

# Eine Bemerkung zu Bichsels Herleitung der bedingten zukünftigen Schadenhäufigkeit einer Polya-Verteilung

Autor(en): **Philipson, Carl**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **64 (1964)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966973>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eine Bemerkung zu Bichsels Herleitung der bedingten zukünftigen Schadenhäufigkeit einer Polya-Verteilung

Von Carl Philipson, Stockholm

### Zusammenfassung

Im Anschluss an die Arbeit von Bichsel im letzten Heft der «Mitteilungen» weist der Autor auf einige zusätzliche allgemeine Überlegungen hin.

1. Sei  $U(\lambda)$  eine Verteilungsfunktion von  $\lambda$ , die vom Parameter  $t$  unabhängig ist, und

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dU(\lambda) / n!. \quad (1)$$

Hier wird  $U(\lambda)$  die Strukturfunktion von  $P_n(t)$  genannt (Bichsel, [1]<sup>1)</sup>, nennt aber  $dU(\lambda)$  die Strukturfunktion).

Falls der Mittelwert von  $U(\lambda)$  gleich  $q \neq 1$  ist, wie in Bichsels Entwicklung, kann man durch Einführen einer neuen Integrationsvariablen  $q\lambda$  und durch Veränderung des Massstabes von  $t$   $P_n(t)$  so transformieren, dass der Parameter operativ wird. Ein Prozess, für welchen die Zahl der Ereignisse in  $(0, t)$  bei festem  $t$  nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung (1) verteilt ist, bekommt durch diese Transformation eine Intensitätsfunktion in kanonischer Form. Ein Prozess, definiert nach (1), wird ein zusammengesetzter Prozess im engeren Sinne genannt. Einen solchen Prozess im weiteren Sinne erhält man, falls die Strukturfunktion von  $t$  abhängen kann. Wenn speziell die Strukturfunktion in der Form  $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(t) G^{m*}(\lambda)$  vorliegt, wo die Potenz  $m^*$  für  $m > 0$  die  $m$ -te Faltung der Verteilungsfunktion  $G(\lambda)$  bedeutet

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf die Referenznummer im Literaturverzeichnis am Ende dieses Aufsatzes.

und für  $m = 0$  gleich 1 ist, spricht man von einem stationären oder nichtstationären zusammengesetzten Poisson-Prozess.

2. Die bedingte Fortsetzung eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses im engeren Sinne wurde von Lundberg 1940 analysiert [2]. Er hat unter anderem die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für das Eintreffen von Ereignissen im Intervalle  $(s, s + t)$  bei gegebener Zahl  $\mu$  der Ereignisse im Intervalle  $(0, s)$  hergeleitet. Es wird gezeigt, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit durch Verschiebung der 0-Punkte von  $\nu$  und  $t$  in der Form von (1) geschrieben werden kann mit der Strukturfunktion

$$U^*(\lambda; \mu, s) = \frac{\int_0^\lambda y^\mu e^{-sy} dU(y)}{\int_0^\infty y^\mu e^{-sy} dU(y)}, \quad (2)$$

wo  $U(\lambda)$  die Strukturfunktion des ursprünglichen Prozesses darstellt.

Der Mittelwert von  $U^*(\lambda, \mu, s)$  ist durch

$$\int_0^\infty \lambda dU^*(\lambda, \mu, s) = p_\mu(s) \quad \text{gegeben,} \quad (3)$$

wo  $p_\mu(s)$  die Intensitätsfunktion des ursprünglichen Prozesses bedeutet. Auch werden von Lundberg die höheren Momente von  $U^*(\lambda, \mu, s)$  hergeleitet. In [3] hat der Verfasser dieser Bemerkung über Lundbergs Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten berichtet und sie zu einer Folge von bedingten Fortsetzungen erweitert. Auch wurde die Theorie auf stationäre oder nichtstationäre zusammengesetzte Poisson-Prozesse ausgedehnt. Auch in diesem Falle konnte die bedingte Wahrscheinlichkeit in der Form der absoluten Wahrscheinlichkeit des ursprünglichen Prozesses mit modifizierter Strukturfunktion ausgedrückt werden. Ferner wurde die erweiterte Theorie von Lundberg mit einer entsprechenden Erweiterung der Theorie von Ammeter [4] verglichen.

3. Im Spezialfalle, wo  $dU(\lambda) = \left(\frac{1}{b}\right)^{q/b} \frac{\lambda^{q/b-1} e^{-\lambda/b}}{\Gamma(q/b)} d\lambda$ , hat Bichsel

in [1] die Funktion  $U^*(\lambda, \mu, s)$  und ihren Mittelwert  $\alpha(\mu, s)$  hergeleitet sowie die Parameter  $b^*$ ,  $q^*$  von  $U^*(\lambda, \mu, s)$  berechnet. Nach den Bemerkungen über die Transformation in 1 hier oben können wir, ohne

Beeinträchtigung der Allgemeinheit,  $q = 1$  annehmen. Bichsel findet, dass

$$\alpha(\mu, t) = (q + nb)/(1 + bt),$$

was für  $q = 1$  die Intensitätsfunktion für den Spezialfall in der kanonischen Form  $(1 + nb)/(1 + bt)$  definiert. In dem von Bichsel behandelten Fall wird der Prozess ein Polya-Prozess genannt. Somit ist das von ihm hergeleitete Resultat ein Spezialfall von (3) für den Polya-Prozess.

4. Delaporte [5], [6] hat für die Motorfahrzeughaftpflichtversicherung eine Theorie, unabhängig von Lundberg, aufgestellt, die von einer ähnlichen Formel wie (2) ausgeht. Auch wurden von Delaporte wie von Bichsel die theoretischen Prämien in Tabellenform gegeben. Wie Bichsel macht Delaporte die Annahme, dass die mittlere Schadenhäufigkeit für jede einzelne Versicherung unabhängig von der Zeit sei. Nach der Ansicht des Verfassers dieser Bemerkung ist diese Annahme ganz unrealistisch. In der Tat hängt das Risiko von der Kalenderzeit (von klimatischen Verschiedenheiten, von Verschiedenheiten des allgemeinen Verkehrs und von Verschiedenheiten des Geldwertes unter anderem bedingt) und auch von der nach der Unterzeichnung der ersten Versicherung verflossenen Zeit (eigentlich vom Alter des Fahrzeugzustandes) ab. Diese Verhältnisse wurden vom Verfasser 1963 ausführlich behandelt [7].

In den Vorbemerkungen seines Aufsatzes hat Bichsel gesagt, dass die Arbeit nicht die Ergebnisse eigener Untersuchungen enthält. Der Zweck sollte nur eine kurze Orientierung über eine aktuelle Anwendung der mathematischen Statistik sein. Trotzdem hat der Verfasser dieser Bemerkung es für passend gehalten, etwas über frühere Untersuchungen auf demselben Gebiet zu berichten. Auch möchte der Verfasser hervorheben, dass wegen der Bemerkung im letzten Teil von Abschnitt 4 stationäre oder nichtstationäre zusammengesetzte Poisson-Prozesse für die Kraftwagenversicherung als Modelle besser geeignet sind als der Polya-Prozess. Es wird auf [3] hingewiesen, wo, wie oben gesagt, die Theorie der bedingten Fortsetzung für solche Modelle behandelt wird.

## Literaturverzeichnis

- [1] *Bichsel Fritz*: Erfahrungstarifizierung in der Motorfahrzeughaftpflichtversicherung. *Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math.*, 64-1, 1964.
- [2] *Lundberg Ove*: On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Insurance. Inaug. Diss., Uppsala, 1940 (Neue Auflage, 1964).
- [3] *Philipson, Carl*: The Transformed Parameter of Compound Poisson Processes and the Effect of an Increase in that Parameter. *Trans. XVIIth Int. Congr. Act., London 1964*.
- [4] *Ammeter Hans*: A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities. *Skand. Akt. Tidskr.*, 1948.
- [5] *Delaporte Pierre*: L'estimation statistique progressive du risque individuel d'accident et la tarification de l'assurance automobile. *Int. Inst. Stat. 34<sup>e</sup> session*, Ottawa, 1963.
- [6] *Delaporte Pierre*: Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque. Coll. de l'Astin, Trieste, septembre 1963.
- [7] *Philipson Carl*: Einige Bemerkungen zur Bonusfrage in der Kraftfahrversicherung. *Bl. deutsch. Ges. Vers.-Math.* VI-2, 1963.

---

## Résumé

L'auteur mentionne quelques réflexions générales en supplément au travail de Bichsel paru dans le dernier fascicule du *Bulletin*.

## Summary

In connection with the work of Bichsel in the last issue of the «Mitteilungen», the author points out certain additional general considerations.

## Riassunto

A complemento del lavoro del Bichsel, apparso nell'ultimo opuscolo delle «Comunicazioni», l'autore richiama l'attenzione su alcune riflessioni complementari di carattere generale.