

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 63 (1963)

**Artikel:** Abgekürzte Verfahren der Sterblichkeitsmessung

**Autor:** Thullen, Peter

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966929>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Abgekürzte Verfahren der Sterblichkeitsmessung

*Von Peter Thullen, Genf*

### Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit befasst sich mit einem elementaren Näherungsverfahren zur Berechnung der eine «abgekürzte» Sterbetafel (oder Überlebensordnung) bestimmenden fünfjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten  ${}_5p_x$ ,  $5 \leq x \leq 85$  sowie des Anfangswertes  ${}_4p_1$ . Es wird von der Tatsache ausgegangen, dass für  $5 \leq x \leq 40$  mit guter Annäherung  ${}_5p_x = (1 - q_{x,x+4})^5$  gilt, wobei  $q_{x,x+4}$  die gewogene mittlere einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit in den Altern  $x, x+1, \dots, x+4$  ist, welche aus gewissen Gesamtheiten der Lebenden und Toten abgeleitet werden kann. Während in früheren Arbeiten im Exponenten der obigen Formel Korrekturen vorgenommen wurden, um brauchbare Näherungswerte auch für höhere Alter zu erzielen, wird hier die Basis selbst korrigiert:  ${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x,x+4})^5$ ,  $45 \leq x \leq 85$ , wobei  $\alpha$  ein sehr einfach zu bestimmender, nur von den Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q$  abhängiger Faktor ist (siehe Seite 77).

Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie man nur mit Hilfe der abgekürzten Überlebensordnung die mittlere Lebensdauer  $\overset{\circ}{e}_x$  ( $x = 5n \leq 85$ ) mit genügender Genauigkeit berechnen kann, wobei von  $\overset{\circ}{e}_{75} \doteq 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}$  ausgegangen wird.

### 1. Einführung

Die seit geraumer Zeit beobachtete und noch nicht zum Stillstand gekommene Verminderung der Sterblichkeit in fast allen Ländern ist einer der Gründe für das steigende Interesse an den Methoden der Sterblichkeitsmessung. Hinzu kommt, dass das oft als demographische «Explosion» zitierte intensive Wachsen der Bevölkerung in den meisten Entwicklungsländern – deren Hauptgrund eben jene Verminderung der Sterblichkeit ist – die Wichtigkeit demographischer Untersuchungen und Voraussagen in Evidenz gesetzt hat. Auf der anderen Seite haben die hierdurch bedingte öftere Überprüfung oder Neuaufstellung

von Sterbetafeln sowie die in den Entwicklungsländern häufig hinzukommenden Lücken oder Ungenauigkeiten in den statistischen Grundlagen die allgemeine Aufmerksamkeit auf möglichst einfache Methoden der Herstellung von Sterbetafeln gelenkt, welche darauf verzichten, die Sterbenswahrscheinlichkeiten mit grösstmöglicher «Genauigkeit» wiederzugeben – die ohnehin durch die Entwicklung in Kürze überholt wird oder wegen der Lücken und Fehlerquellen in den Grunddaten sinnlos geworden ist –, Methoden, welche aber trotzdem zu Werten führen, die im gegebenen Zeitpunkt für die Sterblichkeit der beobachteten Bevölkerung innerhalb der natürlichen Fehlergrenzen repräsentativ sind.

Wenn von «abgekürzten Sterbetafeln» oder genauer von abgekürzten Verfahren der Sterblichkeitsmessung die Rede ist, so handelt es sich im allgemeinen um das Zusammentreffen von zwei charakteristischen Eigenschaften: einerseits um jene vereinfachten, «abgekürzten» Rechenmethoden und andererseits (und hierin liegt ein wesentliches Element der Vereinfachung) um die Herstellung von «abgekürzten» Tafeln im engeren Sinne; hierbei werden nicht mehr für jedes Alter  $x$ ,  $0 \leq x \leq \omega$ , die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q_x$  bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p_x$  berechnet, sondern es werden meist nur noch für jedes fünfte  $x$  die fünfjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten  ${}_5q_x$  bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten  ${}_5p_x$  (seltener für jedes zehnte  $x$  die entsprechenden 10jährigen Wahrscheinlichkeiten) bei vorheriger Zusammenfassung der Gesamtheiten der Lebenden bzw. der Toten nach den entsprechenden Altersgruppen bestimmt. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten  ${}_5p_x$  führen unmittelbar zur abgekürzten Überlebensordnung  $l_{5n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Es ist natürlich auch möglich, dann durch Interpolation eine angenäherte vollständige Tafel aufzustellen.

Meist begnügt man sich, die  ${}_5p_x$  und die zugehörige Überlebensordnung bis etwa zum Alter  $x = 80$  oder  $x = 85$  aufzustellen, da für höhere Alter kaum mehr direkte Berechnungen, sondern nur noch Extrapolationen in Frage kommen.

Auch in vorliegender Arbeit wird die abgekürzte Sterblichkeitsmessung in jenem doppelten Sinne verstanden.

Im Abschnitt 3 werden zunächst einige bekannte Methoden kurz skizziert, die das Verständnis der neuen Methode wesentlich erleichtern werden. Diese selbst wird im Abschnitt 4 entwickelt; hierbei wird von

der bekannten Tatsache ausgegangen, dass für jüngere und mittlere Alter, z.B. in  $5 \leq x \leq 40$ , mit guter Annäherung die Beziehung:

$${}_5p_x \doteq (1 - q_{x+2})^5 \doteq (1 - q_{x,x+4})^5$$

besteht, wobei  $q_{x,x+4}$  die gewogene durchschnittliche einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit der Alter  $x, x+1, \dots, x+4$  bedeutet<sup>1)</sup>. Die Aufgabe besteht darin, geeignete Korrekturen für höhere Alter zu finden. Während in früheren Arbeiten<sup>2)</sup> versucht wurde, den Exponenten zu korrigieren – was bei genauer Anwendung zu logarithmischem Rechnen zwingt –, wird hier der Exponent 5 unverändert gelassen und statt dessen eine Korrektur der Basis vorgenommen. Auf Grund theoretischer Überlegungen in enger Verbindung mit empirischen Methoden ergab sich für  $45 \leq x \leq 70$  die einfache, aber wirksame Formel:

$${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x,x+4})^5,$$

wobei

$$\alpha = 1 + 2\delta$$

und  $\delta$  die durchschnittliche Differenz zweier aufeinanderfolgender  $q_x$  innerhalb des Intervalls  $[x-5, x+5]$  ist, oder angenähert:

$$\delta \doteq \frac{1}{10} (q_{x+5, x+9} - q_{x-5, x-1}).$$

Die Formel ist natürlich auch in  $5 \leq x \leq 40$  anwendbar, nur dass hier die Differenz zwischen  $q_{x, x+4}$  und  $\alpha q_{x, x+4}$  für alle praktischen Zwecke vernachlässigt werden kann.

Für die letzten Alter ( $x = 75, 80, 85$ ) wird eine zusätzliche Korrektur benötigt, wobei

$$\alpha = 1 + 2\delta(1 + q_{x, x+4})$$

gewählt wurde. Diese zusätzliche Korrektur bedeutet übrigens nur eine unter mehreren Möglichkeiten, und es ist durchaus zu hoffen, dass die Weiterverfolgung des hier angewandten Verfahrens zu wirksameren Formeln führen werde. Wir haben bei obigem Wert für  $\alpha$  vor allem einen Ausgleich zwischen Genauigkeit und Einfachheit erstrebt.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen früherer Arbeiten hängen hier die Korrekturen mit der Struktur der jeweiligen Sterbetafel zusammen und erlauben im allgemeinen eine bessere Anpassung.

<sup>1)</sup> Bei linearem Verlauf von  $l_x$  im Altersintervall  $[x, x+5]$  ist  $q_{x+2} = q_{x, x+4}$ .

<sup>2)</sup> Vergleiche die Methoden c) und d) im Abschnitt 3.

Im letzten Abschnitt wird auf die Bestimmung der *mittleren Lebensdauern*  $\ell_x$  eingegangen, welche für den Vergleich des Gesamtverlaufs der Sterbenswahrscheinlichkeiten bzw. der zugehörigen Überlebensordnungen von besonderer Wichtigkeit sind. Bei einer abgekürzten Überlebensordnung, die z. B. bei  $l_{85}$  abbricht, stellt sich in erster Linie die Aufgabe, auch ohne Kenntnis der  $l_x$ ,  $x > 85$ , mit genügender Genauigkeit  $\ell_{85}$  oder ein anderes  $\ell_z$ ,  $z < 85$ , zu bestimmen und dann durch geeignete Näherungsformeln die mittlere Lebensdauer auch für die übrigen Alter  $5n$  zu berechnen. Eine empirische Untersuchung ergab einen sehr einfachen linearen Zusammenhang zwischen  $\ell_{75}$  einerseits und  $l_{75}$  und  $l_{85}$  andererseits:

$$\ell_{75} \doteq 3,5 + 13,5 \frac{l_{85}}{l_{75}} = 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}.$$

Die Probe mit den verschiedensten Überlebensordnungen zeigt eine überraschend gute Übereinstimmung mit den genauen Tafelwerten. Es ist dann ein leichtes, von  $\ell_{75}$  ausgehend mittels einer Näherungsformel  $\ell_x$  sowohl für  $x = 5n < 75$  wie auch für die Alter 80 und 85 zu berechnen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Herren N.S. Iyer und J. Svoboda in Genf für ihre freundliche Hilfe bei der Ausführung der umfangreichen Hilfs- und Proberechnungen und der Berechnung der Beispiele zu danken.

## 2. Bezeichnungen

$l_x$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$  = Überlebensordnung.

$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$  = einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit im Alter  $x$ .

$q_x = 1 - p_x$  = einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter  $x$ .

${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = p_x p_{x+1} \dots p_{x+n-1}$  =  $n$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit im Alter  $x$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen, das Alter  $x + n$  zu erleben.

${}_nq_x = 1 - {}_np_x$  =  $n$ -jährige Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter  $x$ .

$$q_{x, x+n-1} = \frac{l_x q_x + l_{x+1} q_{x+1} + \dots + l_{x+n-1} q_{x+n-1}}{l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+n-1}} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x + \dots + l_{x+n-1}}$$

= gewogenes Mittel der Sterbenswahrscheinlichkeiten (oder mittlere einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit) in den Altern  $x, x+1, \dots, x+n-1$ .

$m_x$  = zentrales Sterblichkeitsverhältnis oder Sterblichkeitskoeffizient im Altersintervall  $[x, x+1]$ ,

$$= \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_x^{x+1} l_\xi d\xi} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})} = \frac{2q_x}{2 - q_x}.$$

Hieraus:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}.$$

Ähnlich sei definiert:

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_\xi d\xi}.$$

Ist  $l_x$  im ganzen Intervall  $[x, x+n]$  linear, so ist:

$${}_n m_x = \frac{2{}_n q_x}{2n - {}_n q_x},$$

doch ist diese Voraussetzung für höhere Alter auch nicht mehr annähernd erfüllt. Setzt man jedoch  $l_x$  nur in jedem einjährigen Teilintervall linear voraus – was fast immer ohne allzu grosse Fehler getan werden kann –, erhält man:

$${}_n m_x = \frac{2q_{x, x+n-1}}{2 - q_{x, x+n-1}}$$

und umgekehrt:

$$q_{x, x+n-1} = \frac{2{}_n m_x}{2 + {}_n m_x},$$

also die gleichen Beziehungen, wie sie zwischen  $q_x$  und  $m_x$  bestehen<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Siehe auch *H. Wiesler*: «Einfache Methode für die Erstellung einer abgekürzten Sterbetafel», Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 1951, p. 310–328.

Im allgemeinen kann  ${}_n m_x$  und damit auch  $q_{x, x+n-1}$  unmittelbar aus den durch die Sterberegister und eine Volkszählung gegebenen Gesamtheiten der Toten bzw. Lebenden berechnet werden. Wir können hier auf die Beschreibung von Einzelheiten verzichten, die in der einschlägigen Literatur ausführlich behandelt worden sind<sup>1)</sup>.

Die mittlere Lebensdauer  ${}_x e_x$  ist gegeben durch:

$${}_x e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_x^{\omega} l_{\xi} d\xi}{l_x} = \frac{\sum_{\xi=x}^{\omega} l_{\xi}}{l_x} - \frac{1}{2}.$$

Im Abschnitt 5 werden Näherungsformeln zur Bestimmung von  ${}_x e_x$  aus den Werten einer abgekürzten Sterbetafel angegeben werden.

### 3. Einige bekannte Methoden

Es seien die Grundzüge einiger bekannter abgekürzter Methoden der Sterblichkeitsmessung skizziert, wobei es vor allem darauf ankommt, die verschiedenen Ausgangspunkte der Methoden zu verdeutlichen.

a) *Methode von King*<sup>2)</sup>. – Obwohl diese ältere Methode nicht zu den abgekürzten Verfahren im eigentlichen Sinne gehört, sei sie hier erwähnt, da sie ein wichtiges Element mit jenen gemeinsam hat.

Man geht in dieser Methode von in 5-Altersjahrgruppen zusammengefassten Gesamtheiten der Lebenden und der Toten aus und bezieht dieselben auf die Mittelpunkte  $x + 2$  der Altersintervalle («pivotal ages», «Stützalter»); dies geschieht durch eine stark ausgleichende Verteilungsfunktion, die jeweils auf mehrere anliegende Gruppen übergreift. Es werden nun die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q_{x+2}$  in den «pivotal ages» bestimmt und dann die  ${}_5 p_{x+2}$  durch eine geeignete Interpolationsformel (in welche die einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p_{x-3}$ ,  $p_{x+2}$ ,  $p_{x+7}$  und  $p_{x+12}$  eingehen) berechnet.

<sup>1)</sup> Siehe z. B. die im Abschnitt 3 angeführte Literatur.

<sup>2)</sup> Eine Übersicht über die *Kingsche* Methode findet sich z. B. in *L. I. Dublin* and *A. J. Lotka*; «Length of Life», New York 1936.

b) *Methode von L. Reed und M. Merrell*<sup>1)</sup>. — Es werden die Sterblichkeitskoeffizienten  ${}_n m_x$  aus den gegebenen Gesamtheiten der Toten und Lebenden berechnet und dann eine Exponentialformel für die Beziehung zwischen  ${}_n m_x$  und  ${}_n q_x$  aufgestellt:

$${}_n q_x \doteq 1 - e^{-{}_n m_x - \alpha n^3 {}_n m_x^2},$$

wobei  $\alpha = 0,008$  empirisch bestimmt wurde. Eine der Arbeit beigelegte Tabelle erleichtert die Berechnung von  ${}_n q_x$  für  $n = 5$  und  $n = 10$ .

Es sei bemerkt, dass bei in jedem einjährigen Teilintervall linearem  $l_x$  die Reed-Merrell'sche Formel in  ${}_n p_x \doteq (1 - q_{x, x+n-1})^{n(1+g)}$  übergeführt werden kann, wobei  $g = g(\alpha, n, q_{x, x+n-1})$  und  $g(\alpha, n, 0) = 0$ .

c) *Sterbetafeln 1951 für Wales und Grosslondon*. — Die Sterbetafeln für England und Wales, 1951<sup>2)</sup>, enthalten ausser der vollständigen englischen Sterbetafel auch abgekürzte Tafeln für Wales und Grosslondon. Zur Herstellung dieser abgekürzten Tafeln wurden zuerst die «pivotal»-Werte  $q_{x+2}$  in den Altern  $x+2 = 7, 12, 17, \dots, 87$  und dann die  ${}_5 p_x$  durch die Näherungsformel

$${}_5 p_x \doteq p_{x+2}^{5(1+\beta)}$$

berechnet. Hierbei wurde  $\beta = 0$  für  $x < 40$  und  $\beta = 0,008$  für  $x \geq 40$  genommen.

d) *Methode von H. Wiesler*<sup>3)</sup>. — Diese Methode hat einige Elemente mit der vorangehenden gemeinsam, und beide ergeben für  $5 \leq x < 40$  praktisch die gleichen Werte. Aus den gegebenen Gesamtheiten der Toten und Lebenden werden die einjährigen Durchschnittswahrscheinlichkeiten  $q_{x, x+n-1}$  errechnet und dann zur Bestimmung von  ${}_n p_x$  der Ansatz

$${}_n p_x \doteq (1 - q_{x, x+n-1})^{t_{x, x+n-1}}$$

gemacht. Die Exponenten  $t_{x, x+n-1}$  wurden empirisch als mittlere Werte der zu einer Anzahl von europäischen Sterbetafeln gehörigen Exponenten

<sup>1)</sup> L. J. Reed and M. Merrell: «A Short Method for Constructing an Abridged Life Table», The Am. Journal of Hygiene, Vol. 30, Nr. 2, 1939 (Nachdruck in U. S. Bureau of the Census, Vital Statistics – Special Reports, Vol. IX, Nr. 54).

Eine mathematische Grundlegung und eine wesentliche Erweiterung des Verfahrens finden sich in T. N. E. Greville: «Short Methods of Constructing Abridged Life Tables», The Record, Am. Inst. of Actuaries, Vol. XXXII, Part I, Nr. 65, 1943.

<sup>2)</sup> The Registrar General's Decennial Supplement, England and Wales, 1951, Life Table; London, Her Majesty's Stationary Office, 1957.

<sup>3)</sup> H. Wiesler: loc. cit.



für Männer und Frauen getrennt bestimmt, wobei sich folgende Werte für  $n = 5$  (erste Altersgruppe  $n = 4$ ) ergaben:

Altersgruppe	Werte von $t_{x, x+n-1}$	
	Männer	Frauen
1— 4	3,99	3,99
5— 9	5	5
.....	.....	.....
40—44	5	5
45—49	5,005	5
50—54	5,010	5,007
55—59	5,016	5,012
60—64	5,026	5,020
65—69	5,045	5,036
70—74	5,068	5,062
75—79	5,110	5,100
80—84	5,165	5,151

Es sei bemerkt, dass die Unterschiede nach Geschlecht nicht strukturell bedingt zu sein scheinen, sondern im wesentlichen durch die Tatsache, dass im allgemeinen die Sterblichkeit der Frauen niedriger als die der Männer ist.

#### 4. Eine neue elementare Methode

##### Allgemeines

Sämtliche im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren setzen sich aus zwei Schritten zusammen:

a) Aus den Grundgesamtheiten der Toten und Lebenden, die auf Gruppen von je  $n$  Altern verteilt seien, werden entweder einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten in je  $n$  Jahren auseinanderliegenden «Stützaltern» («pivotal ages») berechnet oder aber Durchschnittswerte des Sterbekoeffizienten oder der Sterbenswahrscheinlichkeiten in den gegebenen  $n$ -jährigen Altersintervallen.

b) Mit Hilfe der so erhaltenen Werte werden die  $n$ -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten  ${}_np_x$  bestimmt, welche dann unmittelbar zur Erstellung der «abgekürzten» Überlebensordnung  $l_x$  für jedes  $n$ -te Alter, führen.

In bezug auf Schritt *a*) geben wir in vorliegender Arbeit unter den sich anbietenden Alternativen den bereits von *H. Wiesler* benutzten einjährigen Durchschnittswerten  $q_{x, x+4}$  den Vorzug, welche entweder auf dem Umweg über die  $m_x$  oder unmittelbar aus den Gesamtheiten der Toten und Lebenden berechnet werden. Wir wollen uns hier nicht mit den bereits bekannten Verfahren des ersten Schrittes aufhalten, sondern unter der Voraussetzung, dass die Werte  $q_{x, x+4}$  in geeigneter Weise berechnet worden sind<sup>1)</sup>, unsere Aufmerksamkeit auf die Bestimmung der  ${}_np_x$  richten, wobei wir von dem in der Einleitung erwähnten Ansatz

$${}_np_x \doteq (1 - \alpha q_{x, x+n-1})^n$$

ausgehen werden.

Für die erste Altersgruppe,  $1 \leq x \leq 4$ , die gesondert behandelt werden wird, ist  $n = 4$ , sonst stets  $n = 5$ . Es wird auf die Bestimmung von  $q_0$  verzichtet, da diese notwendigerweise ausserhalb des allgemeinen Verfahrens fällt. Was die höheren Alter betrifft, werden die direkten Berechnungen im allgemeinen nicht über die mit  $x = 85$  beginnende Altersgruppe hinausführen. So wird auch in vorliegender Arbeit diese Altersgruppe als letzte berücksichtigt, obzwar die Hauptformel in einigen Fällen auch noch für höhere Alter brauchbare Werte ergeben mag.

### Bestimmung von ${}_4p_1$

Im allgemeinen ergibt  $(1 - q_{1,4})^4$  eine genügend gute Annäherung für  ${}_4p_1$ ; nur bei höheren Sterbenswahrscheinlichkeiten in diesen jungen Altern ergeben sich Abweichungen. Um eine auch in diesen Fällen allgemein anwendbare Formel zu erhalten, ersetzen wir  $q_{1,4}$  durch  $\alpha q_{1,4}$ ;  $\alpha$  hängt vom Verlauf der Funktion  $q_x$  in dem Intervall  $1 \leq x \leq 4$  ab, und dieser wiederum ist durch die Werte  $q_{1,4}$  und  $q_{5,9}$  beeinflusst. Der einfache lineare Ansatz

$$1 - \alpha = a q_{1,4} + b q_{5,9}$$

---

<sup>1)</sup> Ist z.B.  ${}_5P_x$  die auf die Mitte des Beobachtungsjahres bezogene Anzahl der Personen der gezählten Bevölkerung im Alter zwischen  $x$  und  $x + 5$  und  ${}_5D_x$  die Anzahl der im Laufe des Beobachtungsjahres im Alter zwischen  $x$  und  $x + 5$  Gestorbenen, so ist:

$${}_5m_x \doteq \frac{{}_5D_x}{{}_5P_x}, \quad q_{x, x+4} \doteq \frac{{}_5D_x}{{}_5P_x + \frac{1}{2} {}_5D_x}.$$

führt auf empirischem Wege (unter mehreren Alternativen) zu

$$1 - \alpha = 0,6 q_{1,4} - 0,5 q_{5,9}$$

und

$${}_4p_1 \doteq (1 - \alpha q_{1,4})^4. \quad (1)$$

Ein Vergleich mit Sterbetafeln verschiedenster Art<sup>1)</sup> in Tabelle 1 verdeutlicht den Grad der Genauigkeit der Formel.

Tabelle 1

Vergleichswerte zur Bestimmung von  ${}_4p_1$

$$(1 - \alpha = 0,6 q_{1,4} - 0,5 q_{5,9})$$

Tafel	${}_4p_1 = \frac{l_5}{l_1}$	$(1 - q_{1,4})^4$	$(1 - \alpha q_{1,4})^4$
<i>Berlin-West, 1949/51</i>			
Frauen . . . . .	0,99256	0,99255	0,99256
<i>Grossbritannien, 1951</i>			
Männer . . . . .	0,99434	0,99433	0,99434
<i>Indien, 1931</i>			
Männer . . . . .	0,80080	0,79577	0,80083
<i>Japan, 1957/58</i>			
Männer . . . . .	0,98550	0,98549	0,98551
<i>Neuseeland, 1950/52</i>			
Nicht-Maori: Männer . . . . .	0,99465	0,99464	0,99465
<i>Neuseeland, 1950/52</i>			
Maori: Männer . . . . .	0,97027	0,97010	0,97020
<i>Schweden, 1951/55</i>			
Frauen . . . . .	0,99617	0,99617	0,99617
<i>Spanien, 1952</i>			
Staatsangestellte . . . . .	0,97276	0,97265	0,97275
<i>Jones Tropical</i> . . . . .	0,95641	0,95641	0,95646
<i>USA, 1949/51</i>			
(weisse) Frauen . . . . .	0,99543	0,99543	0,99544
<i>Venezuela, 1941/42</i>			
Männer und Frauen . . . . .	0,91535	0,91436	0,91524

<sup>1)</sup> Bei der Auswahl der Sterbetafeln für obige und auch die folgenden Tabellen wurde versucht, Bevölkerungen verschiedenen Geschlechts und verschiedener Länder und neben Tafeln neueren Datums auch ältere Tafeln zu berücksichtigen.

### Bestimmung von ${}_5p_x$ , $x \geq 5$

a)  $5 \leq x \leq 40$ . In der Einleitung wurde auf die bekannte Tatsache hingewiesen, dass für dieses Altersintervall mit grosser Genauigkeit gilt<sup>1)</sup>:

$${}_5p_x \doteq (1 - q_{x, x+4})^5 \doteq (1 - q_{x+2})^5. \quad (2)$$

In Sterbetafeln, die von nicht ausgeglichenen Hauptgesamtheiten der Lebenden und Toten ausgehen und deren direkt für jedes Alter  $x$  berechnete  $q_x$  auch nachträglich nicht ausgeglichen wurden, unterliegen die  $q_{x+2}$  und damit auch die  $(1 - q_{x+2})^5$  meist starken Schwankungen, während die  $q_{x, x+4}$  auf Grund ihrer Konstruktion die Schwankungen je innerhalb des zugehörigen 5jährigen Altersintervalls zum grössten Teil ausgleichen. Da Ähnliches auch für die  ${}_5p_x$  gilt, werden im allgemeinen die  $(1 - q_{x, x+4})^5$  sich besser an die Werte  ${}_5p_x$  anpassen.

Zur Begründung der Formel (2) sei folgendes hinzugefügt: Unter der Voraussetzung, dass  $l_x$  innerhalb eines 5-Jahres-Intervalls eine *lineare* Funktion des Alters sei, gilt für dieses Intervall *genau*:  $q_{x+2} = q_{x, x+4}$ . Ausserdem ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} {}_5p_x &= 1 - 5q_{x, x+4} + 10q_{x, x+4} \frac{d_x}{l_x}, \quad (d_x = l_x - l_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2} \dots) \\ &\doteq 1 - 5q_{x, x+4} + 10q_{x, x+4}^2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt (unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung):

$$(1 - q_{x, x+4})^5 \doteq 1 - 5q_{x, x+4} + 10q_{x, x+4}^2.$$

Hierbei sei bemerkt, dass in beiden Fällen die linke Seite kleiner als die rechte ist. Da für  $5 \leq x \leq 40$  die Annahme des linearen Abfalls der Funktion  $l_x$  in je einem 5jährigen Altersintervall ohne grössere Fehler gemacht werden kann, führt der Vergleich der beiden Ergebnisse unmittelbar zur Näherungsformel (2).

b)  $45 \leq x \leq 70$ . Für  $x \geq 45$  würde Formel (2) zu allzu groben Abweichungen führen; auch entfernen sich in hohen Altern die Werte  $q_{x+2}$  und  $q_{x, x+4}$  immer mehr voneinander<sup>2)</sup>. Um eine bessere Annäherung zu erreichen, gehen wir *versuchsweise* von der Hypothese aus, dass die Werte  $q_x$  je innerhalb eines Fünf-Jahres-Intervalls linear wachsen; d. h.  $\delta = q_{x+1} - q_x = q_{x+2} - q_{x+1} = \dots = q_{x+5} - q_{x+4}$ .

<sup>1)</sup> Siehe auch Methoden c) und d) des vorangehenden Abschnitts 3.

<sup>2)</sup> Für hohe Alter ist meist  $q_{x+2} > q_{x, x+4}$ . Da  $(1 - q_{x, x+4})^5$  zu grosse Werte für  ${}_5p_x$  liefert, ist in diesen Altern  $(1 - q_{x+2})^5$  eine bessere, wenn auch nicht ganz befriedigende Annäherung; siehe auch Bemerkung auf Seite 75.

Wir setzen jeweils näherungsweise:

$$\delta \doteq \frac{1}{10}(q_{x+5, x+9} - q_{x-5, x-1}).$$

Zunächst gilt ganz allgemein:

$$q_{x, x+4} = \frac{l_x - l_{x+5}}{l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+4}} = \frac{1 - {}_5p_x}{1 + {}_1p_x + {}_2p_x + \dots + {}_4p_x},$$

daher

$${}_5p_x = 1 - q_{x, x+4} A, \quad (A = 1 + {}_1p_x + {}_2p_x + \dots + {}_4p_x).$$

Setzt man

$${}_mp_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \dots (1 - q_{x+m-1})$$

und

$$q_{x+r} = q_{x+2} + (r-2)\delta,$$

so erhält man nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} {}_5p_x &= 1 - 5q_{x, x+4}(1 + 2\delta) + 10q_{x, x+4}q_{x+2} - 10q_{x, x+4}q_{x+2}^2 \\ &\quad + 5q_{x, x+4}q_{x+3}^3 - q_{x, x+4}q_{x+2}^4 + \Phi(\delta^\lambda q_{x, x+4}^\varrho q_{x+2}^\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\lambda + \varrho + \tau \geq 3, \lambda \geq 1).$$

Auf der anderen Seite ist (es sei  $\alpha = 1 + 2\delta$ ):

$$\begin{aligned} [1 - \alpha q_{x, x+4}]^5 &= 1 - 5q_{x, x+4}(1 + 2\delta) + 10q_{x, x+4}^2 - 10q_{x, x+4}^3 \\ &\quad + 5q_{x, x+4}^4 - q_{x, x+4}^5 + \Psi(\delta^\lambda q_{x, x+4}^\varrho), \end{aligned} \quad (4)$$

$$(\lambda + \varrho \geq 3, \lambda \geq 1).$$

Da der Unterschied zwischen  $q_{x, x+4}$  und  $q_{x+2}$  klein gegenüber  $q_{x, x+4}$  ist und sich nur in höheren Altern bemerkbar macht, ergibt sich die Näherungsformel:

$$\begin{aligned} {}_5p_x &= (1 - \alpha q_{x, x+4})^5, \quad \alpha = 1 + 2\delta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta = \frac{1}{10}(q_{x+5, x+9} - q_{x-5, x-1}).$$

Wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist, ergibt Formel (5) bezüglich der verschiedensten Sterbetafeln tatsächlich für die Alter zwischen 45 und 70 einen überraschend guten Näherungswert, wodurch unsere Arbeitshypothese gerechtfertigt erscheint. Natürlich kann Formel (5) auch für  $x < 45$  angewandt werden, liefert jedoch in diesen Altern Werte, welche mit den aus Formel (2) gewonnenen praktisch identisch sind.

Vergleich von  ${}_5p_x$  und  $(1 - \alpha q_{x, x+4})^5 = {}_5p_x^*$  Tabelle 2

$(\alpha = 1 + 2\delta; x = 50, 60, 70)$

Tafel	$x = 50$		$x = 60$		$x = 70$	
	${}_5p_x$	${}_5p_x^*$	${}_5p_x$	${}_5p_x^*$	${}_5p_x$	${}_5p_x^*$
<i>Berlin-West, 1949/51</i>						
Frauen . . . . .	0,96566	0,96566	0,92320	0,92319	0,78573	0,78579
<i>Grossbritannien, 1951</i>						
Männer . . . . .	0,94763	0,94763	0,86503	0,86502	0,70424	0,70431
<i>Indien, 1931</i>						
Männer †) . . . . .	0,79990	0,79989	0,72142	0,72141	0,54690	0,54731
<i>Japan, 1957/58</i>						
Männer . . . . .	0,94439	0,94439	0,86523	0,86523	0,69631	0,69641
<i>Neuseeland, 1950/52</i>						
Nicht-Maori: Männer . .	0,95535	0,95535	0,88786	0,88786	0,74828	0,74831
<i>Neuseeland, 1950/52</i>						
Maori: Männer . . . . .	0,89993	0,89993	0,79388	0,79394	0,65804	0,65808
<i>Schweden, 1951/55</i>						
Frauen . . . . .	0,97320	0,97318	0,93349	0,93347	0,80721	0,80716
<i>Spanien, 1952</i>						
Staatsangestellte . . . .	0,94627	0,94626	0,88186	0,88186	0,74388	0,74393
<i>Jones Tropical . . . . .</i>	0,87315	0,87315	0,77273	0,77275	0,56852	0,56892
<i>USA, 1949/51</i>						
(weisse) Frauen . . . . .	0,96707	0,96707	0,92188	0,92187	0,80534	0,80539
<i>Venezuela, 1941/42</i>						
Männer und Frauen . . .	0,90844	0,90843	0,84339	0,84340	0,73257	0,73254
†) Bei der hohen Sterblichkeit dieser Tafel sollte für $x = 70$ bereits Formel (6) angewandt werden; sie ergäbe ${}_5p_x^{**} = 0,5467$ .						

*Bemerkung.* Unter der gleichen Voraussetzung, dass nämlich  $p_x$  in  $[x, x + 5]$  linear ist, ergibt sich ferner:

$${}_5p_x = p_{x+2}^5 - 5p_{x+2}^3 \delta^2 + 4p_{x+2} \delta^4.$$

Da  $\delta$  für mittlere Alter sehr klein ist, erhält man:

$${}_5p_x \doteq p_{x+2}^5 \tag{2a}$$

und nach Obigem dann auch:

$$q_{x+2} \doteq (1 + 2\delta) q_{x, x+4}.$$

Wie schon gesagt<sup>1)</sup>, liefert Formel (2a) in hohen Altern eine bessere Annäherung als  $(1 - q_{x, x+4})^5$ , jedoch ist auch diese meist ungenügend. Ausserdem können die  $q_{x+2}$  nicht unmittelbar aus den Hauptgesamtheiten der Lebenden und Toten ermittelt werden.

c)  $x \geq 75$ . Für diese Alter sind die Werte  $q_{x, x+4}$  und  $\delta$  zu gross, als dass die Glieder  $\Phi$  und  $\Psi$  vernachlässigt werden könnten; auch darf dann in Formel (3)  $q_{x+2}$  nicht mehr ohne grösseren Fehler durch  $q_{x, x+4}$  ersetzt werden.

Wieder machen wir den Ansatz:

$${}_5p_x \doteq (1 - \tilde{\alpha} q_{x, x+4})^5,$$

wobei wir

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \varphi(\delta'' q_{x, x+4}^\mu), \quad (\alpha = 1 + 2\delta),$$

annehmen. Zahlreiche Versuche zeigen, dass bereits  $\varphi = 2\delta q_{x, x+4}$ , d. h.

$$\tilde{\alpha} = 1 + 2\delta(1 + q_{x, x+4}),$$

eine genügend gute Annäherung ergibt. Die Formel

$${}_5p_x \doteq (1 - \tilde{\alpha} q_{x, x+4})^5, \quad (6)$$

$$(\tilde{\alpha} = 1 + 2\delta(1 + q_{x, x+4}))$$

hat allgemeine Gültigkeit in ganz  $5 \leq x \leq 85$ , jedoch ergibt sie in den Intervallen  $5 \leq x \leq 40$  bzw.  $45 \leq x \leq 70$  praktisch dieselben Werte wie Formel (2) bzw. Formel (5).

*Bemerkung.* Dem additiven Korrektionsglied  $\varphi = 2\delta q_{x, x+4}$  haftet eine gewisse Willkür an. Unter mehreren sich anbietenden Möglichkeiten haben wir diese vorgezogen, weil sie ein geeigneter Kompromiss zwischen Einfachheit und Genauigkeit zu sein scheint.

Tabelle 3 gibt einen Vergleich zwischen den genauen Tafelwerten  ${}_5p_x$  und den Näherungswerten nach Formel (6) für die Alter 75, 80 und 85.

---

<sup>1)</sup> Siehe Fussnote 2, Seite 73.

Vergleich von  ${}_5p_x$  und  $(1 - \tilde{\alpha} q_{x, x+4})^5 = {}_5p_x^{**}$  Tabelle 3  
 $(\tilde{\alpha} = 1 + 2\delta(1 + q_{x, x+4}))$

Tafel	$x = 75$		$x = 80$		$x = 85$	
	${}_5p_x$	${}_5p_x^{**}$	${}_5p_x$	${}_5p_x^{**}$	${}_5p_x$	${}_5p_x^{**}$
<i>Berlin-West, 1949/51</i>						
Frauen . . . . .	0,6628	0,6629	0,5109	0,5101	0,3682	0,3679
<i>Grossbritannien, 1951</i>						
Männer . . . . .	0,5731	0,5730	0,4105	0,4106	0,2518	0,2519
<i>Indien, 1931</i>						
Männer . . . . .	0,3935	0,3928	0,2087	0,2098		
<i>Japan, 1957/58</i>						
Männer . . . . .	0,5607	0,5605	0,3915	0,3912	0,2105	0,2104
<i>Neuseeland, 1950/52</i>						
Nicht-Maori: Männer . .	0,6306	0,6305	0,4850	0,4846	0,3074	0,3074
<i>Neuseeland, 1950/52</i>						
Maori: Männer . . . . .	0,5507	0,5505	0,4061	0,4059	0,2444	0,2443
<i>Schweden, 1951/55</i>						
Frauen . . . . .	0,6863	0,6862	0,5187	0,5186		
<i>Spanien, 1952</i>						
Staatsangestellte . . . .	0,6334	0,6332	0,4933	0,4931	0,3346	0,3344
<i>Jones Tropical . . . . .</i>	0,4220	0,4217	0,2630	0,2628	0,1242	0,1235
<i>USA, 1949/51</i>						
(weisse) Frauen . . . . .	0,6990	0,6990	0,5614	0,5613	0,4058	0,4056
<i>Venezuela, 1941/42</i>						
Männer und Frauen . . .	0,6256	0,6255	0,4696	0,4695	0,2871	0,2871

Zusammenfassend empfehlen sich für die Anwendung der Hauptformel:

$${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x, x+4})^5$$

die folgenden Werte für  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} 5 \leq x \leq 40 & \quad \alpha = 1, \\ 45 \leq x \leq 70 & \quad \alpha = 1 + 2\delta, \quad \left[ \delta = \frac{1}{10} (q_{x+5, x+9} - q_{x-5, x-1}) \right] \\ 75 \leq x \leq 85 & \quad \alpha = 1 + 2\delta(1 + q_{x, x+4}). \end{aligned}$$

Tabelle 4 zeigt zum Abschluss ein vollständig durchgerechnetes Beispiel, das insbesondere auch die Gleichheit der aus den Formeln (2), (5) und (6) ermittelten Werte in bestimmten jüngeren Altersgruppen zeigt.



$x$	$5p_x = \frac{l_{x+5}}{l_x}$	$(1 - \alpha q_{x, x+4})^5$ für		
		$\alpha = 1$	$\alpha = 1 + 2\delta$	$\alpha = 1 + 2\delta$ $\cdot (1 - q_{x, x+4})$
10	0,99724	0,99725	} ohne Änderung	} ohne Änderung
15	0,99529	0,99530		
20	0,99325	0,99327		
25	0,99271	0,99272		
30	0,99153	0,99153		
35	0,98864	0,98865		
40	0,98225	0,98228		
45	0,96961	0,96967	0,96961	0,96961
50	0,94763	0,94773	0,94763	0,94763
55	0,91349	0,91379	0,91349	0,91348
60	0,86503	0,86566	0,86502	0,86501
65	0,79815	0,79957	0,79815	0,79809
70	0,70424	0,70732	0,70431	0,70411
75	0,5731	0,5797	0,5737	0,5730
80	0,4105	0,4223	0,4122	0,4106
85	0,2518	0,2671	0,2547	0,2519

### 5. Bestimmung der mittleren Lebensdauer ${}^0e_x$

Es stellen sich zwei Aufgaben:

a) Da die abgekürzte Überlebensordnung  $l_x$  bei einem gegebenen  $x = z_0$  (z. B.  $z_0 = 85$  oder  $z_0 = 90$ ) abbricht, muss  ${}^0e_x$  für  $x = z_0$  oder ein anderes geeignetes  $z < z_0$  ohne Kenntnis der  $l_x$ ,  $x > z_0$ , bestimmt werden.

b) Unter der Voraussetzung der Kenntnis von  ${}^0e_z$  und damit von  $T_z = l_z {}^0e_z$  sollen die übrigen zur abgekürzten Tafel gehörigen  $T_x$  und  ${}^0e_x$  näherungsweise berechnet werden, indem man nur die in die abgekürzte Tafel einbezogenen Werte  $l_x$  benutzt.

<sup>1)</sup> The Registrar General's Decennial Supplement, England and Wales, 1951, Life Table; London, Her Majesty's Stationary Office, 1957.

### Bestimmung von ${}_0e_z = {}_0e_{75}$

In der Veröffentlichung der Vereinigten Nationen «Model Life Tables for Under-Developed Countries»<sup>1)</sup> wird zum Zweck der Bestimmung von  ${}_0e_0$  die folgende Faustregel für  $T_{85}$  angegeben:

$$T_{85} = \tau l_{85},$$

wobei  $\tau = {}_0e_{85}$  je nach dem Wert von  $l_{85}$  gewählt wird ( $l_0 = 100\,000$ ):

$l_{85}$	$\tau$
$\geq 15000$	4,4
$10000 \leq l_{85} < 15000$	4,0
$5000 \leq l_{85} < 10000$	3,5
$< 5000$	3,0

Es handelt sich natürlich hier nur um grobe Annäherungen, die in den meisten Fällen der Praxis und solange es sich nur um die Bestimmung von  ${}_0e_0$  handelt, genügen mögen.

Da es uns hier um die Berechnung beliebiger, zur abgekürzten Tafel gehöriger  ${}_0e_x$  geht, ist es wünschenswert, eine genauere Methode aufzustellen. Zu diesem Zwecke versuchen wir, den Wert  ${}_0e_z$  nicht nur von  $l_z$ , sondern von zwei Werten der Überlebensordnung abhängen zu lassen, genauer von dem Verhältnis

$${}_{10}p_z = \frac{l_{z+10}}{l_z},$$

welches die Stärke des Abfalles von  $l_z$  nach  $l_{z+10}$  misst und in einem gewissen Grade auch den allgemeineren weiteren Verlauf der Funktion  $l_x$  mitbestimmt.

Der lineare Ansatz

$${}_0e_z = \beta + \gamma \frac{l_{z+10}}{l_z}$$

ergab für  $z = 75$  unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (auf Werte von über 40 Überlebensordnungen) angenähert:

$${}_0e_{75} \doteq 3,5 + 13,5 \frac{l_{85}}{l_{75}} = 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}. \quad (7)$$

---

<sup>1)</sup> U.N. Population Studies No.22, New York 1955.

Eine analoge Beziehung mit den gleichen Koeffizienten 3,5 und 13,5 gilt auch für  $\ell_{80}^0$ , doch ist die Übereinstimmung zwischen dem genauen Wert und dem durch die Formel errechneten weniger ausgeprägt, so dass wir  $z = 75$  den Vorzug geben.

Die beigelegte graphische Darstellung gibt deutlich die enge, praktisch lineare Abhängigkeit von  $\ell_{75}^0$  und  $\frac{l_{85}}{l_{75}}$  wieder <sup>1)</sup>.

Figur 1

Die Beziehung  $\left(\ell_{75}^0, \frac{l_{85}}{l_{75}}\right)$  für 42 Überlebensordnungen

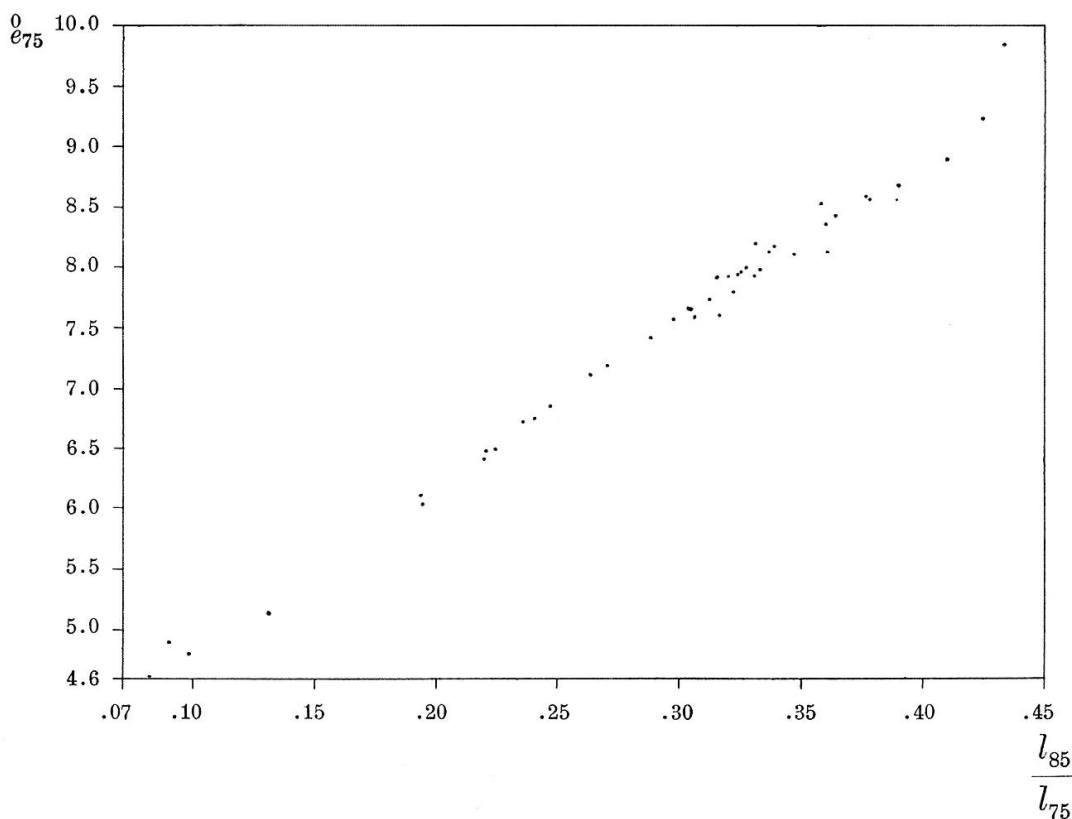


Tabelle 5 zeigt konkret für eine Reihe von Sterbetafeln die gute Übereinstimmung zwischen dem nach (7) berechneten  $\ell_{75}^0$  und den der Tafel selbst entnommenen Werten.

<sup>1)</sup> Statt der linearen Beziehung (7) hätte man auch eine solche höherer Ordnung wählen können. Jedoch schienen die Abweichungen von der linearen Ordnung so gering zu sein, dass eine Verfeinerung der Formel gegenüber den ohnehin gegebenen Fehlerquellen nicht gerechtfertigt erschien.

Vergleichswerte für  ${}^0e_{75}$

Tabelle 5

${}^0e_{75}$  = genauer, der Tafel entnommener Wert,

$${}^0e_{75}^* = 3,5 + 13,5 \frac{l_{85}}{l_{75}}.$$

Tafel		${}^0e_{75}$	${}^0e_{75}^*$
<i>Berlin-West, 1949/51</i>	Frauen . . . . .	8,15	8,07
<i>Grossbritannien, 1951</i>	Männer . . . . .	6,70	6,68
<i>Indien, 1931</i>	Männer . . . . .	4,61	4,61
<i>Japan, 1957/58</i>	Männer . . . . .	6,46	6,46
<i>Neuseeland, 1950/52</i>	Nicht-Maori: Männer . .	7,57	7,63
<i>Neuseeland, 1950/52</i>	Maori: Männer . . . . .	6,48	6,52
<i>Spanien, 1952</i>	Staatsangestellte . . . .	7,71	7,72
<i>Jones Tropical</i> . . . . .		4,96	5,00
<i>USA, 1949/51</i>	(weisse) Frauen . . . . .	8,87	8,80
<i>Venezuela, 1941/42</i>	Männer und Frauen . . .	7,42	7,47

Die beobachtete Übereinstimmung ist zum Teil durch die Tatsache bedingt, dass in den meisten Tafeln die Sterbens- oder Überlebenswahrscheinlichkeiten für hohe Alter nicht mehr direkt berechnet wurden, sondern durch geeignete Formeln in mehr oder weniger ähnlicher Weise extrapoliert worden sind.

Aus (7) folgt unmittelbar die im folgenden benützte Beziehung:

$$T_{75} = 3,5l_{75} + 13,5l_{85}. \quad (7a)$$

**Bestimmung von  ${}^0e_x$  ( $x \neq z = 75$ )**

Hier können wir auf bekannte Formeln hinweisen, von denen wir zwei herausgreifen:

i) In der vorhin zitierten Veröffentlichung der Vereinigten Nationen wird von der Näherungsformel

$${}_5L_x \doteq 2,5(l_x + l_{x+5}),$$

d.h.

$$T_x = \sum {}_5L_x = 5 \sum_{5\lambda=x}^{\omega} l_{5\lambda} - 2,5l_x \quad \text{ausgegangen.}$$

Ist ein  $T_z$ ,  $z > x$ , bekannt, so gilt:

$$T_x = 5 \sum_{5\lambda=x}^{z-5} l_{5\lambda} + T_z - 2,5(l_x - l_z).$$

In Verbindung mit (7a) ergibt sich dann:

$$T_x = 5 \sum_{5\lambda=x}^{75} l_{5\lambda} + l_{75} + 13,5l_{85} - 2,5l_x, \quad (x < 75). \quad (8)$$

Zur angenäherten Bestimmung von  $T_{80}$  und möglicherweise von  $T_{85}$  kann man dann die Rekursionsformel:

$$T_{x+5} = T_x - {}_5L_x \doteq T_x - 2,5(l_x + l_{x+5}) \quad \text{benützen.}$$

Die zugehörigen  ${}_0e_x$  werden aus der Beziehung  ${}_0e_x = T_x/l_x$  berechnet.

ii) Eine zweite Methode hängt unmittelbar mit dem hier angewandten Konstruktionsverfahren der abgekürzten Sterbetafel zusammen.

Aus

$$q_{x,x+4} = \frac{l_x - l_{x+5}}{l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+4}}$$

ergibt sich in der Tat:

$$l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+4} = \frac{l_x - l_{x+5}}{q_{x,x+4}} = {}_5A_x. \quad {}^1) \quad (9)$$

Daher für  $x < 75$ :

$$T_x = \sum_{5\lambda=x}^{70} {}_5A_{5\lambda} + T_{75} - 0,5(l_x - l_{75}) \quad (10)$$

und ähnlich für  $x > 75$ :

$$T_x = T_{75} - \sum_{5\lambda=75}^{x-5} {}_5A_{5\lambda} + 0,5(l_{75} - l_x).$$

Da die Beziehung (10) der Konstruktionsmethode der Tafel angepasst ist, wird man ihr den Vorzug geben.

Zum Zwecke des Vergleiches der Wirksamkeit der Formeln (8) und (10) greifen wir eine Tafel heraus: Japan 1957/58, Männer, für welche das nach (7) berechnete  ${}_0e_{75}$  genau gleich dem der Tafel entnommenen Werte ist. Es seien dann  ${}_0e_x^*$  die nach der genaueren Formel (10) und  ${}_0e_x^{**}$  die nach (8) berechneten Werte. Bei der Berechnung von  ${}_0e_x^*$  und  ${}_0e_x^{**}$  wurden nicht die  $l_x$  der Originaltafel benutzt, sondern die  $\tilde{l}_x$ , wie sie aus der Berechnung der  ${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x,x+4})^5$  hervorgehen würden.

---

<sup>1)</sup> Siehe Wiesler, loc. cit.

Vergleichswerte für  ${}_x^0\ell_x$  ( $5 \leq x \leq 85$ )

*Tabelle 6*

Japan, 1957/58 – Männer

$x$	${}_x^0\ell_x$	${}_x^*\ell_x$	${}_x^{**}\ell_x$
5	62,40	62,43	62,34
15	52,97	52,97	52,91
25	43,85	43,85	43,79
35	34,95	34,95	34,89
45	26,14	26,14	26,08
55	18,12	18,12	18,07
65	11,47	11,47	11,45
75	6,46	6,46	6,46
80	4,59	4,59	4,57
85	3,13	3,12	2,78

Wie man sieht – und auch an beliebig vielen anderen Beispielen bestätigen kann –, ergibt die einfach zu handhabende Formel (8) ebenfalls recht zufriedenstellende Werte.

## Résumé

Le présent travail a pour objet de développer une méthode élémentaire et approximative en vue du calcul des taux quinquennaux de survie  ${}_5p_x$  dans l'intervalle  $5 \leq x \leq 85$  et du taux initial  ${}_4p_1$ , dont la connaissance permet d'établir une table «abrégée» de mortalité (ou de survie). La méthode appliquée utilise le fait que la formule:  ${}_5p_x = (1 - q_{x,x+4})^5$  fournit dans l'intervalle  $5 \leq x \leq 40$  une approximation suffisante de la valeur réelle de  ${}_5p_x$ . Dans cette formule,  $q_{x,x+4}$  désigne le taux moyen annuel de mortalité correspondant aux âges  $x, x+1, \dots, x+4$ , et peut être calculé sur la base de données résultant de statistiques démographiques. Afin d'obtenir également des valeurs acceptables pour les âges avancés, les travaux publiés antérieurement prévoyaient une correction appropriée de l'exposant de la formule mentionnée ci-dessus. Dans le présent travail, l'auteur apporte une correction dans la base même de l'exponentielle en appliquant pour l'intervalle  $45 \leq x \leq 85$  la formule généralisée:  ${}_5p_x = (1 - \alpha q_{x,x+4})^5$ , où  $\alpha$  représente une simple fonction des taux  $q$  (voir page 77).

Le dernier chapitre du présent travail se propose de montrer qu'il est possible — sur la base d'une table abrégée de survie et sans l'aide d'interpolations ou d'extrapolations — de déterminer des valeurs suffisamment précises de l'espérance complète de vie  $\dot{e}_x$  ( $x = 5n \leq 85$ ) en calculant tout d'abord la valeur  $\dot{e}_{75} \doteq 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}$ .

## Summary

This paper gives an elementary and approximative method of computing the five year rates of survival  ${}_5p_x$  for  $5 \leq x \leq 85$  and the initial rate  ${}_4p_1$ , rates which determine an «abridged» life-table. The method is based on the fact, that for  $5 \leq x \leq 40$  the formula  ${}_5p_x = (1 - q_{x,x+4})^5$  gives a good approximation;  $q_{x,x+4}$  means here the average yearly mortality rate corresponding to the ages  $x, x+1, \dots, x+4$ , which can generally be calculated from population and vital statistics. While in previous studies the exponent in the above formula was corrected in order to produce suitable values also for higher ages, the present paper introduces a correction in the base itself:  ${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x,x+4})^5$ , for  $45 \leq x \leq 85$ , where  $\alpha$  is a very simple function of the rates  $q$  (see page 77).

The last section of the paper shows that it is possible to determine from an abridged life-table, without any inter- or extrapolation, sufficiently accurate values of the expectancies of life  $\dot{e}_x$  ( $x = 5n \leq 85$ ) starting with the calculation of  $\dot{e}_{75}$  given by:  $\dot{e}_{75} \doteq 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}$ .

## Riassunto

Il presente lavoro descrive un metodo elementare e approssimato di calcolo dei tassi quinquennali di sopravvivenza  ${}_5p_x$  per  $5 \leq x \leq 85$  e anche del valore iniziale  ${}_4p_1$ , sui quali si basa la costruzione di una tavola «ridotta» di mortalità. Il metodo è basato sul fatto che per  $5 \leq x \leq 40$  la formula:  ${}_5p_x = (1 - q_{x,x+4})^5$  fornisce valori quasi esatti; in tale formula il valore  $q_{x,x+4}$  denota il tasso annuo medio di mortalità corrispondente alle età  $x, x+1, \dots, x+4$ , e può essere dedotto dalle statistiche demografiche. Mentre in lavori anteriori, l'esponente della citata formula era normalmente aggiustato in modo da ottenere valori accettabili anche rispetto alle età avanzate, il presente lavoro introduce una correzione nella base dell'esponentiale:  ${}_5p_x \doteq (1 - \alpha q_{x,x+4})^5$  per  $45 \leq x \leq 85$ , in cui  $\alpha$  è una semplice funzione dei tassi  $q$  (vedasi pag. 77).

Nell'ultima parte si dimostra che in base ad una tavola ridotta di mortalità si potranno ottenere, con sufficiente approssimazione e senza ricorrere ad interpolazioni o ad estrapolazioni, i valori della vita media  $\dot{e}_x$  ( $x = 5n \leq 85$ ) calcolando innanzi tutto il valore:  $\dot{e}_{75} \doteq 3,5 + 13,5 {}_{10}p_{75}$ .