Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 64 (1964)

Artikel: Optimale Prämienstufensysteme

Autor: Bühlmann, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966970

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Optimale Prämienstufensysteme

Von Hans Bühlmann, Zürich

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie die Theorie der sequentiellen Schätzverfahren die Konstruktion von Prämienstufensystemen ermöglicht. Im Rahmen dieser Theorie wird der «wahre Prämiensatz» als der zu schätzende Parameter aufgefasst, die beobachteten Schadenfälle des Einzelrisikos als Realisationen von Zufallsvariabeln, deren Verteilungsfunktionen von diesem Parameter abhängen.

Die konstruierten Prämienstufensysteme werden besonders dann sinnvoll, wenn über der Parametergesamtheit eine a priori Verteilung angenommen wird. Bemerkenswert ist auch der Umstand, dass mit der Theorie der sequentiellen Schätzverfahren die Hauptformel der «Credibility Theory» hergeleitet werden kann.

Die Anwendungsmöglichkeit der Theorie wird an einem Beispiel im Detail demonstriert.

1. Vom festen zum variabeln Prämiensatz

Prämienrevisionsvorschläge aus verschiedenen Ländern empfehlen vor allem in der Autohaftpflichtbranche einen für den individuellen Versicherten je nach Schadenverlauf variierenden Prämiensatz. Usanzgemäss spricht man zwar – beispielsweise in der Automobilversicherung – noch oft von einem festen Prämiensatz abzüglich eines variabeln Bonus (und neuerdings auch zuzüglich eines variabeln Malus), eine Ausdrucksweise, die aber – wenn auch in ihrer psychologischen Wirkung auf den Versicherten möglicherweise verschieden – so doch sachlich mit dem Begriff «variabler Prämiensatz» identisch ist.

Mit dem Übergang vom traditionell festen Prämiensatz auf einen innerhalb einer Prämienskala variierenden Prämiensatz wird – wie es auf den ersten Blick erscheint – ein entscheidender Grundsatz der Risikotarifierung durchbrochen, nämlich der, dass alle Bedingungen für die Übernahme eines Risikos durch den Versicherer zu Beginn der

Versicherungsdauer *unabänderlich* festzulegen seien. Eine verfeinerte Interpretation dieses Grundsatzes lässt uns aber erkennen, dass ihm in der Tat auch entsprochen wird, falls *die Regeln*, nach welchen der Prämiensatz des übernommenen Risikos variiert werden soll, bei Versicherungsabschluss unabänderlich festgelegt werden. Ein solches System von Regeln, welches auf Grund der *Schadenanfälligkeit des Einzelrisikos* (plus evtl. weiterer char. Merkmale) den Prämiensatz für eben dieses Einzelrisiko *schrittweise* festlegt, wollen wir ein *Prämienstufensystem* nennen.

Wo steht nun der Aktuar in dieser Entwicklung? Er ist zunächst einmal mit einem komplett neuen Problem konfrontiert. Bisher ging es darum, für ein gegebenes Risiko die richtige *feste Prämie* zu finden; jetzt soll er für dieses Risiko ein *optimales Prämienstufensystem angeben*. Wie findet man ein solches optimales Prämienstufensystem? Was heisst optimal? Es sind der Fragezeichen viele, welche sich dem Versicherungsmathematiker hier aufdrängen. Und so mehren sich denn gerade jetzt die wissenschaftlichen Publikationen, welche auf das eine oder andere Fragezeichen Antwort geben. Von der Fülle der Forschungsergebnisse auf diesem Gebiet profitierend [1]), möchte ich an dieser Stelle den Versuch wagen, eine *allgemeine* theoretische Formulierung des Prämienstufenproblems zu geben, um dann die theoretische Lösung dieses Problems aufzuzeichnen.

2. Terminologie zur Beschreibung eines Prämienstufensystems

Mit dem Schritt vom festen zum variabeln Prämiensatz beschreiten wir aktuarielles Neuland. Kein Wunder, dass uns für bestimmte Phänomene in diesem Neuland die sprachliche Formulierung noch fehlt oder zum mindesten nicht geläufig ist. Versuchen wir es einmal!

Halten wir zunächst fest, dass zu einem Prämienstufensystem folgende Elemente gehören:

– eine Skala von *möglichen* Prämiensätzen (möglichen Prämienstufen): $\mathfrak{S}$;

---

[1]) Insbesondere erwähnt seien die Arbeiten von Delaporte [1–3] und Ove Lundberg [4].

- Folgen von Beobachtungen über die Schadenanfälligkeit jedes Einzelrisikos in jeder Versicherungsperiode: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ (X_i = Schadenbelastung des Einzelrisikos in der Versicherungsperiode i);
- eine Folge von Regeln R_n ($n = 1, 2, \ldots$), wobei jedes R_n für die n-te Versicherungsperiode einen bestimmten Wert in $\mathfrak{S}$ als Funktion der Schadenanfälligkeiten in den früheren Versicherungsperioden, d.h. in Abhängigkeit von $X_1, \ldots, X_{n-1}$, festlegt.

In konzentrierter mathematischer Symbolik würden wir sagen, dass ein Prämienstufensystem P durch das Tripel ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$, R) definiert sei

$$P = \{\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R\},$$

wobei

$\mathfrak{S}$ = Skala möglicher Prämiensätze (Prämienstufen) gleich *Wertevorrat* an Prämiensätzen (Prämienstufen),

$\mathfrak{X}$ = Gesamtheit aller möglichen Beobachtungsfolgen ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) von Schadenanfälligkeiten des Einzelrisikos,

R = ($R_1, R_2, \ldots, R_m, \ldots$) Folge von Funktionen R_n, welche allen Beobachtungsfolgen ($X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$) einen Wert in $\mathfrak{S}$ zuordnen.

Man kann sich nun die Frage stellen, wie bei *gegebenem* Wertevorrat an Prämiensätzen ($\mathfrak{S}$) und *gegebenen* Beobachtungsmöglichkeiten der Schadenanfälligkeiten ($\mathfrak{X}$) die Folge der Funktionen R_n ($n = 1, 2, \ldots$) – in einem noch genauer festzulegenden Sinne «optimal» – gewählt werden soll. Das ist das Problem des optimalen Prämienstufensystems.

3. Beispiele zum Begriff des Prämienstufensystems

A. *Der Schweizer UDK Haftpflichttarif 1963 für Personenwagen*

Beschreibung:

i) Dieser Tarif basiert auf folgendem Prämienstufensystem:

Prämienstufe	in Prozent der Grundprämie
21	
20	280
19	

Prämienstufe	in Prozent der Grundprämie
18	
17	200
16	
15	
14	140
13	
12	
11	
10	100
9	
8	
7	
6	
5	80
4	
3	
2	60
1	

ii) Die Grundprämie wird auf Grund kollektiver Merkmale, wie z. B. Steuer-PS des Fahrzeuges, festgelegt.

iii) Der Neuhalter beginnt auf Stufe 9.

iv) Nach jedem schadenfreien Jahr sinkt man im folgenden Jahr auf der Skala um 1 Stufe; pro Schadenfall steigt man im folgenden Jahr auf der Skala um 3 Prämienstufen an.

Anwendung unserer Terminologie:

Wie drückt sich dieses Prämienstufensystem in unserer im vorhergehenden Kapitel festgelegten Terminologie aus? Mit andern Worten, welches Tripel $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$ definiert den UDK-Haftpflichttarif 1963? Es gilt offenbar

$\mathfrak{S}$ = Menge der Prämienstufen 1 bis 21,

$\mathfrak{X}$ = Gesamtheit aller ganzzahligen endlichen Folgen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, X_i bezeichnet dabei die Anzahl Unfälle des individuellen Risikos im Jahre i,

R_n = ordnet jedem $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ einen Wert in $\mathfrak{S}$ zu, nämlich

$R_1 = 9,$

$$R_2 = 9 - 1 + 3X_1 + \min(1; X_1) = \begin{array}{l} 8 \text{ falls } X_1 = 0, \\ 12 \text{ falls } X_1 = 1, \\ 15 \text{ falls } X_1 = 2, \ldots; \end{array}$$

allgemein

$$R_n = 9 - (n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} [3X_i + \min(1; X_i)],$$

wobei zusätzlich noch zu beachten bleibt, dass, falls R_n nach dieser Formel kleiner als 1 resp. grösser als 21 zu wählen wäre, der Randwert 1 resp. 21 einzusetzen ist.

B) *Rückversicherung auf Spread-Loss-Basis*

Beschreibung:

Ein Schadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag eines Automobilhaftpflichtportefeuilles sehe vor, dass

i) der Prämiensatz für die Rückversicherungsdeckung zwischen 3 und 8 Prozent des Bruttoprämienvolumens des rückversicherten Portefeuilles betrage.

ii) Innerhalb dieser Minimum-Maximum-Spanne werde der Rückversicherungsprämiensatz nach der Formel gerechnet

$$\text{Rückversicherungs-prämiensatz} = \frac{100}{75} \cdot \frac{\text{Exzedentenschäden letzte 5 Jahre}}{\text{Bruttoprämienvolumen letzte 5 Jahre}}.$$

Anwendung unserer Terminologie:

$\mathfrak{S}$ = Menge aller Prämiensätze zwischen 3 und 8 % (im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel haben wir es hier mit einer *unendlichen, stetig zusammenhängenden* Menge zu tun).

$\mathfrak{X}$ = Gesamtheit aller endlichen Folgen von Burning-Costs $(X_1, \ldots, X_n)$ resultierend aus dem 1., 2., ..., n-ten Versicherungsjahr nach Abschluss des Vertrages (Burning-Cost ist hier als «terminus technicus» für den Quotienten Exzedentenschäden durch Bruttoprämienvolumen verstanden).

Bei jährlich gleichbleibendem Prämienvolumen heissen dann die Formeln für R_n

$$R_n = \frac{X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_{n-5}}{5},$$

wobei wiederum die Grenzen 3 resp. 8 % einzuhalten sind. (Bei variierenden Prämienvolumina ist der Durchschnitt in der Formel für R_n durch ein gewichtetes Mittel zu ersetzen.)

Die Beispiele liessen sich selbstverständlich in beliebiger Fülle wiederholen. Insbesondere wäre es interessant, auch die folgenden Fälle in unserer Terminologie zu formulieren:

- Gewinnbeteiligungsklauseln für Gruppenversicherungen (Beteiligung am Sterblichkeitsgewinn).
- Gewinnbeteiligungen für Rückversicherungsverträge.

Die beiden hier angeführten Exempel werden aber auch so die Anpassungsfähigkeit des Tripels $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$ an jegliche Situation, wo Prämiensätze nach einem Stufensystem variiert werden sollen, zum mindesten plausibel erscheinen lassen.

4. Formulierung des Prämienstufenproblems

Halten wir zunächst noch einmal fest, dass es bei einem Prämienstufensystem darum geht, aus den für ein bestimmtes Einzelrisiko beobachteten Schadenbelastungen $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ den für die n-te Periode zu wählenden *Prämiensatz* zu bestimmen (Wahl eines Elementes aus $\mathfrak{S}$ auf Grund von Beobachtungen in $\mathfrak{X}$).

Die Interpretation der X_k als Zufallsvariabeln ist naheliegend. (Wir benutzen hier das gleiche Symbol für Zufallsvariabeln und beobachtete Werte von Zufallsvariabeln.) Der für die n-te Periode zu wählende Prämiensatz ist dann ein *Funktional* der Zufallsvariabeln X_n. Wir können somit die Aufgabe eines Prämienstufensystems auch so beschreiben, dass es auf Grund der Beobachtungen von $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ein bestimmtes Funktional der Zufallsvariabeln X_n möglichst gut schätzen soll. In der Praxis wird man sich vor allem für folgende Funktionale interessieren:

a) Erwartungswert,
b) Median,
c) Streuung,
d) Funktionen von *a)*, *b)* und *c)*.

Um technische Erschwerungen nach Möglichkeit zu umgehen, sei im folgenden nur der Fall *a)* weiterverfolgt, womit – in dieser eingeengten Sicht – die Aufgabe des Prämienstufensystems schliesslich dazu reduziert wird, aus den Beobachtungen von $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, den *Erwartungswert* $E(X_n) = \vartheta_n$ der Zufallsvariabeln X_n möglichst gut zu schätzen.

(Einfachheitshalber sei ebenfalls angenommen, dass die ϑ_n beliebige reelle Zahlwerte in einem bestimmten – möglicherweise unendlichen – Intervall annehmen können.)

Falls nun aber die Beobachtungen $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ hinsichtlich des Erwartungswertes $E(X_n) = \vartheta_n$ überhaupt informative Bedeutung haben sollen, dann müssen die Verteilungsfunktionen *aller* Zufallsvariabeln X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ in Relation zueinander stehen. In dieser Arbeit wird diese Relation durch die Arbeitshypothese H postuliert.

H) «Alle X_k sind gleichverteilt und voneinander unabhängig».

Risikotechnisch besagt diese Arbeitshypothese nichts anderes, als dass das Prämienstufensystem nur während einer solchen Zeitspanne zur Anwendung kommen soll, als dem Einzelrisiko ein «gleichbleibendes Risikoverhalten» zugesprochen werden kann.

Damit sind wir zu folgender abstrakter Formulierung des Prämienstufensystems gelangt

P) «Gegeben eine Folge von gleichverteilten unabhängigen Zufallsvariabeln (Schadenbelastungen in der n-ten Versicherungsperiode) $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$. Man bestimme eine Folge von Schätzfunktionen $R_n(X_1, \ldots, X_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, welche den (gemeinsamen) „wahren" Erwartungswert $E(X_k) = \vartheta$ sukzessive und – in einem noch festzusetzenden Sinne – optimal approximieren. ϑ ist dabei ein bestimmter Wert aus der Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller möglichen Prämiensätze.»

5. Die Risikofunktion eines Prämienstufensystems

Jedes Prämienstufensystem der hier untersuchten Art versucht (siehe Formulierung P im vorhergehenden Kapitel) den wahren Erwartungswert ϑ der Belastungen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sukzessive

(d. h. durch die Folge $R_1, R_2, \ldots$) zu approximieren. Je näher diese «Approximationen» beim wahren Erwartungswert ϑ liegen, desto besser das Prämienstufensystem oder negativ ausgedrückt, je mehr die Approximationen vom wahren Erwartungswert ϑ entfernt sind, desto schlechter das Prämienstufensystem.

Es liegt nahe, den Fehler jeder Approximation R_n durch eine nicht negative Fehlerfunktion F der Differenz $R_n - \vartheta$ (ϑ = wahrer Erwartungswert) zu messen.

Der Approximationsfehler jedes einzelnen Approximationsschrittes k wird dann

$$F(R_k - \vartheta)$$

und der totale Fehler von N Approximationsschritten

$$\sum_{k=1}^{N} F(R_k - \vartheta).$$

Beliebte Wahlen für F sind die Funktionen

a) $$F(R_k - \vartheta) = (R_k - \vartheta)^2,$$

b) $$F(R_k - \vartheta) = |R_k - \vartheta|.$$

Als *Risikofunktion $V_\vartheta(N, R)$ eines Prämienstufensystems* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$ definieren wir dann den *erwarteten totalen Fehler* für N Approximationsschritte in Funktion des *wahren* Parameters.

Definition:

$$V_\vartheta(N, R) = \sum_{k=1}^{N} \text{Erwartungswert } F(R_k - \vartheta) = \sum_{k=1}^{N} E[F(R_k - \vartheta)].$$

(Dabei ist die Operation «Erwartungswert» als «Erwartungswert, falls ϑ der *wahre* Prämiensatz ist», zu verstehen.)

Weiter *definieren wir,* dass eine Folge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ gegenüber $R_1^+, R_2^+, \ldots, R_n^+, \ldots$ ein *gleichmässig besseres* System sei, falls

$$E[F(R_k - \vartheta)] \leqq E[F(R_k^+ - \vartheta)] \text{ für alle } \vartheta \text{ und } k.$$

Es gilt dann insbesondere

$$V_\vartheta(N, R) \leqq V_\vartheta(N, R^+) \text{ für alle } \vartheta \text{ und } N.$$

Eine Wahl der Folge $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \ldots, \tilde{R}_n, \ldots$ wäre in diesem Sinne *gleichmässig optimal,* falls sie gegenüber jeder möglichen Folge $R_1^+, \ldots, R_n^+, \ldots$ ein gleichmässig besseres System liefert.

6. Optimales Prämienstufensystem bei bekannter Portefeuillestruktur (schlechthin «optimales Prämienstufensystem» genannt)

Gleichmässig optimale Prämienstufensysteme im Sinne der Definition im vorhergehenden Kapitel gibt es – ausser in trivialen Fällen – normalerweise nicht, es sei denn die Fülle der zur Konkurrenz zugelassenen Prämienstufensysteme werde durch eine zusätzliche Forderung eingeschränkt, wie z. B.

Erwartungstreue; d. h. $E(R_k) = \vartheta$ für alle k

oder *Invarianz unter Permutation der Beobachtungen;* d. h. alle R_n sind symmetrische Funktionen der $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Statt diese in der klassischen mathematischen Statistik vorgezeichneten Gedankengänge (der Erwartungstreue oder der Invarianz) aufzunehmen, ist es beim Problem des Prämienstufensystems *sicher angezeigt,* den in eine andere Richtung weisenden Überlegungen der «Bayesianer» zu folgen. Diese betrachten die Verteilungsparameter (in unserem Falle ϑ) nicht als bestimmte feste Grössen, sondern *ebenfalls* als *Zufallsvariable.* Im Falle des Prämienstufenproblems ist aber für den Versicherer der Parameter in der Tat eine je nach Struktur des Versicherungsportefeuilles innerhalb bestimmter Grenzen mit bestimmten Glaubwürdigkeiten variierende Grösse. A priori-Verteilung von ϑ (d. h. «Verteilung *vor* Beobachtung des Schadenverlaufes des Einzelrisikos») nennen wir dann im Sinne Bayesscher Terminologie diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche für ein Portefeuille (oder Teile desselben) die Häufigkeit (oder auch nur subjektiv die Glaubwürdigkeit) bestimmter Parameterwerte innerhalb dieses Portefeuilles beschreibt. Einfachheitshalber wollen wir für diese a priori-Verteilung auch den Namen «Portefeuillestrukturverteilung» oder kurz «Strukturverteilung» gebrauchen und diese mit dem Symbol $S(\vartheta)$ bezeichnen.

$$W(N, R) = \int V_\vartheta(N, R)\, dS(\vartheta)$$

heisst dann das *mittlere Portefeuillerisiko des Prämienstufensystems* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$. Im Gegensatz zur im vorhergehenden Kapitel beschriebenen *Risikofunktion* $V_\vartheta(N, R)$ ist das *mittlere Portefeuillerisiko* bei festem N nur noch *eine Zahl, nicht mehr eine Funktion.*

Weiter definieren wir:

$(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$ ist ein *optimales Prämienstufensystem*, falls das *mittlere Portefeuillerisiko* $W(N, R)$ minimal ist im Sinne

$$W(N, R) = \inf_{R^+} W(N, R^+) \text{ für alle } N,$$

wobei das infimum über alle möglichen Prämienstufensysteme $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R^+)$ zu bilden ist.

7. Existenz und Konstruktion optimaler Prämienstufensysteme

Im Gegensatz zu den in Kapitel 5 definierten «gleichmässig optimalen Prämienstufensystemen», deren Existenz nur in Spezialfällen gesichert ist, gilt nach einem allgemeinen Satz von Wald und Wolfowitz [5–6], dass die durch das minimale mittlere Portefeuillerisiko gekennzeichneten *optimalen Prämienstufensysteme* (im Sinne der Definition des letzten Kapitels und in dem Sinne, wie wir den Begriff optimales Prämienstufensystem von hier an immer verwenden) immer existieren. Die explizite Konstruktion eines optimalen Prämienstufensystems hängt dann allerdings von der gewählten Fehlerfunktion F ab.

Bevor wir zu dieser Konstruktion übergehen, sei jedoch noch die folgende Symbolik festgelegt:

$P(X_1, X_2, \ldots, X_n/\vartheta)$ = n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung bei gegebenem Parameterwert ϑ,

$S(\vartheta)$ = Strukturverteilungsfunktion (a priori-Verteilung von ϑ),

$\bar{P}(X_1, \ldots, X_n) = \int P(X_1, X_2, \ldots, X_n/\vartheta)\, dS(\vartheta)$ = mittlere n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung,

$dP(\vartheta/X_1, \ldots, X_n) = \dfrac{P(X_1, \ldots, X_n/\vartheta)\, dS(\vartheta)}{\bar{P}(X_1, \ldots, X_n)}$ = a posteriori Verteilung von ϑ.

Mit Hilfe dieser Symbolik ausgedrückt, geht es bei der Konstruktion eines optimalen Prämienstufensystems darum, den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{N} \int\int F(R_k - \vartheta)\, dP(X_1, \ldots, X_{k-1}/\vartheta)\, dS(\vartheta)$$

durch geschickte Wahl der Funktionen $R_k(X_1, \ldots, X_{k-1})$ zu minimalisieren.

Nun gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\int\int F(R_k-\vartheta)\,dP(X_1,\ldots,X_{k-1}/\vartheta)\,dS(\vartheta)$$
$$=\int\int F(R_k-\vartheta)\,dP(\vartheta/X_1,\ldots,X_{k-1})\,d\bar{P}(X_1,\ldots,X_{k-1})\,.$$

Da F als nicht negativ vorausgesetzt wurde, ist die rechte Seite genau dann minimal, falls für jede Wahl der $X_1,\ldots,X_{k-1}$ und jedes k (rigoroserweise beizufügen: «ausser einer Nullmenge») das Integral

$$\int F[R_k(X_1,\ldots,X_{k-1})-\vartheta]\,dP(\vartheta/X_1,\ldots,X_{k-1}) \quad \text{minimal ist.}$$

Damit haben wir die Konstruktionsregel

R) «R_k sei so gewählt, dass das „a posteriori"-Risiko von ϑ, d.h. das Integral

$$\int F[R_k(X_1,\ldots,X_{k-1})-\vartheta]\,dP(\vartheta/X_1,\ldots,X_{k-1})$$

möglichst klein wird.»

Für die Wahl $F(R_k-\vartheta)=(R_k-\vartheta)^2$ führt die Konstruktionsregel R) zum System

$\mathrm{R_I}$) $\quad R_k(X_1,\ldots,X_{k-1})=\int\vartheta\,dP(\vartheta/X_1,\ldots,X_{k-1})=$ a posteriori Erwartungswert von ϑ.

Für die Wahl $F(R_k-\vartheta)=|R_k-\vartheta|$ finden wir das System

$\mathrm{R_{II}}$) $$R_k(X_1,\ldots,X_{k-1})=C$$

mit $\int_{-\infty}^{C} dP(\vartheta/X_1,\ldots,X_{k-1})=\frac{1}{2}$ (a posteriori Median von ϑ).

8. Die richtige Tarifierung des Einzelrisikos

Unsere im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Konstruktionsregeln führen zu Prämienstufensystemen, welche über ein *gegebenes Portefeuille gemittelt* den kleinstmöglichen erwarteten Abweichungsfehler garantieren. Wegen eben dieser Eigenschaft haben wir sie optimale Prämienstufensysteme genannt. Erwarten wir aber – zunächst einmal rein intuitiv – von einem «optimalen» Prämienstufensystem nicht noch eine weitere Eigenschaft, nämlich die, dass dem *Einzelrisiko* «asymptotisch» (d.h. bei zunehmendem Beobachtungsmaterial immer näherliegend) der *richtige* (d.h. dem Einzelrisiko entsprechende) Prämiensatz zugeordnet werde?

Die allgemeine Beantwortung der Frage, ob das für alle nach der Konstruktionsregel R gebildeten Prämienstufensysteme gelte, ist noch offen. Hingegen gilt für den Spezialfall der quadratischen Fehlerfunktion (und somit der Konstruktionsregel R_1) der Satz von Doob [7], dass

$$R_n \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X_1)$$

oder in Worten, dass die Folge der Approximationen fast sicher gegen den Erwartungswert des Einzelrisikos konvergiere. Die Ausdrucksweise «fast sicher» (a.s.) ist dabei als Umschreibung dafür anzusehen, dass die Konvergenzmenge *bezüglich der a priori Verteilung* $S(\vartheta)$ vom Masse 1 sein soll. *Für die Praxis bedeutet dieser komplizierte mathematische Sachverhalt, dass die Approximationen den richtigen Prämiensatz für das Einzelrisiko treffen, vorausgesetzt, dass dieser nicht a priori aus der Gesamtheit der möglichen Prämiensätze ausgeschlossen wurde.*

Mit dieser Feststellung wollen wir nun die allgemeine Theorie der Prämienstufensysteme verlassen und uns in einem Spezialfall einmal ein Bild darüber machen, was diese Theorie leisten kann. Insbesondere hoffen wir, durch die explizite Behandlung dieses Spezialfalles die sehr abstrakte (und mangels besseren Wortschatzes oft auch mühsame) Begriffswelt der Prämienstufensysteme etwas beleben zu können.

9. Ein Spezialfall

Im Rahmen unserer allgemeinen Beschreibung eines Prämienstufensystems mittels des Tripels $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, R)$ sei der hier behandelte Spezialfall der folgende

$\mathfrak{S}$: Gesamtheit der «Prämiensätze» $\vartheta \varepsilon [0, \infty)$,

$\mathfrak{X}$: Folgen von gleichverteilten unabhängigen Poisson-Variabeln mit (unbekanntem) Erwartungswert ϑ,

R: Folge von Funktionen $R_n(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, welche ϑ schrittweise approximieren sollen.

Anschaulich könnte man diesen hier diskutierten Spezialfall als Modell für irgendein Prämienstufensystem interpretieren, welches lediglich die *Schadenhäufigkeit, nicht aber die Schadenhöhe* approximieren soll. (Das Prämienstufensystem, welches dem UDK Haftpflichttarif 1963 zugrunde liegt, wäre ein *praktisches* Beispiel dafür.)

Legen wir nun noch fest, dass

a) die Fehlerfunktion $F(\vartheta, R_k)$ die quadratische Abweichung $(\vartheta - R_k)^2$ und

b) die Strukturverteilungsfunktion $S(\vartheta)$ eine Γ-Verteilungsfunktion mit Dichte

$$s(\vartheta) = \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-c\vartheta} \vartheta^{\gamma-1}, \qquad \begin{array}{l} \gamma > 0 \\ c > 0 \\ \vartheta \geqq 0 \end{array}$$

sein sollen, dann haben wir alle Voraussetzungen getroffen, um im Sinne unserer Theorie rechnen zu können. Bevor wir das tun, sei lediglich noch festgestellt, dass selbstverständlich die den hier diskutierten Spezialfall definierenden Annahmen auch mit einem Seitenblick auf kalkülmässige Handlichkeit gewählt worden sind. Trotzdem (oder vielleicht noch besser: *gerade deswegen*) glauben wir, dass der hier diskutierte Spezialfall für den Praktiker in vielen Fällen brauchbar ist. Wir lassen aber die Diskussion, wann und wo diese «Brauchbarkeit» angenommen werden kann, bewusst beiseite, geht es uns doch in erster Linie darum, die *allgemeine Theorie der Prämienstufensysteme* zu illustrieren.

10. Spezialfall: Konstruktion des optimalen Prämienstufensystems

Für den in Kapitel 9 beschriebenen Spezialfall wissen wir, dass die Konstruktionsregel

R_1) $R_k(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \int \vartheta \, dP(\vartheta / X_1, \ldots, X_{k-1})$ (a posteriori Erwartungswert von ϑ)

zum *optimalen Prämienstufensystem* führt.

Es gilt nach den gemachten Voraussetzungen (und unter Verwendung der in Kapitel 7 eingeführten Schreibweise)

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n / \vartheta) = \frac{\vartheta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{-n\vartheta}}{\prod_{i=1}^{n} (X_i!)},$$

$$dS(\vartheta) = \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-c\vartheta} \vartheta^{\gamma-1} \, d\vartheta, \qquad \text{für } \vartheta \geqq 0,$$

$$\overline{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{c^\gamma}{\prod_{i=1}^{n} (X_i!)\, \Gamma(\gamma)} \int \vartheta^{\Sigma X_i + \gamma - 1} e^{-(n+c)\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$dP(\vartheta / X_1, \ldots, X_n) = \frac{\vartheta^{\Sigma X_i + \gamma - 1} e^{-(n+c)\vartheta}\, d\vartheta}{\int_0^\infty \vartheta^{\Sigma X_i + \gamma - 1} e^{-(n+c)\vartheta}\, d\vartheta}$$

(d.h. ebenfalls eine Γ-Verteilung mit $\gamma' = \gamma + \sum X_i$, $c' = c + n$)

und somit

$$\int_0^\infty \vartheta\, dP(\vartheta / X_1, \ldots, X_n) = \frac{\gamma + \sum_{i=1}^{n} X_i}{c + n}.$$

Unter Verwendung der Konstruktionsregel R_I) wissen wir somit, dass das Prämienstufensystem optimal ist, falls die Funktionen R_k ($k = 1, 2, \ldots$) wie folgt gewählt werden

$$\boxed{R_{k+1} = \frac{\gamma + \sum_{i=1}^{k} X_i}{c + k} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)}$$ [1]

Man sieht sofort

a) das hier konstruierte Prämienstufensystem ordnet jedes Einzelrisiko asymptotisch richtig ein (was wir ja im Kapitel 8 für beliebige nach R_I konstruierte Prämienstufensysteme nachgewiesen haben); d.h.

$$R_k(X_1, \ldots, X_{k-1}) \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X_1) \text{ für wachsendes } k,$$

b) $\int R_k(X_1, \ldots, X_{k-1})\, d\overline{P}(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \gamma / c =$ (über das Portefeuille mit Strukturverteilung $S(\vartheta)$ gemittelter Prämiensatz),

und aus unserem Konstruktionsprinzip – das auf dem Postulat des minimalen über das Portefeuille gemittelten Abweichungsrisikos basiert – gilt natürlich auch

c) $\int\int [R_k(X_1, \ldots, X_{k-1}) - \vartheta]^2\, dP(X_1, X_2, \ldots, X_{k-1} / \vartheta)\, dS(\vartheta) = \text{Min.}$

---

[1]) Diese Formel findet man auch in einer Arbeit von F. Bichsel [8].

Als Beweisandeutungen für diese erwähnten Eigenschaften mögen genügen

für *a)* Da $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\text{a. s.}} E(X_1)$ (starkes Gesetz der grossen Zahlen),

gilt auch

$$\frac{\sum X_i + \gamma}{n + c} \xrightarrow{\text{a. s.}} E(X_1),$$

für *b)*

$$\int\int \frac{\sum X_i + \gamma}{n + c} \, dP(X_1, \ldots, X_n/\vartheta) \, dS(\vartheta) =$$

$$\int \frac{n\vartheta + \gamma}{n + c} \, dS(\vartheta) = \frac{n\frac{\gamma}{c} + \gamma}{n + c} = \frac{\gamma}{c},$$

für *c)* aus Ableitung des Konstruktionsprinzips.

Auf mathematische Symbolik verzichtend, können wir somit sagen, dass wir ein Prämienstufensystem konstruiert haben, welches

a) jedem Einzelrisiko asymptotisch den richtigen Prämiensatz zuordnet,

b) in *jedem Approximationsschritt* (also auch schon ganz zu Beginn, wo der Mechanismus des Prämienstufensystems erst anläuft) *im Mittel über das ganze Portefeuille* den richtigen Prämiensatz wählt (Biasfreies Prämienstufensystem im Mittel über das Portefeuille),

c) zu jeder Zeit unter allen möglichen Prämienstufensystemen im erwarteten Mittel über das Portefeuille minimale quadratische Abweichung garantiert.

(Optimales Prämienstufensystem nach Definition in Kapitel 6.)

In der Tat ein Prämienstufensystem, das alle nur wünschbaren guten Eigenschaften hat.

11. Lohnen sich a priori-Vorurteile?

Ein gewichtiger Einwand stellt sich gegen die hier vorgeschlagene Methode zur Konstruktion optimaler Prämienstufensysteme, nämlich der:

Die Strukturfunktion $S(\vartheta)$ spielt eine sehr entscheidende Rolle bei der Bestimmung optimaler Prämienstufensysteme, wird sie doch zur Mittelung des Fehlerrisikos über das ganze Portefeuille verwendet. Was passiert nun, falls die Strukturfunktion *falsch ist*, d.h. dem Portefeuille, das sie beschreiben sollte, gar nicht entspricht? Zur Untersuchung dieser Frage nehmen wir im folgenden an:

$S(\vartheta)$ sei die Strukturfunktion, welche wir bei der Bestimmung des Prämienstufensystems nach Regel R_I) benutzt haben,

$T(\vartheta)$ sei die richtige Strukturfunktion,

und präzisieren unsere Fragestellung wie folgt:

a) Wie ist unser Prämienstufensystem zu konstruieren, wenn wir (aus Angst davor, falsche Voraussetzungen zu machen) nicht mit der Strukturfunktion $S(\vartheta)$ arbeiten wollen?

b) Wann ist das unter *a)* gefundene Prämienstufensystem besser als das nach der Regel R_I und unter Benutzung von $S(\vartheta)$ konstruierte, vorausgesetzt, dass $T(\vartheta)$ die wahre Strukturfunktion ist?

Kurz gesagt: Lohnen sich vorgefasste Meinungen über ein Portefeuille, unter Umständen auch wenn sie falsch sind? Die Antwort wird – wie wir vermuten – lauten: Ja, falls das Vorurteil nicht «*allzu falsch*» ist. Die folgenden Berechnungen – die skizzierten Gedankengänge ausschliesslich im Spezialfall nach Kapitel 9) verfolgend – sollen quantitativ festhalten, was unter «allzu falsch» zu verstehen ist.

Im Spezialfall (von Kapitel 9) beantworten wir die Frage *a)* wie folgt:

a) *Ohne Verwendung der Strukturfunktion* $S(\vartheta)$ wird die Wahl der Approximationen R_n am besten durch die Funktionen R'_n geschehen.

$$R'_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1}.$$

(Diese Wahl der R'_n definiert das *gleichmässig optimale* Prämienstufensystem unter allen erwartungstreuen Systemen – vgl. Kapitel 5.)

b) Andererseits (wie in Kapitel 10 abgeleitet) finden wir *unter Verwendung der Strukturfunktion* $S(\vartheta)$ als *optimale* Approximationen

$$R_n = \frac{\gamma + \sum_{i=1}^{n-1} X_i}{c + n - 1}.$$

Somit ergeben sich – falls $T(\vartheta)$ (mit Erwartungswert $E(\vartheta)$ und Streuung $\mathrm{Var}(\vartheta)$) die wahre Portefeuillestrukturfunktion ist – die folgenden *mittleren Portefeuillerisiken* (wie in Kapitel 6 definiert):

Für *a)*

$$W(N, R') = \sum_{k=2}^{N} \frac{E(\vartheta)}{k-1} \quad \text{(für } k = 1 \text{ nicht definiert!)}.$$

Für *b)*

$$W(N, R) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{c^2}{(c+k-1)^2} \left\{ \mathrm{Var}(\vartheta) + \left[\frac{\gamma}{c} - E(\vartheta) \right]^2 \right\} + \left(\frac{k-1}{c+k-1} \right)^2 \frac{E(\vartheta)}{k-1} \right].$$

Die Frage nach den «sich lohnenden Vorurteilen» kann demnach wie folgt beantwortet werden:

Die Verwendung der Strukturfunktion $S(\vartheta)$ (obwohl falsch!) lohnt sich immer, falls

$$W(N, R) \leqq W(N, R') \quad \text{für alle } N,$$

oder – wie man durch elementare Umformungen nachprüft – falls

$$\frac{\mathrm{Var}(\vartheta) + \left[\frac{\gamma}{c} - E(\vartheta) \right]^2}{E(\vartheta)} \leqq \frac{2}{c} + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n,$$

somit, falls

$$\text{S)} \qquad \frac{\mathrm{Var}(\vartheta) + \left[\frac{\gamma}{c} - E(\vartheta) \right]^2}{E(\vartheta)} \leqq \frac{2}{c}.$$

Wir wollen diese Bedingung S die *Strukturbedingung* nennen und diese jetzt noch etwas genauer diskutieren.

Man bemerkt, dass die Strukturbedingung immer erfüllt ist, falls die zur Konstruktion des Prämienstufensystems gewählte Strukturfunktion $S(\vartheta)$ mit der *wahren* Strukturfunktion $T(\vartheta)$ *identisch* ist.

Dann gilt nämlich

$$E(\vartheta) = \frac{\gamma}{c},$$

$$\mathrm{Var}(\vartheta) = \frac{\gamma}{c^2},$$

und somit ist die linke Seite der Strukturbedingung gerade gleich $1/c$ (und folglich sicher kleiner als $2/c$). Wir können somit die Strukturbedingung auch so interpretieren, dass sich die Konstruktion mittels der Strukturfunktion $S(\vartheta)$ immer lohnt, falls der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{Var}(\vartheta) + \left[\frac{\gamma}{c} - E(\vartheta)\right]^2}{E(\vartheta)}$$

höchstens doppelt so gross ausfällt, als wenn wir die richtige Strukturfunktion gewählt hätten.

12. Brücke zur Credibility Theory

Die «Credibility Theory» beschäftigt sich hauptsächlich mit folgendem Problem:

Gegeben ein Prämiensatz und Beobachtungsreihen über Risiken aus einer Risikoklasse, für welche dieser Prämiensatz gilt. Man konstruiere – basierend auf der Information aus dieser Beobachtungsreihe – einen neuen, den Risiken *besser entsprechenden* Prämiensatz.

Sei p der gegebene (bisher angewandte) Prämiensatz,

$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ die effektive mittlere Belastung aus der Beobachtungsreihe $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

p' der gesuchte «verbesserte» Prämiensatz.

Dann postuliert die Credibility Theory die Relation

$$\text{C)} \qquad p' = (1-\alpha)\, p + \alpha \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

wobei α – eine Zahl zwischen null und eins – *Credibility* genannt wird.

Die Credibility Theory untersucht im speziellen – ausgehend von der Relation C) – die Fragen

- für welches Beobachtungsvolumen $\alpha = 1$ zu setzen sei.
- wie das «Gewicht» α für kleinere Beobachtungsvolumina zu wählen sei.

Es ist höchst erstaunlich, dass die in Kapitel 10 abgeleiteten «optimalen Approximationen»

$$R_{k+1} = \frac{\gamma + \sum_{i=1}^{k} X_i}{c + k}$$

genau die Form der Credibility Relation C) haben, nämlich

$$R_{k+1} = \frac{c}{c+k}\,\frac{\gamma}{c} + \frac{k}{c+k}\,\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k}$$

mit «Credibility» $\alpha = \dfrac{k}{c+k}$

und «bisherigem Prämiensatz» $\dfrac{\gamma}{c} = \int \vartheta \, dS(\vartheta)$,

womit die von Pragmatikern postulierte Credibility Relation eine ungeahnt eindrückliche theoretische Fundierung – wenn auch vorläufig nur in einem Spezialfall – erhält. Ebenfalls erhält die Credibility Funktion $\alpha(n)$ = (Credibility als Funktion des Beobachtungsvolumens) die Interpretation:

$$\alpha(n) = \frac{n}{n + c},$$

wobei – wiederum bemerkenswert – auch diese Form einer gebrochenen linearen Funktion ebenfalls in der Praxis schon lange verwendet wird.

Sollten diese Brücken unserer theoretischen Konstruktion zu den in der Praxis als höchst nützlich befundenen Credibility-Methoden nicht ein Fingerzeig dafür sein, dass die hier vorgeschlagene Theorie den Schlüssel zu einer Fülle praktischer Lösungen im aktuariellen Neuland variabler Prämiensätze darstellen könnte?

13. Ausblick

Mit dem letzten Fragezeichen eröffnen wir bereits die Perspektiven für den Weg, den die hier dargelegten Gedankengänge der Theorie und der Praxis weisen können. Dieser Weg – er führt ja durch Neuland – wird bestimmt eine Fülle von Überraschungen durchqueren, und so sollen die folgenden vagen Andeutungen darüber, wohin er führen *könnte,* ja nicht dazu verleiten, dass das Sensorium für solche Überraschungen ausgeschaltet wird. Andererseits gehört es sicher zu den abschliessenden Bemerkungen zu dieser Arbeit, sich über die Möglichkeiten der Weiterentwicklung des hier Gesagten eine Vorstellung zu machen.

Die hier vorgeschlagene Theorie basiert im Grunde genommen auf der wissenschaftlichen Formulierung von

a) Vorurteilen (a priori-Verteilung),

b) Auswertung von Beobachtungen,

wobei im wesentlichen der Gedankengang unserer Konstruktionen so beschrieben werden kann, dass die Vorurteile (a priori-Verteilung) auf Grund der Beobachtungen revidiert werden sollen.

Dieses allgemeine Konstruktionsverfahren ist selbstverständlich – weit über das Problem des Prämienstufensystems hinaus – immer dann sinnvoll, wenn der Versicherungsmathematiker sich mit einer dynamischen Risikosituation (wo es sich darum handelt, Annahmen periodisch zu revidieren) konfrontiert sieht. Alles was mit Begriffen wie Gewinnbeteiligung, Prämienanpassung, variable Tarifierung, gleitende Skala und wie sie alle heissen, zusammenhängt, sollte deshalb im Rahmen der hier dargelegten Gedanken ähnlich behandelt werden können

Vor der Inangriffnahme so grosser neuer Forschungsgebiete erachte ich es aber als mindestens so bedeutungsvoll, den in dieser Arbeit gerechneten Spezialfall weiter zu entwickeln. Insbesondere sollte dabei die Klasse der Fehlerfunktionen möglichst allgemein gewählt werden, und es wäre höchst interessant, festzustellen, was geschieht, falls das Prämienstufensystem nicht mehr den Erwartungswert der Belastungen, sondern andere Funktionale sukzessive approximieren soll. Im speziellen können solche Funktionale – als Treppenfunktionen des Erwartungs-

wertes gewählt – das der Praxis entsprechende Modell für die *diskontinuierlichen* Prämienstufensysteme liefern. Ebenfalls lohnenswert wäre die Weiterentwicklung des Konstruktionsprinzips, welches auf dem a posteriori-*Median* statt dem a posteriori-Erwartungswert aufbaut.

Literaturverzeichnis

[1] *P. J. Delaporte:* Problèmes de stratégie posés par la tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles et estimation progressive du risque d'accident. 3e Conférence internationale de recherche opérationnelle, Oslo, juillet 1963.

[2] *P. J. Delaporte:* L'estimation statistique du risque individuel d'accident et la tarification de l'assurance automobile. Institut international de statistique. 34e session, Ottawa, août 1963.

[3] *P. J. Delaporte:* Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque. Colloque de l'ASTIN, Trieste, septembre 1963.

[4] *Ove Lundberg:* On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics. First edition 1940; Second edition by Almquist & Wiksells, Uppsala, 1964.

[5] *A. Wald* and *J. Wolfowitz:* Optimum character of sequential probability ratio tests. Annals of Mathematical Statistics, Vol. 19, 1948.

[6] *A. Wald* and *J. Wolfowitz:* Bayes solutions of sequential decision problems. Annals of Mathematical Statistics, Vol. 21, 1950.

[7] *J. L. Doob:* Application of the theory of martingales. Coll. Int. du CNRS, 1949.

[8] *F. Bichsel:* Erfahrungstarifierung in der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 64. Band, Heft 1 (1964).

Résumé

L'auteur montre comment la théorie de l'estimation séquentielle peut être appliquée à l'élaboration de systèmes de primes graduées. Selon cette théorie, le «taux réel de la prime» est considéré comme le paramètre à estimer et les sinistres observés à partir de l'évolution du risque individuel sont assimilés à des variables stochastiques dont la fonction de fréquence dépend du paramètre à estimer.

Les systèmes de primes graduées revêtent tout particulièrement un sens lorsque l'ensemble des paramètres est caractérisé par une fonction de fréquence choisie a priori. A ce sujet, il est remarquable que la théorie de l'estimation séquentielle permette également d'établir l'équation fondamentale sur laquelle repose la théorie de la crédibilité.

Les possibilités d'application sont illustrées en détail à l'aide d'un exemple approprié.

Summary

It is shown here how the theory of sequential estimation renders the construction of graduated premium systems possible. Within the framework of this theory, the "true premium rate" is conceived of as the parameter to be estimated, the observed claims under individual risk as the realisations of random variables, the distribution functions of which depend on this parameter.

The constructed graduated premium system will be particularly significant when for the parameter aggregate an a priori distribution is assumed. Remarkable is also the circumstance that the main formula of Credibility Theory can be derived from the theory of sequential estimation.

The possibility of the application of the theory has been demonstrated by a detailed example.

Riassunto

Viene dimostrato come la teoria del procedimento di stima sequenziale permette la costruzione di sistemi di premi graduati. Nell'ambito di questa teoria il «tasso reale di premio» viene interpretato come parametro da stimare, e i casi di sinistro del rischio individuale osservati quali realizzazioni di variabili aleatorie le cui funzioni di distribuzione dipendono da questo parametro.

I sistemi di premi graduati così costruiti hanno un particolare senso, se per l'insieme dei parametri viene accettata una distribuzione a priori. Occorre inoltre far osservare che con la teoria del procedimento di stima sequenziale può essere derivata la formula principale della «Credibility Theory».

L'applicazione della teoria viene dimostrata in dettaglio con un esempio.