\frac{N}{\sum \dfrac{1}{r^n-1}}\right),$$

$$\frac{N}{\sum \dfrac{1}{n}} > \frac{1}{\log r} \log\left(1+\frac{N}{\sum \dfrac{1}{r^n-1}}\right),$$

wobei die linke Seite die durchschnittliche Dauer ν gemäss Formel (II), die rechte Seite den Wert ν nach Formel (III) darstellt. Wir wiederholen, dass dieses Ergebnis nicht mathematisch bewiesen, sondern lediglich im Hinblick auf den Wertevorrat der Praxis plausibel ist und dort zutreffend sein dürfte. Auf jeden Fall aber wird das gemäss (II) gewonnene ν nur unwesentlich vom ν gemäss (III) differieren.

Was nun das Prozedere in der Praxis anbelangt, so ergibt sich eine denkbar einfache Möglichkeit, sofern nur für jede Police eine Hilfszahl zur Bestimmung des mittleren Eintrittsalters ξ jeder t-Gruppe notiert ist. Die globale Reserve einer Gruppe errechnet sich nach Formel (I) zu

$$\sum S\, {}_tV_{x\overline{n}|} = {}_tV_{\xi\overline{\nu}|} \sum S,$$

wobei ν bei gegebenem ξ mit den für die Reserveberechnung benutzten Grundlagen interpolatorisch aus dem Rentenwert $\ddot{a}_{\xi\overline{\nu}|}$ erhalten werden kann. Letzterer ist, in Analogie zu (II), offenbar

$$\ddot{a}_{\xi\overline{\nu}|} = \frac{\sum S}{\sum \dfrac{S}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}},$$

und nachdem $P_{\overline{xn|}} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{xn|}}} - d$, und diese Nettoprämie für jede Police bekannt ist, hat man für die praktische Ermittlung

$$\ddot{a}_{\overline{\xi\nu|}} = \frac{\sum S}{\sum S\,(P_{\overline{xn|}} + d)} = \frac{\sum S}{\sum S\,P_{\overline{xn|}} + d \sum S}\,.$$

Ein kleines ad-hoc-Beispiel ist in Tabelle II am Schluss zusammengestellt.

Erstmals hat wohl Lidstone vorgeschlagen [4], die Reserven eines Portefeuilles gemischter Versicherungen in globaler Weise genähert auf Basis eines mittleren technischen Eintrittsalters ξ zu berechnen. Bei seiner Z-Methode werden die Reserven nach Gruppen gleicher restlicher Dauer $n-t$ prospektiv ermittelt. Bei der von uns proponierten t-Methode [5] werden die Reserven nach Gruppen gleicher abgelaufener Dauer t retrospektiv berechnet. Bei der n-Methode, zu der wir vorstehend einige weitere Gedanken beigesteuert haben, braucht man ausser dem mittleren Alter ξ noch die mittlere Versicherungsdauer ν, worauf die Reserven ebenfalls nach Gruppen gleicher abgelaufener Dauer t, jedoch prospektiv bestimmt werden. Es ist nun verlockend, der Frage nachzugehen, ob es nicht ebenso leicht möglich ist, nach Gruppen gleicher Versicherungsdauer n aufzuteilen und die Reserve der einzelnen n-Gruppe mit Hilfe einer mittleren abgelaufenen Dauer τ festzustellen. Man könnte ein solches Prozedere als τ-Methode bezeichnen. Die Sache gestaltet sich in der Tat sehr einfach. Wenn das mittlere Eintrittsalter ξ gegeben, und es möglich ist, eine mittlere abgelaufene Dauer τ ohne Schwierigkeit zu bestimmen, so wird analog zu Formel (I) gelten

$${}_{\tau}V_{\overline{\xi n|}} \sum S = \sum S\;{}_{t}V_{\overline{xn|}}. \tag{IV}$$

Über ξ sind keine weiteren Worte zu verlieren. Was τ anbetrifft, gehen wir vorerst auch wieder von einem linearen Reserveanstieg aus

$${}_{t}V_{\overline{n|}} = 1 - \frac{n-t}{n} = \frac{t}{n},$$

und es gilt für eine n-Gruppe, d.h. für Versicherungen gleicher Dauer n, lautend auf die Versicherungseinheit

$$N\,{}_{\tau}V_{\overline{n|}} = N\,\frac{\tau}{n} = \sum \frac{t}{n} = \frac{1}{n} \sum t,$$

und da n fest, folgt für τ die gewöhnliche arithmetische Mittelbildung

$$\tau = \frac{\sum t}{N}. \tag{V}$$

Ein besserer Wert für τ wird sich ergeben, wenn wir, in Vernachlässigung der Sterblichkeit, von der Reserveformel für die Sparversicherung ausgehen

$$_tV_{\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}.$$

Es muss dann für die n-Gruppe gelten

$$\left(1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{x-\tau}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right) \sum S = \sum S \left(1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right),$$

und weil n fest

$$\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} \sum S = \sum S \, \ddot{a}_{\overline{n-t}|},$$

$$\frac{1}{d}(1 - v^{n-\tau}) \sum S = \sum S \frac{1}{d}(1 - v^{n-t}),$$

$$(r^n - r^\tau) \sum S = \sum S (r^n - r^t),$$

$$r^\tau \sum S = \sum S r^t,$$

$$r^\tau = \frac{\sum S r^t}{\sum S};$$

also schliesslich

$$\tau = \frac{1}{\log r} \log \frac{\sum S r^t}{\sum S}. \tag{VI}$$

Bei der praktischen Durchführung wäre demnach für eine n-Gruppe die Summe jeder Police mit dem Faktor r^t, entsprechend ihrer abgelaufenen Dauer t, zu multiplizieren und die Summe dieser Produkte durch das Summentotal der Gruppe zu dividieren. Alsdann ergibt sich τ in einer einfachen logarithmischen Operation. Dass die Methode numerisch befriedigen kann, zeigen wir nachfolgend in Tabelle III an einem ad hoc zusammengestellten Rechenbeispiel.

Wie übrigens leicht zu zeigen, muss τ gemäss (VI) stets grösser sein als nach (V). Denn da r^t für $t > 0$ eine konkav steigende Funktion, gilt für zwei Werte t_1 und t_2

$$r^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)} < \tfrac{1}{2}(r^{t_1} + r^{t_2}),$$

und in Iteration $$r^{\frac{1}{N}\Sigma t} < \frac{1}{N}\sum r^t \quad \text{also} \quad \frac{\sum t}{N} < \frac{1}{\log r}\log\frac{\sum r^t}{N}.$$

Es erhebt sich nun noch die Frage, ob es nicht möglich ist, die Reserve eines Portefeuilles gemischter Versicherungen ganzumfänglich global zu bestimmen als

$$_{\tau}V_{\xi\overline{\nu}|}\sum S = \sum S\,_{t}V_{x\overline{n}|},$$

d.h. auf Basis eines mittleren Eintrittsalters ξ, einer mittleren Versicherungsdauer ν und einer mittleren abgelaufenen Dauer τ. Es handelt sich also um das in der Literatur nicht unbekannte Problem, die Totalreserve eines Portefeuilles, wenigstens genähert, ohne grossen Rechenaufwand angeben zu können, wenn nur die Verteilungen der in der Formel der Einzelreserve auftretenden Parameter bekannt sind. Auf Grund der vorstehenden prospektiven Formel ist eine Lösung kaum möglich, denn die bei (III) und (VI) für die Ermittlung von ν und τ gemachten Voraussetzungen sind gegenseitig unverträglich; entweder durchschnittliches n bei festem t oder umgekehrt. Aussichtsreicher scheint es, von der retrospektiven Formel auszugehen, weil da die Versicherungsdauer n nicht explizit auftritt. Allerdings ist es dann wohl unumgänglich, mit zwei verschiedenen τ-Werten zu rechnen, wie folgt

$$\sum S\,_{t}V_{x\overline{n}|} = \frac{N_\xi - N_{\xi+\tau_1}}{D_{\xi+\tau_1}}\sum P_{x\overline{n}|}S - \frac{M_\xi - M_{\xi+\tau_2}}{D_{\xi+\tau_2}},$$

wobei die τ-Werte zu ermitteln sind als

$$\tau_1 = \frac{\sum t P_{x\overline{n}|}S}{\sum P_{x\overline{n}|}S}, \quad \tau_2 = \frac{\sum tS}{\sum S}.$$

Benötigt würde demnach für jede Police eine einzige Hilfszahl zur Festlegung des Alters ξ. Wenn das Portefeuille nach Zugangsjahren geordnet ist, stehen die Prämien- und Summen-Totale der t-Gruppen bereits fest, sie sind noch mit dem entsprechenden t zu multiplizieren und die Produkte zu addieren, also eine sehr einfache Arbeit. Das in Tabelle IV nachstehend gerechnete Beispiel kann zwar nicht ganz befriedigen, immerhin ist das Resultat soweit ermutigend, dass es zu weiteren Untersuchungen anregen könnte. Möglich, dass Basierung auf zwei verschiedene ξ-Werte, wie dies Ruch für die t-Methode vorgeschlagen hat [6], von Nutzen wäre.

Literatur

[1] *Jecklin, H.:* Reserveberechnung nach t-Gruppen. MVSVM Bd. 57, Heft 1, 1957.

[2] – Grundsätzliche Bemerkungen zur t-Methode. MVSVM Bd. 49, Heft 2, 1949.

[3] – Untersuchungen zur n-Methode der Reserveberechnung. MVSVM Bd. 58, Heft 1, 1958.

[4] *Lidstone, G. J.:* Some Remarks on the Valuation of Endowment Assurances in groups. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 34, 1899.

[5] *Jecklin, H.:* Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Acquisitionsjahres. Aktuarske Vedy, Bd. 6, Nr. 1, 1936.

– Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t-Methode. MVSVM Bd. 42, Heft 1, 1942.

[6] *Ruch, H.:* Eine Variation der t-Methode. MVSVM Bd. 48, Heft 2, 1948.

Anhang

Tabelle I

n_1	n_2	H	$a = r^{n_1+n_2}$	$b = r^{n_1} + r^{n_2}$	$\frac{2a-b}{b-2}$	r^H
10	20	13,33	2,8068	3,4004	1,5804	1,5820
10	30	15	3,9593	4,2174	1,6691	1,6753
10	40	16	5,5849	5,3699	1,7211	1,7340
10	50	16,67	7,8781	6,9955	1,7539	1,7742
10	60	17,14	11,1128	9,2887	1,7749	1,8033
20	30	24	5,5849	4,7966	2,2789	2,2833
20	40	26,67	7,8781	5,9490	2,4835	2,5037
20	50	28,57	11,1128	7,5747	2,6281	2,6721
20	60	30	15,6757	9,8679	2,7305	2,8068
30	40	34,29	10,7432	6,6499	3,1907	3,2531
30	50	37,5	15,6757	8,3917	3,5921	3,6330
30	60	40	22,1121	10,6849	3,8618	3,9593
40	50	44,44	22,1122	9,5442	4,5969	4,6126
40	60	48	31,1914	11,8374	5,1381	5,2136
50	60	54,54	41,7210	13,1046	6,3341	6,5290

Tabelle II

Gleiches Portefeuille-Beispiel wie MVSVM Bd. 57, Seite 34

Rechnungsgrundlagen SM 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$

x	n	S	$\frac{1}{\ddot{a}_{x\overline{n}\rceil}}$	$\frac{S}{\ddot{a}_{x\overline{n}\rceil}}$
30	25	10 000	0,055408	554,08
28	22	20 000	0,060213	1 204,26
35	20	50 000	0,065369	3 268,45
40	20	30 000	0,066705	2 001,15
45	15	60 000	0,083841	5 030,46
39	21	20 000	0,064237	1 284,74
50	20	40 000	0,072316	2 892,64
43	22	100 000	0,063991	6 399,10
41	19	50 000	0,069428	3 471,40
45	20	10 000	0,066865	668,65
		390 000		26 774,93

$$\ddot{a}_{\xi\overline{\nu}\rceil} = \frac{390\,000}{26\,774{,}93} = 14{,}5659,$$

$\xi = 42{,}5$ (s. Bd. 57, Seite 23),

$\nu = 19{,}5$ (aus Rentenwerttabelle interpoliert).

t	${}_tV_{\xi\overline{\nu}\rceil}$	${}_tV_{\xi\overline{\nu}\rceil}\sum S$	$\sum S\,{}_tV_{x\overline{n}\rceil}$ (Bd. 57, S. 34)	Δ %
5	209,47 ‰	81 693.–	81 835,3	— 0,17
10	443,34 ‰	172 902.–	173 367,5	— 0,27
15	710,41 ‰	277 060.–	278 136,2	— 0,39

Tabelle III

Versicherungsdauer durchwegs $n = 20$

Rechnungsgrundlagen SM 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$

Hilfszahl $g(x)$ siehe MVSVM Bd. 49, S. 178

x	t	S	r^t	$S\,r^t$	${}_tV_{x\overline{n}\rceil}$ ‰	$S\;{}_tV_{x\overline{n}\rceil}$	$g(x)$	$\frac{S\,g(x)}{1000}$
30	3	10 000	1,0769	10 769	118,34	1 183,4	3,43	34,3
30	5	30 000	1,1314	33 942	202,63	6 078,9	3,43	102,9
30	10	50 000	1,2801	64 005	433,52	21 676,0	3,43	171,5
30	15	20 000	1,4483	28 966	696,44	13 928,8	3,43	68,6
35	5	40 000	1,1314	45 256	203,98	8 159,2	4,19	167,6
35	8	60 000	1,2184	73 104	338,66	20 319,6	4,19	251,4
35	12	20 000	1,3449	26 898	534,07	10 681,4	4,19	83,8
35	18	50 000	1,5597	77 985	871,66	43 583,0	4,19	209,5
40	2	30 000	1,0506	31 518	79,25	2 377,5	5,50	165,0
40	7	10 000	1,1887	11 887	292,37	2 923,7	5,50	55,0
40	12	20 000	1,3449	26 898	532,01	10 640,2	5,50	110,0
40	16	40 000	1,4845	59 380	749,29	29 971,6	5,50	220,0
		380 000		490 608		171 523,3		1639,6

$$g(\xi) = \frac{1639{,}6}{380} = 4{,}31\,, \qquad \xi = 35{,}6\,,$$

$$\tau = \frac{1}{\log r}\log\frac{490\,608}{380\,000} = 10{,}35\,, \qquad n - \tau = 9{,}65\,,$$

$$\ddot{a}_{\xi\overline{n}\rceil} = 15{,}2686\,,$$

$$\ddot{a}_{\xi+\tau,\overline{n-\tau}\rceil} = 8{,}3811\,,$$

$${}_\tau V_{\xi\overline{n}\rceil} = 451{,}09\,‰\,,$$

$${}_\tau V_{\xi\overline{n}\rceil}\sum S = 171\,414{,}2\,, \quad \sum S\;{}_tV_{x\overline{n}\rceil} = 171\,523{,}3\,, \quad \varDelta = -0{,}6\,‰\,.$$

Tabelle IV

Rechnungsgrundlagen SM 39/44 à 2½ %

$\xi = 42{,}5$ (wie bei Tabelle II)

x	n	$\frac{S}{1000}$	$P_{x\overline{n}\rvert}$ ‰	a			b			c		
				t	r^t	${}_tV_{x\overline{n}\rvert}$ ‰	t	r^t	${}_tV_{x\overline{n}\rvert}$ ‰	t	r^t	${}_tV_{x\overline{n}\rvert}$ ‰
30	25	10	31,02	8	1,2184	253,54	10	1,2801	325,28	15	1,4483	520,17
28	22	20	35,82	6	1,1597	217,52	3	1,0769	104,32	14	1,4130	566,46
35	20	50	40,98	5	1,1314	203,98	12	1,3449	534,07	2	1,0506	78,56
40	20	30	42,31	10	1,2801	432,48	7	1,1887	292,37	8	1,2184	337,94
45	15	60	59,45	3	1,0769	167,87	15	1,4483	1000,—	6	1,1597	348,41
39	21	20	39,85	12	1,3449	500,76	14	1,4130	599,26	5	1,1314	192,84
50	20	40	47,93	7	1,1887	291,58	2	1,0506	80,02	10	1,2801	427,92
43	22	100	39,60	15	1,4483	610,06	8	1,2184	300,85	3	1,0769	107,47
41	19	50	45,04	14	1,4130	679,81	6	1,1597	263,48	12	1,3449	566,88
45	20	10	44,49	2	1,0506	79,21	5	1,1314	204,07	7	1,1887	291,64

$$ {}_\tau V_{\xi\overline{\nu}\rvert} = \frac{N_\xi - N_{\xi+\tau_1}}{D_{\xi+\tau_1}} \sum P_{x\overline{n}\rvert} S - \frac{M_\xi - M_{\xi+\tau_2}}{D_{\xi+\tau_2}}\,, $$

$$ \tau_1 = \frac{1}{\log r} \log \frac{\sum r^t P_{x\overline{n}\rvert} S}{\sum P_{x\overline{n}\rvert} S}\,. $$

$$ \tau_2 = \frac{1}{\log r} \log \frac{\sum r^t S}{\sum S}\,. $$

t-Verteilung	τ_1	τ_2	$\xi+\tau_1$	$\xi+\tau_2$	${}_\tau V_{\xi\overline{\nu}\rvert} \sum S$	$\sum {}_tV_{x\overline{n}\rvert} S$	Δ %
a	9,3	9,7	51,8	52,2	157 492,6	157 598,4	— 0,07
b	9,2	8,9	51,7	51,4	159 324,5	161 299,5	— 1,24
c	6,9	6,9	49,4	49,4	115 228,5	114 482,7	+ 0,65

Résumé

L'auteur étudie à l'aide de considérations élémentaires comment – pour un portefeuille d'assurances mixtes – il est possible de calculer les réserves de façon simple et globale, lorsque le portefeuille est divisé en groupes selon certains critères. On suppose que pour chaque groupe un âge d'entrée moyen puisse être déterminé. Tout d'abord, l'auteur examine le calcul des réserves sur la base d'une durée d'assurance moyenne pour des groupes de même durée écoulée. Ensuite, il suppose des groupes de même durée d'assurance et calcule pour eux les réserves à l'aide d'une durée écoulée moyenne. Comme but final, l'auteur envisage encore la possibilité de déterminer la réserve totale d'un portefeuille à l'aide de calculs simples lorsque les répartitions de l'âge d'entrée, de la durée d'assurance et de la durée écoulée sont connues.

Summary

It is investigated on elementary considerations how a simple, comprehensive computation of reserves can be made for an endowment portfolio when the business in force is divided into groups according to specific aspects. The assumption is that an average age at entry can be determined for each group. At first, on the basis of a mean term of insurance, the computation of reserves for groups with identical expired period is discussed. Next, groups with the same term of insurance are envisaged, and for these the reserves are computed with the help of a mean expired period. Rather as a remote objective, the possibility of determining the total reserves of a portfolio by a simple process of calculation is reflected upon, when the distribution of age at entry, the term of insurance and the time expired are known.

Riassunto

Con concetti elementari viene esaminato come può aver luogo un semplice calcolo globale delle riserve di un portafoglio di assicurazioni miste, se tale portafoglio è suddiviso in gruppi secondo punti di vista prestabiliti. La premessa è che per ogni gruppo possa essere calcolata un'età di entrata media. Innanzitutto viene discusso il calcolo della riserva per gruppi con la medesima durata decorsa, in base a una durata assicurativa media. Dopo sono supposti dei gruppi con la medesima durata assicurativa. Per quali vengono calcolate le riserve con l'ausilio di una durata media decorsa. In un certo modo, quale meta finale viene considerata la possibilità di calcolare semplicemente la riserva totale di un portafoglio, se sono note le ripartizioni dell'età di entrata, della durata assicurativa e della durata decorsa.