

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 64 (1964)

**Artikel:** Über die verallgemeinerten Teste von Kolmogorov und Smirnov für  
unstetige Verteilungen

**Autor:** Taha, Mohamed Abdel-Hamid

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966967>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die verallgemeinerten Tests von Kolmogorov und Smirnov für unstetige Verteilungen

Von Mohamed Abdel-Hamid Taha, Alexandrien

## Einführung

$X_1, X_2, \dots, X_N$  und  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  seien zwei Folgen von unabhängigen Beobachtungen, die einer Grundgesamtheit, die nach einer und derselben Verteilungsfunktion (= Vf.)  $F(x)$  verteilt ist, entnommen sind.

Sei  $k_N(x)$  die Anzahl der  $X_i$ , die kleiner als  $x$  sind, dann ist

$$S_N(x) = \frac{k_N(x)}{N} \quad 0.1$$

die empirische Vf. der 1. Folge. Analog ist

$$T_M(x) = \frac{k_M(x)}{M}, \quad 0.2$$

wobei  $k_M(x)$  die Anzahl der  $Y_i$ , die kleiner als  $x$  sind, die empirische Vf. der 2. Folge.

Glivenko zeigte im Jahre 1933, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\sup_x |S_N(x) - F(x)| \rightarrow 0\right] = 1. \quad 0.3$$

Dieser Satz hätte nur theoretische Bedeutung, wenn nicht von Kolmogorov [14] im gleichen Heft bewiesen worden wäre, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\sup_x N^{\frac{1}{2}} |S_N(x) - F(x)| < \lambda\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\{-2m^2 \lambda^2\}, \quad 0.4$$

ganz unabhängig von  $F(x)$ , wenn  $F(x)$  stetig ist.

Diese Arbeit von Kolmogorov war – und ist bis jetzt – der Ausgangspunkt vieler Untersuchungen. Wir können hier nicht alle diese Untersuchungen aufzählen, jedoch wollen wir die Hauptrichtungen zitieren:

1. Es wurden von Smirnov analoge Testfunktionen vorgeschlagen, um die Homogenität zweier Folgen von Beobachtungen zu prüfen, nämlich

$$D_{NM} = \sup_x \sqrt{NM / (N+M)} |S_N(x) - T_M(x)| \quad 0.5$$

und

$$D_{NM}^+ = \sup_x \sqrt{NM / (N+M)} [S_N(x) - T_M(x)]. \quad 0.6$$

2. Es wurde versucht, die Wirksamkeit dieses Tests zu verbessern, indem man eine Gewichtsfunktion hinzufügte. Darling und Anderson [1] haben Testfunktionen von der Form:

$$\sup_x N^{\frac{1}{2}} |S_N(x) - F(x)| \varphi(F(x)) \quad 0.7$$

untersucht. Rényi [17] untersuchte die Verteilungen der Grösse

$$\sup_x N^{\frac{1}{2}} |S_N(x) - F(x)| / F(x) \quad 0.8$$

und analoger einseitiger Testfunktionen.

3. Die exakte Verteilung für endliches  $N$  wurde auch untersucht: Birnbaum und Tingey [2], Gnedenko und Koroljuk [11] und viele andere haben einige Resultate in dieser Richtung erhalten.
4. Ein analoger Test mit einem Parameter wurde auch behandelt: Gichman [9] untersuchte die Verteilung der Grösse

$$\sup_x N^{\frac{1}{2}} |S_N(x) - F(x, \theta)|, \quad 0.9$$

wobei  $\theta$  ein Parameter ist. Darling [4] hatte auch auf die Möglichkeit eines solchen Tests hingewiesen. Die beiden haben aber auch bemerkt, dass einfache Sätze in dieser Richtung fehlen.

Die grösste Bedeutung dieses Tests beruht darauf, wie oben schon erwähnt, dass die Verteilung dieser Testfunktion von  $F(x)$  unabhängig ist, wenn nur  $F(x)$  stetig ist. Diese Voraussetzung wurde immer formuliert, bis P. Schmid [19] – nach einem Vorschlag von W. Saxer – eine wichtige Verallgemeinerung dieser Sätze gefunden hat. Schmid konnte nämlich die Verteilung der beiden Grössen  $D_N$  und  $D_N^+$  für unstetige Vf. herleiten. In diesem Fall sind aber die Verteilungen nicht mehr universal, in dem Sinne, dass sie von  $F(x)$  unabhängig sind; vielmehr hängen sie von den Werten der Vf. bei den Sprungstellen ab. Diese Werte sind aber meistens nicht bekannt, und wir müssen sie schätzen. Dann stellt sich die Frage: Wie sind die Verteilungen der Testfunktionen in diesem Fall beschaffen?

Wir geben unter Abschnitt I die Verteilungen analoger Testfunktionen an, die sich besser für unsere Zwecke eignen.

Es fragt sich auch, welche Schätzungen man für die Werte der Vf. bei den Sprungstellen anwenden kann.

In Abschnitt II wenden wir die Methode der Maximumlikelihood an, um Schätzfunktionen für diese Werte zu erhalten, und zeigen, dass diese Schätzfunktionen mit den Werten der empirischen Vf. bei den Sprungstellen übereinstimmen. Dazu werden die Eigenschaften dieser Sf. näher untersucht.

In Abschnitt III geben wir die Verteilungen der beiden Grössen 0.5 und 0.6 für unstetige Vf. für endliches  $N$ , wenn  $N = M$  ist. Die Grenzverteilungen sind ebenfalls dargestellt.

Eine gewisse Verallgemeinerung des Smirnov-Tests, nämlich:

$$D_{NN}(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\alpha_1 \leq F(x) \leq \alpha_2} \sqrt{N/2} |S_N(x) - T_N(x)|, \quad 0.10$$

$$D_{NN}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\alpha_1 \leq F(x) \leq \alpha_2} \sqrt{N/2} [S_N(x) - T_N(x)] \quad 0.11$$

wird in Abschnitt IV untersucht. Die Verteilungen für endliches  $N$  und die Grenzverteilungen werden bestimmt. Anderson und Darling [1] gaben die Verteilung des Kolmogorovschen Analogons für 0.10, Kvit [16] untersuchte diesen Fall, fand aber andere Resultate für den zweiseitigen Test.

Der Beweis der ersten zwei Sätze beruht auf einem Lemma von Kolmogorov. Einen anderen Beweis mit Hilfe der stochastischen Prozesse habe ich hier nicht zusammengestellt.

Für den Beweis der Theoreme in Abschnitt III und IV habe ich eine Verallgemeinerung des Spiegelverfahrens, das zum erstenmal von Gnedenko und Koroljuk [12] benützt wurde, angewendet.

## I. Der Kolmogorov-Test für eine unstetige Verteilungsfunktion, wenn die Werte der Vf. bei den Sprungstellen geschätzt werden

$F(x)$  sei eine Vf., die überall stetig ist, ausser bei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wo sie in der folgenden Weise definiert wird:

$$\begin{aligned} F(x_\nu - 0) &= f_{2\nu-1}, & \nu &= 1, 2, \dots, n+1, \\ F(x_\nu) &= f_{2\nu}, & \nu &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ \text{und dabei ist} & & f_0 &= 0, \quad f_{2n+1} = 1. \end{aligned} \quad 1.1$$

$S_N(x)$  sei die empirische Vf.,  $\bar{F}(x)$  sei die theoretische Vf. mit den geschätzten  $f_j$ ; d.h. angenommen sei, dass die analytische Form der  $F(x)$  bei den stetigen Stellen bekannt ist, und die  $f_j$  irgendwie geschätzt sind. Die Testfunktionen werden leicht geändert. Betrachten wir die beiden Grössen:

$$\begin{aligned}\bar{D}_N &= \sup_x N^{\frac{1}{2}} |S_N(x) - \bar{F}(x)|, \\ \bar{D}_N^+ &= \sup_x N^{\frac{1}{2}} [S_N(x) - \bar{F}(x)].\end{aligned}\quad 1.2$$

Wir behaupten:

### Theorem 1

Falls wir die  $f_j$  in folgender Weise schätzen:

$$\begin{aligned}\bar{f}_{2\nu-1} &= S_N(x_\nu - 0), \\ \bar{f}_{2\nu} &= S_N(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}\quad 1.3$$

dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[\bar{D}_N < \lambda] = L(\lambda), \quad 1.4$$

wobei

$$L(\lambda) = \prod_{\nu=0}^n \left[ \sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_\nu} \exp \{ (-2m_\nu^2 \lambda^2) / s_{2\nu+1} \} \right] \quad 1.5$$

mit

$$s_j = f_j - f_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1. \quad 1.6$$

### Theorem 2

Mit den Schätzungen 1.3 gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[\bar{D}_N^+ < \lambda] = L^+(\lambda), \quad 1.7$$

wobei

$$L^+(\lambda) = \prod_{\nu=0}^n \left[ \sum_{m_\nu=0}^1 (-1)^{m_\nu} \exp \{ -(2m_\nu^2 \lambda^2) / s_{2\nu+1} \} \right]. \quad 1.8$$

Die  $s_j$  sind wie in 1.6 definiert.

Wir nehmen an, dass  $f_{2\nu+1} > f_{2\nu}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ ; jedoch dürfen schon einige – oder alle –  $s_{2\nu+1}$  gleich Null sein. Die entsprechenden Faktoren in dem Produkt 1.5 oder 1.8 werden dann gleich 1 sein.

Wenn wir annehmen, dass die analytische Form der Vf. bei den stetigen Stellen bekannt ist, dann können wir sie in der folgenden Weise schreiben:

$$F(x) = f_{2\nu} + (f_{2\nu+1} - f_{2\nu}) \Phi_\nu(x), \quad x_\nu \leq x < x_{\nu+1}, \quad 1.9$$

$$\nu = 0, 1, \dots, n,$$

wobei  $\Phi_\nu(x)$  alle stetig sind und

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_0(x) = 0, \\ \text{ii)} \quad & \Phi_\nu(x_\nu) = 0, \\ \text{iii)} \quad & \Phi_\nu(x_{\nu+1} - 0) = 1. \end{aligned} \quad 1.10$$

Diese Schreibweise der Vf. hat den Vorteil, dass  $F(x)$  als Funktion und sogar linear und stetig in Abhängigkeit von den  $f_j$  dargestellt werden kann. Sind nun  $f_j$  die richtigen Werte und  $\bar{f}_j$  wenig verschieden von  $f_j$ , dann haben wir

$$F(x, \bar{f}) = F(x, f) + (\bar{f} - f) \frac{\partial F}{\partial f} \Big|_f, \quad 1.11$$

wobei  $\bar{f} = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{2n+1})$ ,  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{2n+1})$ , d.h.

$$F(x, \bar{f}) = F(x, f) + (\bar{f}_{2\nu} - f_{2\nu}) \frac{\partial F}{\partial f_{2\nu}} \Big|_{f_{2\nu}} + (\bar{f}_{2\nu+1} - f_{2\nu+1}) \frac{\partial F}{\partial f_{2\nu+1}} \Big|_{f_{2\nu+1}}, \quad 1.12$$

$$x_\nu \leq x < x_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Wenn wir die  $\bar{f}_j$  als die Schätzungen für die  $f_j$  übernehmen, so wird  $F(x, \bar{f}) = \bar{F}(x)$  und einfache Rechnungen ergeben:

$$\bar{F}(x) = F(x) + (\bar{f}_{2\nu} - f_{2\nu}) \frac{f_{2\nu+1} - F(x)}{s_{2\nu+1}} + (\bar{f}_{2\nu+1} - f_{2\nu+1}) \frac{F(x) - f_{2\nu}}{s_{2\nu+1}}, \quad 1.13$$

$$x_\nu \leq x < x_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Eine fundamentale Transformation ist

$$u = F(x). \quad 1.14$$

Diese Transformation ändert nichts an der Grösse  $\bar{D}_N, \bar{D}_N^+$ .  $u$  selbst ist eine Zufallsgrösse, mit der Vf.  $F^0(x)$ , die folgendermassen definiert ist:

$$F^0(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u & f_{2\nu} \leq u \leq f_{2\nu+1}, \\ f_{2\nu-1} & f_{2\nu-1} < u < f_{2\nu}, \\ 1 & u \geq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nu = 0, 1, \dots \\ \nu = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad 1.15$$

Die entsprechende empirische Vf. ist, wie man leicht sehen kann,

$$S_N^0(u) = S_N(x). \quad 1.16$$

Sei  $I$  die Vereinigung aller geschlossenen Intervalle  $(f_{2\nu}, f_{2\nu+1})$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ , dann erhält man mittels 1.11 bis 1.16 folgendes:

$$P[\bar{D}_N < \lambda] = P \left[ \sup_{u \in I} \left| \sqrt{N} \left[ S_N^0(u) - u - (\bar{f}_{2\nu} - f_{2\nu}) \frac{f_{2\nu+1} - u}{s_{2\nu+1}} - (\bar{f}_{2\nu+1} - f_{2\nu+1}) \frac{u - f_{2\nu}}{s_{2\nu+1}} \right] \right| < \lambda \right]. \quad 1.17$$

Die  $f_j$  kann man nach vielen Methoden schätzen, die Schätzungen 1.3 haben jedoch erhebliche Vorteile; setzen wir diese Schätzungen in 1.17 ein, dann bekommen wir:

$$P[\bar{D}_N < \lambda] = P \left[ \sup_{u \in I} \left| \sqrt{N} \left[ S_N^0(u) - u - (S_N^0(f_{2\nu}) - f_{2\nu}) \frac{f_{2\nu+1} - u}{s_{2\nu+1}} - (S_N^0(f_{2\nu+1}) - f_{2\nu+1}) \frac{u - f_{2\nu}}{s_{2\nu+1}} \right] \right| < \lambda \right]. \quad 1.18$$

Sei nun  $K = [k_0 = 0, 1, \dots, k_1, k_2, k_2 + 1, \dots, k_{2n+1} = N]$  die Menge aller Zahlen  $j$ , so dass  $j/N \in I$ ; ferner sollen die  $k_j$  so ausgewählt werden, dass  $k_j/N \rightarrow f_j$ , wenn  $N$  gegen  $\infty$  strebt. Dann sei noch:

$$d_j = k_j - k_{j-1}, \quad A(j) = S_N^0(j/N) - j/N \quad 1.19$$

und

$$Y_N(j) = A(j) - \frac{k_{2\nu+1} - j}{d_{2\nu+1}} A(k_{2\nu}) - \frac{j - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} A(k_{2\nu}). \quad 1.20$$

Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit:

$$P \left[ \max_{j \in K} |Y_N(j)| < \lambda N^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad 1.21$$

Wir definieren  $E_{ik}$  als das Ereignis

i) alle die Ungleichungen:

$$|Y_N(j)| < \lambda N^{-\frac{1}{2}}, \quad j \leq k, \quad j \in K, \quad k \in K,$$

sind erfüllt, und

ii)  $A(k) = i/N$ .

Sei  $P_{ik} = P[E_{ik}]$ , dann ist

$$P_{00} = 1, \quad P_{i0} = 0, \quad \text{für } i \neq 0, \quad 1.22$$

und  $P_{0N}$  ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit in 1.21. Diese kann man mit den Randbedingungen 1.22 und der Rekursionsformel:

$$P_{ik+1} = \sum_j P_{jk} P[E_{ik+1}/E_{jk}] \quad \text{errechnen.} \quad 1.23$$

Wir können die Formel 1.23 in zwei Formeln zerlegen. Wenn wir – der Einfachheit halber – schreiben

$$E_{j_\nu k_\nu} = E_\nu, \quad 1.24$$

$$P_{j_\nu k_\nu} = P_\nu,$$

bekommen wir nach 1.23:

$$P_{2\nu} = \sum_{j_{2\nu-1}} P_{2\nu-1} P[E_{2\nu}/E_{2\nu-1}], \quad 1.25$$

$$P_{2\nu+1} = \sum_{j_{2\nu}} P_{2\nu} P[E_{2\nu+1}/E_{2\nu}]. \quad 1.26$$

Das Ereignis  $E_{2\nu}$  hat aber die Bedeutung:

i) alle die folgenden Ungleichungen sind erfüllt

$$|Y_N(j)| < \lambda N^{-\frac{1}{2}}, \quad j \leq k_{2\nu}, \quad j \in K,$$

dazu ii)  $A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N$ .

Wenn wir bemerken, dass  $Y_N(k_{2\nu}) = 0$  für alle  $i$ , so dass  $A(k_{2\nu}) = i/N$ , dann sehen wir, dass  $E_{2\nu}$  bedeutet:

i) alle die Ungleichungen

$$|Y_N(j)| < \lambda N^{-\frac{1}{2}}, \quad j \leq k_{2\nu-1}, \quad j \in K$$

sind erfüllt und

ii)  $A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N$ .

Man sieht dann, dass das Ereignis  $[E_{2\nu}/E_{2\nu-1}]$  dem Ereignis  $[A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N \mid A(k_{2\nu-1}) = j_{2\nu-1}/N]$  äquivalent ist, also können wir 1.25 so umschreiben:

$$P_{2\nu} = \sum_{j_{2\nu-1}} P_{2\nu-1} P[A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N \mid A(k_{2\nu-1}) = j_{2\nu-1}/N], \quad 1.27$$

und weil  $Y_N(k_{2\nu-1}) = 0$  für alle  $i$ , so dass  $A(k_{2\nu-1}) = i/N$ , müssen wir über alle möglichen Werte für  $j_{2\nu-1}$  summieren.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit in 1.26 können wir wie nachstehend schreiben:

$$P[E_{2\nu+1}/E_{2\nu}] = P_\nu^* P[A(k_{2\nu+1}) = j_{2\nu+1}/N \mid A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N], \quad 1.28$$

wobei

$$P_\nu^* = P[|Y_N(j)| < \lambda N^{-\frac{1}{2}} \quad 1.29$$

$$j = k_{2\nu}, k_{2\nu} + 1, \dots, k_{2\nu+1} \mid A(k_{2\nu+1}) = j_{2\nu+1}/N, A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N]$$



oder, was dasselbe ist:

$$P_{\nu}^* = P \left[ \left| A(j) - \frac{k_{2\nu+1} - j}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu}}{N} - \frac{j - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu+1}}{N} \right| < \lambda N^{-\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. j = k_{2\nu}, k_{2\nu} + 1, \dots, k_{2\nu+1} \right]. \quad 1.30$$

Damit wird 1.26

$$P_{2\nu+1} = \sum_{j_{2\nu}} P_{\nu}^* P_{2\nu} P[A(k_{2\nu+1}) = j_{2\nu+1}/N \mid A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N]; \quad 1.31$$

auch hier wird über alle möglichen Werte für  $j_{2\nu}$  summiert, weil  $Y_N(k_{2\nu}) = 0$  für alle  $i$ , so dass  $A(k_{2\nu}) = i/N$ .

Wenn wir die Formeln 1.27 und 1.31 kombinieren, erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit  $P_{0N}$  folgendes:

$$P_{0N} = \sum_{j_0} \dots \sum_{j_{2n+1}} \left\{ \prod_{\nu=0}^n P_{\nu}^* P[A(k_{2\nu+1}) = j_{2\nu+1}/N \mid A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N] \right. \\ \left. \cdot P[A(k_{2\nu}) = j_{2\nu}/N \mid A(k_{2\nu-1}) = j_{2\nu-1}/N] \right\}. \quad 1.32$$

Gemäss der Binomial-Verteilung gilt:

$$P[A(k_{\nu+1}) = j_{\nu+1}/N \mid A(k_{\nu}) = j_{\nu}/N] = \\ b(j_{\nu+1} - j_{\nu} + k_{\nu+1} - k_{\nu}, N - k_{\nu} - j_{\nu}; (k_{\nu+1} - k_{\nu}) \mid (N - k_{\nu})), \quad 1.33$$

dabei ist

$$b(r, s; p) = \binom{s}{r} p^r (1-p)^{s-r}. \quad 1.34$$

Die  $P^*$  können wir in der folgenden Weise errechnen:

Sei  $D_{ik}$  das Ereignis

i) alle die Ungleichungen

$$\left| A(j) - \frac{k_{2\nu+1} - j}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu}}{N} - \frac{j - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu+1}}{N} \right| < \lambda N^{-\frac{1}{2}}, \quad j = k_{2\nu}, \dots, k_{2\nu+1}$$

sind erfüllt und

$$\text{ii)} \quad A(k) = i/N.$$

Wenn  $W_{ik} = P[D_{ik}]$ , dann ergibt sich

$$\text{i)} \quad W_{j_{2\nu} k_{2\nu}} = 1,$$

$$\text{ii)} \quad W_{ik_{2\nu}} = 0 \quad \text{für } i \neq j_{2\nu},$$

und

$$W_{j_{2\nu+1} k_{2\nu+1}} = P_{\nu}^*. \quad 1.35$$

Diese können wir bestimmen mit den obigen Randbedingungen und der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} W_{ik+1} &= \sum_j W_{jk} P[D_{ik+1}/D_{jk}] \\ &= \sum_j W_{jk} b(i-j+1, k_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} - j - k; 1/(k_{2\nu+1} - k)), \end{aligned} \quad 1.36$$

wobei  $j$  nur in dem Gebiet  $G$  variieren darf, welches folgendermassen definiert ist:

$$G = \left\{ \begin{aligned} -\lambda N^{\frac{1}{2}} + \frac{k_{2\nu+1} - k}{d_{2\nu+1}} j_{2\nu} + \frac{k - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} j_{2\nu+1} < j < \lambda N^{\frac{1}{2}} + \frac{k_{2\nu+1} - k}{d_{2\nu+1}} j_{2\nu} + \frac{k - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} j_{2\nu+1} \\ j + k \geq j_{2\nu} + k_{2\nu}. \end{aligned} \right. \quad 1.37$$

Diese Formel können wir noch vereinfachen: ist

$$Q_{ik} = \frac{(k_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} - k - i)! (\bar{d}_{2\nu+1})^{d_{2\nu+1} + \bar{d}_{2\nu+1}}}{(\bar{d}_{2\nu+1} + d_{2\nu+1})! (k_{2\nu+1} - k)^{(k_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} - k - i)} e^{(k - k_{2\nu})}} W_{ik} \quad 1.38$$

$$\text{mit } \bar{d}_\nu = j_\nu - j_{\nu-1},$$

dann lautet die Rekursionsformel für die  $Q_{ik}$ :

$$Q_{ik} = \sum_{j \in G} Q_{jk} \frac{1}{(i - j + 1)! e} \quad 1.39$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & Q_{j_{2\nu} k_{2\nu}} = 1, \\ \text{ii)} \quad & Q_{ik_{2\nu}} = 0, \quad i \neq j_{2\nu}, \\ \text{iii)} \quad & Q_{ik} = 0, \quad i \notin G; \end{aligned} \quad 1.40$$

und  $j$  darf nur in  $G$  variieren.

Mit dieser Formel können wir  $Q_{j_{2\nu+1} k_{2\nu+1}}$  errechnen, und gemäss 1.38 ist

$$W_{j_{2\nu+1} k_{2\nu+1}} = \frac{(d_{2\nu+1} + \bar{d}_{2\nu+1})! e^{d_{2\nu+1}}}{(d_{2\nu+1})^{d_{2\nu+1} + \bar{d}_{2\nu+1}}} Q_{j_{2\nu+1} k_{2\nu+1}}. \quad 1.41$$

Betrachten wir die Folge der unabhängigen Zufallsgrössen  $Y_j$ , die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} P[Y_{k_{2\nu}} = j_{2\nu}/\lambda N^{\frac{1}{2}}] &= 1, \\ P[Y_j = (i-1)/\lambda N^{\frac{1}{2}}] &= 1/i! e, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ j &= k_{2\nu} + 1, \dots, k_{2\nu+1}. \end{aligned} \quad 1.42$$

Für diese Zufallsgrösse gilt:

$$\begin{aligned} E(Y_j) &= 0, \\ E(Y_j^2) &= 1/(\lambda^2 N), \\ E(|Y_j|^3) &= (1 + 2/e) / (\lambda^3 N^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad 1.43$$

Sei

$$S_j = \sum_{r=k_{2\nu}}^j Y_r \quad 1.44$$

und  $M_{ik}$  das Ereignis:

i) alle die Ungleichungen

$$\left| S_j - \frac{k_{2\nu+1} - j}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu}}{\lambda N^{\frac{1}{2}}} - \frac{j - k_{2\nu}}{d_{2\nu+1}} \frac{j_{2\nu+1}}{\lambda N^{\frac{1}{2}}} \right| < 1, \quad k_{2\nu} \leq j \leq k$$

sind erfüllt und

$$\text{ii) } S_k = i / \lambda N^{\frac{1}{2}}.$$

Sei noch  $R_{ik} = P[M_{ik}]$ .

Man kann sich leicht vergewissern, dass die  $R_{ik}$  derselben Rekursionsformel mit denselben Randbedingungen wie die  $Q_{ik}$  gehorchen. Es folgt dann, dass  $R_{ik} = Q_{ik}$  und insbesondere:

$$R_{j_{2\nu+1}, k_{2\nu+1}} = Q_{j_{2\nu+1}, k_{2\nu+1}}, \quad 1.45$$

aber

$$\begin{aligned} R_{j_{2\nu+1}, k_{2\nu+1}} &= P \left[ -1 + \frac{\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \frac{j}{\lambda N^{\frac{1}{2}}} < S_j < 1 + \frac{2\nu+1}{d_{2\nu+1}} \frac{j}{\lambda N^{\frac{1}{2}}}; \right. \\ &\quad \left. j = 1, 2, \dots, d_{2\nu+1}; S_{d_{2\nu+1}} = \bar{d}_{2\nu+1} / \lambda N^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad 1.46$$

Hier ist  $S_j$  die Summe von  $j$  aus den Zufallsgrössen  $Y_j$ ,  $j \neq k_{2\nu}$ . Nun ist

$$2t_j = \sum_{r=1}^j E(Y_r^2) = j / \lambda^2 N, \quad 1.47$$

somit können wir 1.46 in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} R_{j_{2\nu+1}, k_{2\nu+1}} &= P \left[ -1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t_j < S_j < 1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t_j, \right. \\ &\quad \left. j = 1, 2, \dots, d_{2\nu+1}; S_{d_{2\nu+1}} = \bar{d}_{2\nu+1} / \lambda N^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad 1.48$$

*Lemma [14]*

Sei  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die nur Vielfache einer Konstanten  $\varepsilon$  annehmen dürfen, und:

$$E(Y_j) = 0, \quad E(Y_j^2) = 2b_j, \quad E(|Y_j|^3) = d_j;$$

$$S_k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k, \quad t_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k.$$

Seien noch  $a(t)$  und  $b(t)$  zwei stetige differenzierbare Funktionen, die die zwei Ungleichungen:

$$a(t) < b(t),$$

$$a(0) < 0 < b(0)$$

erfüllen, und  $u(\sigma, \tau; s, t)$  die Green'sche Funktion der Wärmeleitung:

$$\partial f / \partial t = \partial^2 f / \partial s^2$$

in dem Gebiet:

$$a(t) < s < b(t), \quad t > 0.$$

$R_{in}$  sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$a(t_k) < S_k < b(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

und

$$S_n = i\varepsilon.$$

Es gilt:

$$R_{in} = \varepsilon \{u(0, 0; i, t_n) + \delta\}, \quad 1.49$$

wobei  $\delta \rightarrow 0$  mit  $\varepsilon$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Es existieren die positiven Konstanten  $T_1, T_2, K, C$  und  $A$ , so dass

- i)  $0 < T_1 < t_n < T_2$ ,
- ii) für jedes  $k$  und geeignetes  $i_k$  gilt:  
 $P[Y_k = \varepsilon i_k] > K$ ,  
 $P[Y_k = (i_k + 1)\varepsilon] < K$ ,
- iii)  $d_k/b_k < C\varepsilon$ ,
- iv)  $a(t_n) + A < i\varepsilon < b(t_n) - A$ .

Wie man leicht sehen kann, erfüllen die Zufallsgrößen  $Y_j$ , die in 1.42 definiert werden, alle die Bedingungen des Lemmas, dabei ist

$$a(t) = -1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t,$$

$$b(t) = +1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t.$$

Es folgt dann:

$$R_{j_{2\nu+1}k_{2\nu+1}} = \frac{1}{\lambda N^{\frac{1}{2}}} \left\{ u\left(0, 0; \frac{\bar{d}_{2\nu+1}}{\lambda N^{\frac{1}{2}}}, \frac{d_{2\nu+1}}{2\lambda^2 N}\right) + \delta \right\}. \quad 1.50$$

Im Gebiet

$$-1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t < s < +1 + \frac{2\bar{d}_{2\nu+1}}{d_{2\nu+1}} \lambda N^{\frac{1}{2}} t, \quad t > 0,$$

gilt für die Green'sche Funktion folgendes:

$$u(0, 0; s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp \left\{ -\theta m - (s - 2m)^2 / 4t \right\} \quad 1.51$$

mit

$$\theta = 2\lambda N^{\frac{1}{2}} \bar{d}_{2\nu+1} / d_{2\nu+1}. \quad 1.52$$

Wenn nun  $N$  gegen  $\infty$  strebt, und damit  $k_j / N \rightarrow f_j$ ,  $j_\nu / N^{\frac{1}{2}} \rightarrow x_\nu$  und  $\theta \rightarrow 2\lambda(x_{2\nu+1} - x_{2\nu}) / s_{2\nu+1}$ , bekommen wir:

$$Q_{j_{2\nu+1}k_{2\nu+1}} = R_{j_{2\nu+1}k_{2\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_{2\nu+1} N}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp \left\{ -\frac{(x_{2\nu+1} - x_{2\nu})^2 + 4m^2 \lambda^2}{2s_{2\nu+1}} \right\}. \quad 1.53$$

Der Faktor in 1.41, multipliziert mit  $N^{-\frac{1}{2}}$ , strebt gegen:

$$\sqrt{2\pi s_{2\nu+1}} \exp \left\{ (x_{2\nu+1} - x_{2\nu})^2 / 2s_{2\nu+1} \right\}. \quad 1.54$$

Durch die Gleichungen 1.35, 1.41, 1.53 und 1.54 bekommen wir schliesslich:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\nu^* = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{m_\nu} \exp \left\{ -2m_\nu^2 \lambda^2 / s_{2\nu+1} \right\} \quad 1.55$$

ganz unabhängig von den  $x_\nu$ .

Setzen wir jetzt 1.55 und 1.33 in 1.32 ein und lassen wir  $N \rightarrow \infty$  streben, dann werden die Summen über  $j_\nu$  zu Integralen über  $x_\nu$ , und weil es keine Beschränkungen für die  $j_\nu$  gibt, muss dann von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integriert werden. Da die  $P_\nu^*$  von den  $x$  unabhängig sind, können wir sie aus den Integralen herausnehmen. Wir bekommen dann:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{0N} = \prod_{\nu=0}^n P_\nu^* K, \quad 1.56$$

wobei  $K$  als das Integral der  $2n$ -dimensionalen Normalverteilung über  $-\infty < x_\nu < \infty$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 2n$ , gleich 1 sein muss. Damit ist 1.4 bewiesen.

Für den einseitigen Test läuft die Überlegung genau parallel. Man lässt einfach das Zeichen des absoluten Betrages während des ganzen Beweises fallen. Für das Kolmogorovsche Lemma haben wir dann:

$$\begin{aligned} a(t) &= -\infty, \\ b(t) &= 1 + 2\bar{d}_{2\nu+1} \lambda N^{\frac{1}{2}} t / d_{2\nu+1}. \end{aligned} \quad 1.57$$

Die Green'sche Funktion für dieses Gebiet ist die folgende:

$$u(0,0;s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_0^1 (-1)^m \exp \left\{ -\theta m - (s-2m)^2 / 4t \right\}, \quad 1.58$$

wobei  $\theta$  genau wie in 1.52 definiert ist.

Es folgt dann:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{0N} = \prod_{\nu=0}^n \left[ \sum_{m_{\nu}=0}^1 (-1)^{m_{\nu}} \exp \left\{ -2m_{\nu}^2 \lambda^2 / s_{2\nu+1} \right\} \right]. \quad 1.59$$

Damit ist 1.7 auch bewiesen.

## II. Über die Schätzungen der Werte einer unstetigen Verteilungsfunktion bei den Sprungstellen

In den letzten Untersuchungen haben wir die Werte der empirischen Vf. bei den Sprungstellen als die Schätzungen für die theoretischen Werte genommen, nämlich:

$$S_N(x_{\nu}-0) = \bar{f}_{2\nu-1}, \quad S_N(x_{\nu}) = \bar{f}_{2\nu}, \quad 2.1$$

d.h.  $N\bar{f}_{2\nu-1}$  ist die Anzahl der  $X_i$ , die kleiner als  $x_{\nu}$  sind, und  $N\bar{f}_{2\nu}$  ist die Anzahl der  $X_i$ , die kleiner oder gleich  $x_{\nu}$  sind.

Es stellt sich die Frage, wie zuverlässig diese Schätzfunktionen sind. Die Cramér-Rao-Ungleichung besagt: Die Streuung einer Schätzfunktion bleibt immer grösser oder gleich einer unteren Schranke, und wenn das Gleichheitszeichen gilt, dann ist die Schätzfunktion schon gut, nämlich vom sogenannten wirksamen Typ.

Die Maximumlikelihood-Methode lässt sich oft als eine der besten Konstruktionsmethoden für Schätzfunktionen betrachten. Wir verwenden diese Methode hier, um Schätzfunktionen  $T_j$  für die  $f_j, j = 1, 2, \dots, 2n$  zu erhalten und zeigen dann, dass diese Schätzfunktionen mit den in 2.1 definierten  $f_j$  übereinstimmen.

$X_1, X_2, \dots, X_N$  seien eine Folge unabhängiger Beobachtungen einer Zufallsgrösse  $X$ , die nach der Vf. 1.1 verteilt ist. Um die Schätzfunktionen zu untersuchen, formulieren wir die Fragestellung wie folgt:

Die Zufallsgrösse  $X$  hat die Verteilung

$$\begin{aligned} P[x_j < X < x_{j+1}] &= q_{2j+1}, & j &= 0, 1, \dots, n, \\ P[X = x_j] &= q_{2j}, & j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad 2.2$$

dabei stehen die  $x_0$  und  $x_{2n+1}$  für die untere bzw. die obere Grenze des Variationsbereiches der Zufallsgrösse  $X$ , und

$$q_j = f_j - f_{j-1}, \quad 2.3$$

d.h.  $X$  kann in einem der oben in 2.2 definierten Intervalle (oder Punkte) mit den dabei gegebenen Wahrscheinlichkeiten angenommen werden.

Sei nun  $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}$  die Anzahl der  $X_i$ , die in das 1. bzw. 2. ... bzw.  $2n+1$ . Intervall (oder Punkt) gefallen sind. In  $N$  Versuchen beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass  $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}$  in das 1. bzw. 2. ... bzw.  $2n+1$ . Intervall fallen:

$$W = \left( N! / \prod_{i=1}^{2n+1} z_i! \right) \prod_{i=1}^{2n+1} (q_i)^{z_i}, \quad 2.4$$

dies ist auch die Likelihoodfunktion. Die besten Schätzfunktionen für die  $f_j$  sind die Werte der Stichprobenfunktionen, die die Funktion  $W$  als Funktion von den  $f_j$  zum Maximum machen. Wie bekannt, ist das Maximum bei  $\partial W / \partial f = 0$  oder – was dasselbe ist – bei  $\partial \log W / \partial f = 0$ .

Nun gilt:

$$\log W = C + \sum_{j=1}^{2n+1} z_j \log q_j, \quad 2.5$$

wobei  $C$  nicht von den  $f_j$  abhängig ist. Differenzieren wir und setzen wir das Differential gleich Null, bekommen wir das folgende Gleichungssystem:

$$\partial \log W / \partial f_j = z_j / (f_j - f_{j-1}) - z_{j+1} / (f_{j+1} - f_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad 2.6$$

Sei  $T_j, j = 1, 2, \dots, 2n$ , die Lösung dieses Systems. Wir sehen dann, dass:

$$T_j = \left( \sum_{i=1}^j z_i \right) / N, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad 2.7$$

Es ist dann klar, dass die  $T_j$  mit den in 2.1 definierten  $\bar{f}_j$  übereinstimmen.

Wir wollen jetzt diese Schätzfunktionen näher untersuchen. Weil  $E(z_i) = Nq_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ , gilt:

$$E(T_j - f_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad 2.8$$

d.h. die  $T_j$  sind erwartungstreu. Die  $T_j$  werden wirksam genannt, wenn

$$u' V u = u' S^{-1} u, \quad 2.9$$

wobei  $u$  ein beliebiger reeller  $2n$ -dimensionaler Vektor ist und

$$V = (N v_{ij}) \quad 2.10$$

mit

$$N v_{ij} = E \left\{ \frac{\partial \log W}{\partial f_i} \frac{\partial \log W}{\partial f_j} \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n, \quad 2.11$$

und

$$S = (\sigma_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad 2.12$$

mit

$$\sigma_{ij} = E(T_i - f_i)(T_j - f_j). \quad 2.13$$

Nun finden wir

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E(T_i T_j) - f_i f_j \\ &= E \left\{ \frac{(z_1 + z_2 + \dots + z_i)(z_1 + z_2 + \dots + z_j)}{N^2} \right\} - f_i f_j \\ &= N^{-2} E \left[ \sum_{r=1}^{\text{Min}(i,j)} z_r^2 + \sum_{i \neq j} z_r z_s \right] - f_i f_j \\ &= N^{-2} \left[ \sum_{i=1}^{\text{Min}(i,j)} (N(N-1) q_r^2 + N q_r) + N(N-1) \sum_{r \neq s} q_r q_s \right] - f_i f_j, \end{aligned}$$

$$\text{somit ist} \quad \sigma_{ij} = f_i(1 - f_j)/N, \quad i \leq j. \quad 2.14$$

Für die  $v_{ij}$  haben wir:

$$\begin{aligned} N v_{ij} &= E \left( \frac{\partial \log W}{\partial f_i} \frac{\partial \log W}{\partial f_j} \right) \\ &= E \left[ \left( \frac{z_i}{f_i - f_{i-1}} - \frac{z_{i+1}}{f_{i+1} - f_i} \right) \left( \frac{z_j}{f_j - f_{j-1}} - \frac{z_{j+1}}{f_{j+1} - f_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad v_{ii} &= \frac{1}{f_{i+1} - f_i} + \frac{1}{f_i - f_{i-1}} \quad \text{für } i = j, \quad 2.15 \\ \text{ii)} \quad v_{ii-1} &= v_{i-1,i} = -1/(f_i - f_{i-1}), \quad \text{für } i = j-1 \text{ oder } j = i-1, \\ \text{iii)} \quad v_{ij} &= 0, \quad \text{für } i < j-1 \text{ oder } i > j+1. \end{aligned}$$



Mit Hilfe der Definitionen für  $V$  und  $S$  und der Gleichungen 2.14 und 2.15 kann man zeigen, dass:

$$VS = I, \quad 2.16$$

womit 2.9 bewiesen ist, d.h. die  $T_j$  sind wirksam.

Wenn wir zwei Folgen von Beobachtungen haben:  $X_1, X_2, \dots, X_N$  und  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ , und  $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}$  und  $w_1, w_2, \dots, w_{2n+1}$  die Anzahl der  $X_i$  bzw. der  $Y_i$  der betreffenden Klassen sind, können wir analog zeigen, dass die Schätzfunktionen:

$$T'_j = \sum_{i=1}^j (z_i + w_i) / (N + M), \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad 2.17$$

genau dieselben Eigenschaften wie die  $T_j$  besitzen. Hier bemerken wir, dass auch die  $T'_j$  mit den empirischen Vf. durch:

$$T'_j = a S_N^0(f_j) + b T_M^0(f_j), \quad 2.18$$

wobei  $a + b = 1$  und  $a = N / (N + M)$ , verbunden sind.

Die  $T_j$  (und das können wir auch für die  $T'_j$  zeigen) haben eine  $2n$ -dimensionale Normalverteilung als Grenzverteilung. Man kann nämlich zeigen, dass:

$$P[N^{\frac{1}{2}}(T-f) < x] = \frac{|V'|}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_{2n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u' V' u \right\} du', \quad 2.19$$

wobei

- i)  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{2n}),$
- ii)  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2n}),$
- iii)  $u' = (u_1, u_2, \dots, u_{2n}),$
- iv)  $V' = (v_{ij})$  und  $v_{ij}$  wie in 2.15 definiert,
- v)  $|V'| = \prod_{j=1}^{2n+1} (f_j - f_{j-1})^{-\frac{1}{2}}.$

Diese Resultate sind immer gültig, auch wenn  $f_{2i+1} = f_{2i}$  für irgendein  $i$  ( $f_{2i}$  darf nicht gleich  $f_{2i-1}$  sein, sonst ist  $x_i$  kein Unstetigkeitspunkt), weil wie bekannt:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 / \sigma^2 \right\} dx = 1. \quad 2.20$$

Natürlich wird die Anzahl der (voneinander verschiedenen)  $f_j$  und damit die Dimension der Verteilung um eins kleiner.

Dieses Resultat ermöglicht es uns, für eine einfache Hypothese von der Form  $f = f^0$  eine strenge kritische Region zu finden.

### III. Smirnov-Test für eine unstetige Verteilungsfunktion

$S_N(x)$  und  $T_N(x)$  seien, wie in 0 definiert, die empirischen Vf. zweier unabhängiger Folgen von Beobachtungen.  $F(x)$ , in 1.1 definiert, sei die theoretische Vf. Gesucht sind die Verteilungen der beiden Grössen:

$$D_{NN} = \sup_x \sqrt{N/2} |S_N(x) - T_N(x)|, \quad 3.1$$

$$D_{NN}^+ = \sup_x \sqrt{N/2} [S_N(x) - T_N(x)]. \quad 3.2$$

Wir behaupten: *Theorem 3*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[D_{NN} < \lambda] = \Phi(\lambda). \quad 3.3$$

*Theorem 4*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[D_{NN}^+ < \lambda] = \Phi^+(\lambda), \quad 3.4$$

wobei  $\Phi(\lambda)$  und  $\Phi^+(\lambda)$  gleich wie in den Gleichungen 2 bzw. 5 in [19] (Schmid) definiert sind.

Sei  $I$  die Menge aller geschlossenen Intervalle  $(f_{2\nu}, f_{2\nu+1})$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ , dann ist leicht zu sehen, dass:

$$P[D_{NN} < \lambda] = P\left[\sup_{F(x) \in I} \sqrt{N/2} |S_N(x) - T_N(x)| < \lambda\right]. \quad 3.5$$

Für den Beweis nehmen wir an, dass  $f_{2\nu+1} > f_{2\nu}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ . Die beiden Theoreme gelten aber auch, wenn  $f_{2\nu+1} = f_{2\nu}$ , für einige (oder alle)  $\nu$ , wegen der Bemerkung in 2.20.

Für endliches  $N$  ist  $[S_N(x) - T_N(x)]$  immer von der Form  $i/N$ , wobei  $i$  eine ganze Zahl ist. Wir untersuchen zuerst die Wahrscheinlichkeit:

$$P\left[\sup_{F(x) \in I} |S_N(x) - T_N(x)| < c/N\right], \quad 3.6$$

wobei  $c$  eine ganze Zahl ist, und für den Grenzwert lassen wir  $c/N$  gegen  $\lambda/\sqrt{2/N}$  streben.

Definieren wir jetzt  $E_\nu$  als das Ereignis:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \quad |S_N(x) - T_N(x)| < c/N, \quad F(x) \leq f_\nu, \\ \text{ii)} & \quad S_N^0(f_\nu) = i_\nu/N, \\ \text{iii)} & \quad T_N^0(f_\nu) = j_\nu/N. \end{aligned} \quad 3.7$$

Sei  $P_v$  die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E_v$ , dann ist:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad \text{für } i_0 = j_0 = 0 \quad (f_0 = 0 \text{ definitionsgemäss}), \\ &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \quad 3.8$$

Und  $P_{2n+1}$  mit  $i_{2n+1} = j_{2n+1} = N$  ( $f_{2n+1} = 1$  definitionsgemäss) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit in 3.6; diese können wir mit Hilfe der Randbedingungen 3.8 und der Rekursionsformel:

$$P_{v+1} = \sum_{i_v, j_v} P_v P[E_{v+1}/E_v] \quad 3.9$$

in  $2n+1$  Schritten errechnen.

Je nachdem, ob der Index gerade oder ungerade ist, erhält man zwei verschiedene Formeln, nämlich bei geradem Index:

$$\begin{aligned} P_{2v} &= \sum P_{2v-1} P[E_{2v}/E_{2v-1}] \quad 3.10 \\ &= \sum_{|i_{2v-1} - j_{2v-1}| < c} P_{2v-1} P \left[ S_N(x_v) - S_N(x_v - 0) = \frac{i_{2v} - i_{2v-1}}{N} \middle/ S_N(x_v - 0) = \frac{i_{2v-1}}{N}; \right. \\ &\quad \left. T_N(x_v) - T_N(x_v - 0) = \frac{j_{2v} - j_{2v-1}}{N} \middle/ T_N(x_v - 0) = \frac{j_{2v-1}}{N} \right]. \end{aligned}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich hier auf zwei unabhängige Ereignisse. Nach dem binomischen Gesetz beträgt diese Wahrscheinlichkeit:

$$b\left(i_{2v} - i_{2v-1}, N - i_{2v-1}; \frac{f_{2v} - f_{2v-1}}{1 - f_{2v-1}}\right) \cdot b\left(j_{2v} - j_{2v-1}, N - j_{2v-1}; \frac{f_{2v} - f_{2v-1}}{1 - f_{2v-1}}\right). \quad 3.11$$

Für ungeraden Index lautet die Rekursionsformel wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{2v+1} &= \sum P_{2v} P[E_{2v+1}/E_{2v}] \quad 3.12 \\ &= \sum P_{2v} P[A, B, C]. \end{aligned}$$

Dabei ist A das Ereignis:

$$S_N(x_{v+1} - 0) - S_N(x_v) = (i_{2v+1} - i_{2v})/N \middle/ S_N(x_v) = i_{2v}/N, \quad 3.13$$

B das Ereignis:

$$T_N(x_{v+1} - 0) - T_N(x_v) = (j_{2v+1} - j_{2v})/N \middle/ T_N(x_v) = j_{2v}/N, \quad 3.14$$

C das Ereignis:

$$|S_N(x) - T_N(x)| < c/N, \text{ für alle } x, \text{ so dass } F(x) \notin (f_{2v}, f_{2v+1}) \quad 3.15$$

unter den Bedingungen, dass:

- i)  $S_N(x_{\nu+1}-0) - S_N(x_\nu) = (i_{2\nu+1} - i_{2\nu})/N,$
- ii)  $T_N(x_{\nu+1}-0) - T_N(x_\nu) = (j_{2\nu+1} - j_{2\nu})/N.$

Nach dieser Definition sieht man, dass:

$$P[A, B, C] = P[A] P[B] P[C]. \quad 3.16$$

$P[A]$  und  $P[B]$  können wir nach dem binomischen Gesetz errechnen. Es ergeben sich dann analoge Ausdrücke wie in 3.11.

Für das Ereignis  $C$  bedienen wir uns eines anderen Schemas. Ordnen wir die  $(i_{2\nu+1} - i_{2\nu})$  der  $X_i$  und die  $(j_{2\nu+1} - j_{2\nu})$  der  $Y_i$  in eine einzige Folge der Grösse nach. Jedem Glied dieser Folge ordnen wir eine neue Zufallsgrösse  $z_i$  gemäss der folgenden Definition zu:

$$\begin{aligned} z_i &= +1, \text{ wenn das } i\text{-te Glied ein } X_i \text{ ist,} \\ z_i &= -1, \text{ wenn das } i\text{-te Glied ein } Y_i \text{ ist.} \end{aligned}$$

Sei noch

$$K_r = \sum_{i=1}^r z_i, \quad r = 1, 2, \dots, d = i_{2\nu+1} - i_{2\nu} + j_{2\nu+1} - j_{2\nu}. \quad 3.17$$

Es folgt 
$$P[C] = P[|K_r + i_{2\nu} - j_{2\nu}| < c, \quad r = 1, 2, \dots, d], \quad 3.18$$

nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen, welches sich in der  $(x, t)$  Ebene bewegt und in  $(i_{2\nu} - j_{2\nu}, 0)$  beginnt und zu  $(i_{2\nu+1} - j_{2\nu+1}, d)$  kommt, während seiner Irrfahrt zwischen den Vertikalen  $x = c$ ,  $x = -c$  bleibt. Diese Wahrscheinlichkeit können wir mit Hilfe des bekannten Spiegelverfahrens errechnen, sie beträgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= \sum_{-[\frac{d}{c}]}^{+[\frac{d}{c}]} (-1)^m \frac{(i_{2\nu+1} - i_{2\nu})! (j_{2\nu+1} - j_{2\nu})!}{\left( \frac{i_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} + (-)^m (i_{2\nu+1} - j_{2\nu+1})}{2} - i_{2\nu} + mc \right)!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left( \frac{i_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} - (-)^m (i_{2\nu+1} - j_{2\nu+1})}{2} - j_{2\nu} - mc \right)!} \\ &= \sum (-1)^m Z_m, \end{aligned} \quad 3.19$$

wobei  $[x]$  = die grösste ganze Zahl in  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad & \text{i)} \quad p_r = (f_r - f_{r-1}) / (1 - f_{r-1}), \\ & \text{ii)} \quad b_r = b(i_r - i_{r-1}, N - i_{r-1}; p_r), \\ & \text{iii)} \quad b'_r = b(j_r - j_{r-1}, N - j_{r-1}; p_r). \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt 3.11 in 3.10 und 3.19 und die analogen Ausdrücke für 3.11 (für  $P[A]$  und  $P[B]$ ) in 3.12 ersetzen, erhalten wir:

$$P_{2\nu} = \sum P_{2\nu-1} b_{2\nu} b'_{2\nu}, \quad 3.20$$

$$P_{2\nu+1} = \sum P_{2\nu} b_{2\nu+1} b'_{2\nu+1} \sum (-1)^m Z_m. \quad 3.21$$

Für endliches  $N$  können wir die beiden Formeln 3.20 und 3.21 vereinfachen mit der Transformation:

$$W_\nu = \frac{(N - i_\nu)! (N - j_\nu)!}{(1 - f_\nu)^{2N - i_\nu - j_\nu}} P_\nu.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} W_0 &= (N!)^2 P_0 = (N!)^2 \quad \text{für } i_0 = j_0 = 0, \\ &= 0 \quad \text{in den andern Fällen.} \end{aligned} \quad 3.22$$

Die Rekursionsformeln für die  $W_\nu$  lauten dann:

$$\begin{aligned} W_{2\nu} &= \sum_{|i_{2\nu-1} - j_{2\nu-1}| < c} W_{2\nu-1} \frac{(f_{2\nu} - f_{2\nu-1})^{i_{2\nu} + j_{2\nu} - i_{2\nu-1} - j_{2\nu-1}}}{(i_{2\nu} - i_{2\nu-1})! (j_{2\nu} - j_{2\nu-1})!}, \\ W_{2\nu+1} &= \sum_{|i_{2\nu} - j_{2\nu}| < c} W_{2\nu} \frac{(f_{2\nu+1} - f_{2\nu})^{i_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} - i_{2\nu} - j_{2\nu}}}{(i_{2\nu+1} - i_{2\nu})! (j_{2\nu+1} - j_{2\nu})!} \sum (-1)^m Z_m. \end{aligned} \quad 3.23$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P_{2n+1} = W_{2n+1} \quad \text{mit } i_{2n+1} = j_{2n+1} = N. \quad 3.24$$

Die  $W_{2n+1}$  können wir mit Hilfe der Randbedingungen 3.22 und der Rekursionsformel 3.23 errechnen.

Für die Berechnung der Grenzwerte bei  $N \rightarrow \infty$  ist es besser, folgende Transformation anzuwenden:

$$R_\nu = \frac{(N - i_\nu)! (N - j_\nu)! N^{i_\nu + j_\nu}}{(N!)^2 (1 - f_\nu)^{2N - i_\nu - j_\nu} e^{2Nf_\nu}} P_\nu. \quad 3.25$$

$$\begin{aligned} \text{Für die } R_\nu \text{ finden wir:} \quad & R_0 = 1 \quad \text{für } i_0 = j_0 = 0, \\ & = 0 \quad \text{in den übrigen Fällen} \end{aligned} \quad 3.26$$

und

$$R_{2\nu} = \sum_{|i_{2\nu-1}-j_{2\nu-1}|<c} R_{2\nu-1} \frac{\{N(f_{2\nu}-f_{2\nu-1})\}^{i_{2\nu}+j_{2\nu}-i_{2\nu-1}-j_{2\nu-1}}}{(i_{2\nu}-i_{2\nu-1})! (j_{2\nu}-j_{2\nu-1})! e^{2N(f_{2\nu}-f_{2\nu-1})}}, \quad 3.27$$

$$R_{2\nu+1} = \sum_{|i_{2\nu}-j_{2\nu}|<c} R_{2\nu} \frac{\{N(f_{2\nu+1}-f_{2\nu})\}^{i_{2\nu+1}+j_{2\nu+1}-i_{2\nu}-j_{2\nu}}}{(i_{2\nu+1}-i_{2\nu})! (j_{2\nu+1}-j_{2\nu})! e^{2N(f_{2\nu+1}-f_{2\nu})}} \sum (-)^m Z_m.$$

$R_{2n+1}$  können wir mit den Randbedingungen 3.26 und den Formeln 3.27 bestimmen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$P_{2n+1} = \frac{(N!)^2 e^{2N}}{N^{2N}} R_{2n+1}. \quad 3.28$$

Wenn  $N$  gegen  $\infty$  strebt und damit:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & i_\nu/N \rightarrow f_\nu + y_\nu/N^{\frac{1}{2}}, \\ \text{ii)} \quad & j_\nu/N \rightarrow f_\nu + x_\nu/N^{\frac{1}{2}}, \\ \text{iii)} \quad & c/N^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{2} \lambda, \end{aligned} \quad 3.29$$

werden die Summen über  $|i_\nu - j_\nu| < c$  zu Integralen über  $|y_\nu - x_\nu| < \sqrt{2} \lambda$ , abgesehen vom ersten Schritt, wo die Summe nur aus einem einzigen Summanden besteht, der gegen den Ausdruck:

$$N \frac{1}{2\pi f_1} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{m_0} \exp \left[ \frac{-1}{2f_1} \{y_1^2 + x_1^2 + (-)^{m_0} 2\sqrt{2} \lambda m_0 (y_1 - x_1) + 4m_0^2 \lambda^2\} \right] \quad 3.30$$

strebt.

Der Faktor in 3.28 multipliziert mit  $N$  strebt gegen eine Konstante. Es gilt nämlich:

$$\frac{N (N!)^2 e^{2N}}{N^{2N}} \rightarrow 2\pi. \quad 3.31$$

Jedes Glied  $Z_m$  der Summe 3.29 strebt gegen:

$$\exp \left[ \frac{-1}{s_{2\nu+1}} \left\{ (-)^{m_\nu} \sqrt{2} \lambda m_\nu (y_{2\nu+1} - x_{2\nu+1}) - \sqrt{2} \lambda m_\nu (y_{2\nu} - x_{2\nu}) + 2m_\nu^2 \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 - (-)^{m_\nu}}{2} (y_{2\nu+1} - x_{2\nu+1}) (y_{2\nu} - x_{2\nu}) \right\} \right]. \quad 3.32$$

Weil  $d/c \rightarrow \infty$ , werden die Summen über alle  $m_\nu$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt.

Dazu kommt noch die Gleichung

$$N \frac{\{N(f_v - f_{v-1})\}^{i_v + i_v - i_{v-1} - i_{v-1}}}{(i_v - j_v)! (i_{v-1} - j_{v-1})! e^{2N(f_v - f_{v-1})}} \Rightarrow \frac{1}{2\pi s_v} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_v - y_{v-1})^2 + (x_v - x_{v-1})^2}{s_v} \right\}. \quad 3.33$$

Durch die Gleichungen 3.26 bis 3.33 bekommen wir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{2n+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left[ \sup_{f(x) \in I} |S_N(x) - T_N(x)| < \lambda \sqrt{2}/N \right] = \Phi(\lambda), \quad 3.34$$

wobei:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = & \sum_{m_0 \dots m_n = -\infty}^{\infty} (-1)^{\sum_{i=0}^n m_i} (2\pi)^{-2n} \prod_{j=1}^{2n+1} (f_j - f_{j-1})^{-1} \\ & \cdot \int \dots \int_{-\infty < x_j < \infty} \int \dots \int_{|y_j - x_j| < \lambda \sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^{2n+1} \frac{(y_v - y_{v-1})^2 + (x_v - x_{v-1})^2}{s_v} \right. \\ & \left. - \sum_{v=0}^n \left\{ (-1)^{m_v} (y_{2v+1} - x_{2v+1}) \sqrt{2} \lambda m_v - \sqrt{2} \lambda m_v (y_{2v} - x_{2v}) + 2m_v^2 \lambda^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1 - (-1)^{m_v}}{2} (y_{2v+1} - x_{2v+1}) (y_{2v} - x_{2v}) \right\} / s_{2v+1} \right] dx_1 \dots dx_{2n} dy_1 \dots dy_{2n}, \end{aligned} \quad 3.35$$

$$\text{mit } x_0 = y_0 = x_{2n+1} = y_{2n+1} = 0.$$

Berechnen wir das Integral über  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , und machen wir einige weitere Umrechnungen mit den geeigneten Substitutionen, dann bekommen wir:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = & C^{-1} \sum_{m_0 \dots m_n = -\infty}^{\infty} (-1)^{\sum_{i=0}^n m_i} \int \dots \int_{|z_j| < \lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{(z_{2v} - z_{2v-1})^2}{s_{2v}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{v=0}^n \frac{((-1)^m z_{2v+1} - z_{2v} + 2\lambda m_v)^2}{s_{2v+1}} \right] dz_1 \dots dz_{2n}, \end{aligned} \quad 3.36$$

$$\text{wobei } z_0 = z_{2n+1} = 0, \text{ und } C = (2\pi)^n \prod_{j=1}^{2n+1} (f_j - f_{j-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Der Ausdruck in 3.36 ist derselbe wie (25) in [19], womit 3.3 bewiesen ist.

Dasselbe Verfahren können wir anwenden für den einseitigen Test, nur müssen wir das Zeichen des absoluten Betrags über den ganzen Beweis fallen lassen. Die Summen werden in diesem Fall über  $(i_v - j_v) < c$  erstreckt und danach die Integrale über  $(z_j) < \lambda$  genommen. Bei der Irrfahrt haben wir nur eine einzige Barriere, die entsprechende Wahrscheinlichkeit wird:

$$1 - \frac{(i_{2\nu+1} - i_{2\nu})! (j_{2\nu+1} - j_{2\nu})!}{(i_{2\nu+1} - j_{2\nu} - c)! (j_{2\nu+1} - j_{2\nu} + c)!} = 1 - Z_1. \quad 3.37$$

Die Grenzwerte erhalten wir analog, es ergibt sich dann:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[D_{NN}^+ < \lambda] = C^{-1} \sum_{m_0 \dots m_n=0}^1 (-1)^{\sum_{i=0}^n m_i} \quad 3.38$$

$$\int \dots \int_{z_j < \lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \frac{(z_{2\nu} - z_{2\nu-1})^2}{s_{2\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n \frac{((-1)^{m_\nu} z_{2\nu+1} - z_{2\nu} + 2\lambda m_\nu)^2}{s_{2\nu+1}} \right] dz_1 dz_2 \dots dz_{2n}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich wie der Ausdruck (5) in [19]. Damit ist auch 3.4 bewiesen.

Wir wollen hier bemerken, dass die Grenzwerte, d.h.  $\Phi(\lambda)$  und  $\Phi^+(\lambda)$  dieselben bleiben, wenn wir für die  $f_j$  eine Schätzung von der Form:

$$\bar{f}_j = f_j + O(N^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{wählen.} \quad 3.39$$

#### IV. Verteilungen der ein- und zweiseitigen Smirnov-Teste über einen beliebigen Teil des Intervalls (0,1)

Die Überlegungen, denen wir im vorigen Paragraph gefolgt sind, können wir hier wieder anwenden, um die Verteilungen der Smirnov-Tests über einen beliebigen Teil des Variationsbereiches einer Zufallsgrösse zu bestimmen, wenn die Vf.  $F(x)$  in diesem Teil stetig ist.

Betrachten wir das geschlossene Intervall  $(x_1, x_2)$ . Nehmen wir an,  $F(x)$  sei über diesem Intervall stetig;  $\alpha_1, \alpha_2$  sind folgenderweise zu bestimmen:

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \alpha_1, \\ F(x_2) &= \alpha_2. \end{aligned} \quad 4.1$$



Wir behaupten: *Theorem 5*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[ \sup_{\alpha_1 \leq F(x) \leq \alpha_2} \sqrt{N/2} |S_N(x) - T_N(x)| < \lambda \right] = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\varrho^2}} \quad 4.2$$

$$\cdot \int_{-a_0}^{a_0} \int_{-b_0}^{b_0} \exp \left\{ -\frac{(z_1^2 - 2\varrho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\varrho^2)} \right\} dz_1 dz_2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-)^m e^{-2m^2 \lambda^2} \\ \cdot \int_{-b_m}^{b_m} \int_{-a_m}^{a_m} \exp \left\{ -\frac{(z_1^2 + 2\varrho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\varrho^2)} \right\} dz_1 dz_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_m &= (\lambda - 2m\lambda\alpha_1) / \sqrt{\alpha_1(1-\alpha_2)}, \\ b_m &= (\lambda - 2m\lambda(1-\alpha_2)) / \sqrt{\alpha_2(1-\alpha_2)}, \\ \varrho^2 &= \alpha_1(1-\alpha_2) / \alpha_2(1-\alpha_1). \end{aligned} \quad 4.3$$

*Theorem 6*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[ \sup_{\alpha_1 \leq F(x) \leq \alpha_2} \sqrt{N/2} (S_N(x) - T_N(x)) < \lambda \right] = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\varrho^2}} \quad 4.4$$

$$\cdot \left[ \int_{-\infty}^{b_0} \int_{-\infty}^{a_0} \exp \left\{ -\frac{(z_1^2 - 2\varrho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\varrho^2)} \right\} dz_1 dz_2 - e^{-2\lambda^2} \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{a_1} \exp \left\{ -\frac{(z_1^2 + 2\varrho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\varrho^2)} \right\} dz_1 dz_2 \right],$$

wobei  $a_0, b_0, a_1$  und  $b_1$  wie in 4.3 definiert sind.

Wie vorher erwähnt, ist  $S_N(x) - T_N(x)$  immer von der Form  $i/N$ , wobei  $i$  eine ganze Zahl ist. Wir untersuchen dann zuerst die Wahrscheinlichkeit

$$P \left[ \max_{\alpha_1 \leq F(x) \leq \alpha_2} |S_N(x) - T_N(x)| < c/N \right] = P_N(\alpha_1, \alpha_2) \quad 4.5$$

und für die Berechnungen der Grenzwerte als  $N \rightarrow \infty$ , lassen wir  $c$  gegen  $\lambda \sqrt{2N}$  streben.

Definieren wir jetzt die Ereignisse  $A_1, A_2, B_1, B_2, C$  wie folgt:

$$A_1 \text{ sei das Ereignis, dass } S_N(x_1) = j_1/N, \quad 4.6$$

$$A_2 \text{ sei das Ereignis, dass } T_N(x_1) = j_2/N,$$

$$B_1 \text{ sei das Ereignis, dass } S_N(x_2) = i_1/N, S_N(x_1) = j_1/N,$$

$$B_2 \text{ sei das Ereignis, dass } T_N(x_2) = i_2/N, T_N(x_1) = j_2/N,$$

$$C \text{ sei das Ereignis, dass } |S_N(x) - T_N(x)| < c/N, F(x) \notin (\alpha_1, \alpha_2),$$

unter den Bedingungen, dass  $B_1, B_2$  eingetreten sind. Wir können dann gleich sehen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P_N(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum \sum P[A_1, A_2, B_1, B_2, C], \\ &= \sum_{|i_1 - i_2| < c} \sum_{|j_1 - j_2| < c} P[A_1] P[A_2] P[B_1] P[B_2] P[C], \end{aligned} \quad 4.7$$

weil jedes von diesen Ereignissen von den anderen unabhängig ist. Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A_i$  und  $B_i$  können wir nach dem binomischen Gesetz errechnen.  $P[C]$  müssen wir aber nach dem Verfahren in III bestimmen. Es ergibt sich dann ein analoger Ausdruck wie 3.19. Wir erhalten für  $P_N(\alpha_1, \alpha_2)$  folgendes:

$$\begin{aligned} P_N(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum \frac{(N!)^2 (1 - \alpha_2)^{2N - i_1 - i_2} (\alpha_2 - \alpha_1)^{i_2 + i_1 - j_1 - j_2} (\alpha_1)^{j_1 + j_2}}{(N - i_1)! (N - i_2)! (i_1 - j_1)! (i_2 - j_2)! (j_1)! (j_2)!} \\ &\cdot \sum_{\left[ \begin{smallmatrix} +\frac{d}{c} \\ -\frac{d}{c} \end{smallmatrix} \right]} (-1)^m \frac{(i_1 - j_1)! (i_2 - j_2)!}{\left( \frac{i_2 + i_1 + (-)^m (i_2 - i_1)}{2} - j_2 + mc \right)! \left( \frac{i_2 + i_1 - (-)^m (i_2 - i_1)}{2} - j_1 - mc \right)!}, \end{aligned} \quad 4.8$$

wobei die Summe über  $|i_1 - i_2| < c$ ,  $|j_1 - j_2| < c$  ist  
und  $d = i_1 + i_2 - j_1 - j_2$ ;  $[x] =$  die grösste ganze Zahl in  $x$ .

Für die Berechnungen der Grenzwerte lassen wir  $N \rightarrow \infty$  und damit:  $c \rightarrow \lambda \sqrt{2N}$ ,  $i_i / N \rightarrow \alpha_2 + y_i / \sqrt{N}$ ,  $j_i / N \rightarrow \alpha_1 + x_i / \sqrt{N}$  streben. Die Summen über  $|i_1 - i_2| < c$ , und  $|j_1 - j_2| < c$  werden zu Integralen über  $|y_1 - y_2| < \sqrt{2} \lambda$  bzw.  $|x_1 - x_2| < \sqrt{2} \lambda$ , und wir bekommen:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\alpha_1, \alpha_2) &= K^{-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int \int \int \int \\ &\quad \begin{matrix} -\infty < x_2 < \infty & |x_1 - x_2| < \lambda \sqrt{2} \\ -\infty < y_2 < \infty & |y_1 - y_2| < \lambda \sqrt{2} \end{matrix} \\ &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{y_1^2 + y_2^2}{1 - \alpha_2} + \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_1} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ (-)^m (y_2 - y_1) m \sqrt{2} \lambda - \sqrt{2} \lambda m (x_2 - x_1) + 2m^2 \lambda^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1 - (-)^m}{2} (y_1 - x_1) (y_2 - x_2) \right\} \right] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, \quad 4.9 \end{aligned}$$

wobei  $K = 2\pi \sqrt{\alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1) (1 - \alpha_2)}$ .

Wenn wir einige geeignete Substitutionen machen, können wir das Integral über  $x_2$  und  $y_2$  errechnen. Wir bekommen dann für die rechte Seite der Gleichung 4.9 folgendes:

$$K^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} (-)^m \int \int_{|z_i| < \lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{z_2^2}{1-\alpha_2} + \frac{((-)^m z_2 - z_1 + 2m)^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{z_1^2}{\alpha_1} \right\} \right] dz_1 dz_2. \quad 4.10$$

Sei nun:

$$z_2 = w_2 - (-)^m 2m\lambda(1-\alpha_2), \quad z_1 = w_1 + 2m\lambda\alpha_1, \quad 4.11$$

dann bekommen wir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\alpha_1, \alpha_2) = K^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} (-)^m e^{-2m^2\lambda^2} \cdot \int \int \exp \left[ \frac{-1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left\{ w_2^2 \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} + (-)^m 2w_1 w_2 + w_1^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right\} \right] dw_1 dw_2, \quad 4.12$$

wobei das Integral zu erstrecken ist über:

$$\begin{aligned} -\lambda + (-)^m 2m\lambda(1-\alpha_2) &< w_2 < \lambda + (-)^m 2m\lambda(1-\alpha_2), \\ -\lambda - 2m\lambda\alpha_1 &< w_1 < \lambda - 2m\lambda\alpha_1. \end{aligned}$$

Damit ist 4.2 bewiesen.

Das Smirnov-Theorem bekommt man von 4.3, wenn  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ .

Analog können wir den einseitigen Test behandeln. In diesem Fall bekommen wir:

$$P_N^+(\alpha_1, \alpha_2) = \sum \frac{(N!)^2 (1-\alpha_2)^{2N-i_1-i_2} (\alpha_2 - \alpha_1)^{i_1+i_2-j_1-j_2} (\alpha_1)^{j_1+j_2}}{(N-i_1)! (N-i_2)! (i_1-j_1)! (i_2-j_2)! (j_1)! (j_2)!} \cdot \left( 1 - \frac{(i_1-j_1)! (i_2-j_2)!}{(i_1-j_2-c)! (i_2-j_1+c)!} \right), \quad 4.13$$

hier ist die Summe über  $(i_1-i_2) < c, (j_1-j_2) < c$ .

Wenn  $N \rightarrow \infty$ , erhalten wir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^+(\alpha_1, \alpha_2) = K^{-1} \int \int \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{y_1^2 + y_2^2}{1-\alpha_2} - \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_1} \right\} \right] \cdot \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{(x_1 - x_2 - \lambda\sqrt{2})(y_1 - y_2 - \lambda\sqrt{2})}{\alpha_2 - \alpha_1} \right\} \right] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \quad 4.14$$

Nach einigen Umrechnungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N^+(\alpha_1, \alpha_2) &= K^{-1} \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{w_2^2}{\alpha_2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{w_1^2}{\alpha_1} \right\} \right] dw_1 dw_2 \\ &- K^{-1} e^{-2} \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{a_1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{w_2^2}{\alpha_2} + \frac{(w_2 + w_1)^2}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{w_1^2}{\alpha_1} \right\} \right] dw_1 dw_2. \quad 4.15 \end{aligned}$$

wobei  $a_1 = \lambda - 2\lambda\alpha_1$ ,  $b_1 = \lambda - 2\lambda(1 - \alpha_2)$ .

Damit ist auch 4.4 bewiesen.

Auch hier bekommen wir den einseitigen Smirnov-Test als Grenzwert, wenn  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ .

## V. Appendix

i) Jede der Funktionen  $L(\lambda)$  und  $L^+(\lambda)$  besteht aus Produkten, und jedes dieser Produkte ist den bekannten Funktionen von Kolmogorov bzw. Smirnov gleich. Das ermöglicht uns, die Tabellen von Smirnov [20] anzuwenden. Dafür brauchen wir nur die grösste Abweichung im Intervall  $(f_{2i}, f_{2i+1})$  durch  $\sqrt{s_{2i+1}}$  zu dividieren und die entsprechende Wahrscheinlichkeit von den Smirnov-Tabellen abzulesen.

Es ist auch zu bemerken, dass in jedem Intervall  $(f_{2i}, f_{2i+1})$  die Sicherheitsschranke für eine gegebene Wahrscheinlichkeit um  $1/\sqrt{s_{2i+1}}$  schmaler geworden ist, was der Abnahme der Freiheitsgrade beim  $\chi^2$ -Test entspricht.

Hier geben wir ein einfaches Beispiel, das die oben erwähnten Eigenschaften erklärt. In diesem Beispiel hat es nur eine einzige Sprungstelle, die ganz beim Rand ( $x = 0$ ) liegt.

Während einer Periode von 16 Jahren wurden die wöchentlichen Maxima der Abflussmengen der Baye de Montreux (Schweiz) registriert. Unter den 832 beobachteten Werten gab es 246 Werte gleich Null. Für diese Beobachtungen wurde folgende Verteilungsfunktion vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= f, \\ V(x) &= f + (1 - f) F(y), \quad x > 0, \end{aligned} \quad 5.1$$

wobei  $F(y)$  die Normalverteilung ist und  $y = (\log x - \log b)/d$ .

Für  $f$ ,  $b$  und  $d$  ergab sich:

$$f = 0,296, \quad \log b = 5,2426, \quad d = 1,392.$$

Für den einseitigen Test war die grösste Abweichung 0,0349, was einer Wahrscheinlichkeit  $P^+$ , nach Theorem 2, von 0,057 entspricht. Bei dem zweiseitigen Test beträgt die grösste Abweichung 0,036, für welche  $P = 0,092$  nach Theorem 1 ist.

Zum Vergleich bringen wir hier die entsprechende Wahrscheinlichkeiten  $P^+$  und  $P$  nach den Theoremen 1 und 2 in [19] (was Theoremen 5 und 6 mit  $\alpha_1 = f$  und  $\alpha_2 = 1$  dieser Arbeit entspricht). Es ergeben sich in diesem Fall:

$$P^+ = 0,122, \quad P = 0,218.$$

Dieses Beispiel verdanke ich der Abteilung für Hydrologie und Glaziologie VAWE an der ETH.

ii) Es ist schon bekannt, dass die Abweichungen kein homogenes Gewicht über dem ganzen Intervall  $(0,1)$  haben. Zum Beispiel ist bekannt, dass

$$E[\{X_N(t)\}^2] = t(1-t),$$

wobei  $X_N(t) = N^{\frac{1}{2}}(S_N^0(t) - t)$ , d.h. die Streuung ist maximal bei  $t = \frac{1}{2}$ . Andererseits wurde bewiesen (Corr. 2 in [3]), dass die grösste Abweichung eher bei  $X_{i+1}$  als bei  $X_i$  eintreten wird.

Die Theoreme 5 und 6 kann man dann gebrauchen, um strengere Teste zu konstruieren, indem man sie auf das Intervall anwendet, wo die Abweichung stärker ist.

## Literatur

- [1] *T.W. Anderson* und *D.A. Darling* (1952): Asymptotic theory of certain «goodness of fit criteria» based on stochastic processes. *Ann. Math. Stat.* 23, pp.193 to 212.
- [2] *Z.W. Birnbaum* und *F.H. Tingey* (1951): One sided confidence contours for probability distribution functions. *Ann. Math. Stat.* 22, pp.592–596.
- [3] *Z.W. Birnbaum* und *R. Pyke* (1958): On some distributions related to the statistic  $D_N^+$ . *Ann. Math. Stat.* 29, pp.179.
- [4] *D.A. Darling* (1955): The Cramér-Smirnov test in the parametric case. *Ann. Math. Stat.* 26, pp.1–20.
- [5] *D.A. Darling* (1957): The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises tests. *Ann. Math. Stat.* 28, pp.823–838.
- [6] *M.D. Donsker* (1952): Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Stat.* 23, pp.277–281.
- [7] *J.L. Doob* (1949): Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Stat.* 20, pp.393–403.
- [8] *W. Feller* (1948): On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions. *Ann. Math. Stat.* 19, pp.177.
- [9] *I.I. Gichman* (1953). Einige Bemerkungen zum Kolmogorovschen Verträglichkeitskriterium. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 91, S.715–718 (Russisch).
- [10] *V. Glivenko* (1933): Sulla determinazione empirica della legge di probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, pp.95.
- [11] *B.W. Gnedenko* und *W.S. Koroljuk* (1951): Über die maximale Abweichung zweier empirischer Verteilungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 80, S.525–528 (Russisch).
- [12] *B.W. Gnedenko* (1958): Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Akademie-Verlag Berlin.
- [13] *A. Kolmogorov* (1931): Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoff'schen Satzes. *Bull. Acad. Sci. USSR*, S.956–962.
- [14] *A. Kolmogorov* (1933): Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, pp.83.
- [15] *A. Kolmogorov* (1933): Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Bull. Acad. Sci. USSR*, pp.363–372.
- [16] *I.D. Kvit* (1950): Über einen Satz von N.W. Smirnov betreffs des Vergleichs zweier Stichproben. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 71, S.229–231 (Russisch).
- [17] *A. Renyi* (1953): On the theory of order statistics. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* 4, pp.191–231.
- [18] *L. Schmetterer* (1956): Einführung in die mathematische Statistik. Springer-Verlag, Wien.
- [19] *P. Schmid* (1958): On the Kolmogorov-Smirnov theorems for discontinuous distribution functions. *Ann. Math. Stat.* 29, pp.1011–1027.
- [20] *N.V. Smirnov* (1948): Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *Ann. Math. Stat.* 19, p.279.

## Zusammenfassung

Der Autor leitet die Verteilung von Kolmogorovs Testgrösse für unstetige Verteilungsfunktionen her, falls die Werte an den Sprungstellen derselben geschätzt worden sind. Anschliessend wird der Zweistichproben-Test von Smirnov auf diskontinuierliche Verteilungsfunktionen übertragen sowie die Verteilung dieser Masszahl für ein endliches Intervall ( $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ ) angegeben. In allen Fällen gelangen sowohl einseitige wie zweiseitige Fragestellungen der Tests zur Besprechung.

## Résumé

Dans le présent travail, la distribution des critères de Kolmogorov est calculée pour les distributions discontinues, quand les valeurs des sauts sont estimées. La distribution des critères à deux échantillons de Smirnov est aussi obtenue pour le cas des distributions discontinues. En outre, la distribution des critères de Smirnov est indiquée dans l'intervalle ( $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ ). Dans chaque cas, l'auteur étudie les tests unilatéraux ainsi que les tests bilatéraux.

## Summary

The distribution of the Kolmogorov's criteria is obtained for discontinuous distributions if the values of the jumps are estimated. The distribution of the Smirnov's two-samples criteria is also got for discontinuous distributions. Lastly, the distribution of the Smirnov's criteria over a finite interval ( $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ ) is given. In all the cases, both the one-sided and the two-sided tests are treated.

## Riassunto

L'autore deduce la distribuzione del criterio di Kolmogorov per distribuzioni discontinue, nel caso di valori stimati ai salti. E pure applicato il criterio di Smirnov a saggio doppio, per distribuzioni discontinue. Inoltre, la distribuzione del criterio di Smirnov è espressa nell'intervallo limitato ( $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ ). In ogni caso si perviene a trattare un quesito unilaterale che bilaterale dei tests.