

Zum Dualitätstheorem der linearen Programmierung

Autor(en): **Romer, Bernhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **62 (1962)**

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555277>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zum Dualitätstheorem der linearen Programmierung

Von Bernhard Romer, Basel

Zusammenfassung

Das Dualitätstheorem der linearen Programmierung lässt sich wie das Haupttheorem durch vollständige Induktion beweisen. Der Verfasser führt dies durch und leitet daraus die Beziehung zwischen den für die Extremalstellen der Zielfunktionen verschwindenden Variablen im primären und dualen System her.

Es werde das Maximum der linearen Zielfunktion

$$X(n,k) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (1a)$$

gesucht, wobei die n nichtnegativen Variablen x_i k linearen Nebenbedingungen genügen sollen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i + x'_1 &= s_1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i + x'_2 &= s_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + x'_k &= s_k. \end{aligned} \quad (1b)$$

Die p_i , a_{hi} , s_h sind vorgegeben, die x'_h sind nichtnegative, als Schlupfvariable bezeichnete Veränderliche.

Das hiezu *duale Problem* lautet: Gesucht wird das Minimum der Zielfunktion

$$Y(k,n) = \sum_{h=1}^k s_h y_h, \quad (2a)$$

wenn die k nichtnegativen Variablen y_h die n Nebenbedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k a_{h1} y_h &= p_1 + y'_1 \\ \sum_{h=1}^k a_{h2} y_h &= p_2 + y'_2 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \sum_{h=1}^k a_{hn} y_h &= p_n + y'_n. \end{aligned} \tag{2b}$$

Die Konstanten s_h , a_{hi} , p_i stimmen mit den entsprechenden des Systems (1) überein, die y'_i sind nichtnegative Schlupfvariable.

Das *Dualitätstheorem* sagt aus:

Das Maximum von $X(n,k)$ stimmt mit dem Minimum von $Y(k,n)$ überein – sofern sie existieren –, wenn die obigen Nebenbedingungen erfüllt sind.

Das sogenannte *Haupttheorem* der linearen Programmierung lässt sich durch vollständige Induktion über n und k beweisen ¹⁾. Dasselbe gilt auch für das Dualitätstheorem. Man gewinnt damit für die beiden wichtigsten Sätze der linearen Programmierung ein einheitliches und einfaches Beweisverfahren.

Hier die einzelnen Beweisschritte für das Dualitätstheorem:

1. n beliebig, $k = 1$.

Primäres Problem $X(n,1) = \sum_{i=1}^n p_i x_i,$

$$\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i + x'_1 = s_1;$$

duales Problem $Y(1,n) = s_1 y_1,$

$$a_{11} y_1 = p_1 + y'_1$$

$$a_{12} y_1 = p_2 + y'_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{1n} y_1 = p_n + y'_n.$$

¹⁾ Vgl. des Verfassers Aufsatz in dieser Zeitschrift Bd. 60 (1960), Heft 2, S. 247.

Wir greifen hier vor und benutzen die – später bewiesene – Beziehung (9). Man hat für positive x_i und y_1

$$X(n,1) + \sum_{i=1}^n x_i y'_i + x'_1 y_1 = Y(1,n).$$

Nach dem Haupttheorem verschwinden jedenfalls n Variable unter x'_1, x_i für $\text{Max } X(n,1)$. Wandern diese gegen Null, so bleibt obige Gleichheit auch in der Grenze erhalten. $Y(1,n)$ ist dabei nur noch um ein Variablenprodukt grösser als $\text{Max } X(n,1)$. Dieses Produkt muss für $\text{Min } Y(1,n)$ ebenfalls verschwinden; sonst könnte $Y(1,n)$ noch verkleinert werden.

2. Es wird angenommen, dass $\text{Max } X(n,k)$ gleich gross ist wie $\text{Min } Y(k,n)$, wenn die Nebenbedingungen (1 b) und (2 b) gelten. Es trifft dies dann aber sinngemäss nicht nur zu für die eingangs erwähnten Systeme – primär (1), dual (2) –, sondern zugleich auch für die wie folgt modifizierten, sofern deren Extrema existieren:

$$a) \text{ primär} \quad X'(n,k) = \sum_{i=1}^n (p_i - a_{k+1i} y_{k+1}) x_i; \quad (3a)$$

$$\text{Nebenbedingungen: wie (1 b)}. \quad (3b)$$

Die a_{k+1i} bedeuten vorgegebene Konstante, y_{k+1} ist eine nicht-negative, sonst jedoch willkürlich wählbare Grösse, welche vorderhand festbleiben und noch fixiert werden soll.

$$b) \text{ dual} \quad Y'(k,n) \text{ wie } Y(k,n); \quad (4a)$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k a_{h1} y_h &= p_1 + y'_1 - a_{k+11} y_{k+1} \\ \sum_{h=1}^k a_{h2} y_h &= p_2 + y'_2 - a_{k+12} y_{k+1} \\ &\vdots \\ \sum_{h=1}^k a_{hn} y_h &= p_n + y'_n - a_{k+1n} y_{k+1}. \end{aligned} \quad (4b)$$

Die Wertesysteme für die Extrema von $X'(n,k)$ bzw. $Y'(k,n)$ sowie letztere selbst hängen natürlich vom Wert ab, den man jeweils y_{k+1} beilegt. Für $y_{k+1} = 0$ würde $X'(n,k) = X(n,k)$, $Y'(k,n) = Y(k,n)$.

3. Wir gehen über zu den Systemen mit den Strukturgrössen n und $(k+1)$.

a) Das Primärproblem sieht dann so aus:

$$X(n, k+1) = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i + x'_1 &= s_1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i + x'_2 &= s_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + x'_k &= s_k \\ \sum_{i=1}^n a_{k+1i} x_i + x'_{k+1} &= s_{k+1}. \end{aligned} \quad (5b)$$

Es tritt also bloss eine weitere Nebenbedingung hinzu. Das Maximum von $X(n, k+1)$ wird daher nicht grösser sein können als dasjenige von $X(n, k)$.

b) Das Dualproblem erhält die Gestalt:

$$Y(k+1, n) = \sum_{h=1}^{k+1} s_h y_h, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k a_{h1} y_h &= p_1 + y'_1 - a_{k+11} y_{k+1} \\ \sum_{h=1}^k a_{h2} y_h &= p_2 + y'_2 - a_{k+12} y_{k+1} \\ &\vdots \\ \sum_{h=1}^k a_{hn} y_h &= p_n + y'_n - a_{k+1n} y_{k+1}, \end{aligned} \quad (6b)$$

wobei die Darstellung der Nebenbedingungen gerade an (4b) angeglichen ist.

Wir haben zu beweisen, dass aus der vorausgesetzten Gleichheit des Maximums von $X'(n, k)$ und des Minimums von $Y'(k, n)$ die Gleichheit von $\text{Max } X(n, k+1)$ und $\text{Min } Y(k+1, n)$ folgt. Wir führen

dabei das Gleichheitsproblem mit den Strukturgrössen $n, (k+1)$ zurück auf ein Gleichheitsproblem mit den Strukturgrössen n, k .

In der letzten Gleichung von (5b) bringen wir alle Terme nach links, multiplizieren sie mit $y_{k+1} > 0$ und ziehen sie von (5a) ab. $X(n, k+1)$ ändert sich dadurch nicht, obwohl es die neue Gestalt erhält

$$X(n, k+1) = \sum_{i=1}^n (p_i - a_{k+1i} y_{k+1}) x_i + (s_{k+1} - x'_{k+1}) y_{k+1}; \quad (5c)$$

hingegen verschwindet damit die $(k+1)$ -te Nebenbedingung in (5b), nachdem sie in (5c) eingebaut worden ist.

Vergleichen wir (5c) mit $X'(n, k)$ in (3a), so zeigt sich, dass

$$X(n, k+1) = X'(n, k) + (s_{k+1} - x'_{k+1}) y_{k+1} \quad (7a)$$

ist für alle einbezogenen $y_{k+1} > 0$.

Der Vergleich von $Y(k+1, n)$ gemäss (6a) mit $Y'(k, n)$ gemäss (4a) liefert

$$Y(k+1, n) = Y'(k, n) + s_{k+1} y_{k+1}. \quad (8a)$$

Max $X'(n, k)$ gemäss (3a), (3b) stimmt nach Voraussetzung mit Min $Y'(k, n)$ gemäss (4a), (4b) überein. Wir behaupten, dass das nämliche für Max $X(n, k+1)$ und Min $Y(k+1, n)$ gilt, sofern nur $x'_{k+1} \geq 0$ und $y_{k+1} > 0$ so beschaffen sind, dass sich gerade diese letzteren Extrema ergeben.

Ist nämlich $y_{k+1} > 0$ für das Minimum von $Y(k+1, n)$ in (6a), (6b), so muss $x'_{k+1} = 0$ in (7a) sein, weil sonst $X(n, k+1)$ nicht sein Maximum erreicht. Beide Extrema vergrössern sich somit in diesem Falle beim Übergang von $X'(n, k)$, $Y'(k, n)$ zu $X(n, k+1)$, $Y(k+1, n)$ um $s_{k+1} y_{k+1}$, bleiben daher untereinander gleich, wie auch $y_{k+1} > 0$ ausfallen möge.

4. Schliesslich noch der bisher nicht erörterte Fall $y_{k+1} = 0$ für das Minimum von $Y(k+1, n)$:

Das bisherige Vorgehen wäre dabei nicht völlig schlüssig; zwar wären die einzelnen getanen Schritte erlaubt, doch wäre der Einbau der letzten Nebenbedingung von (5b) in $X(n, k+1)$ nicht mehr brauchbar. Wir müssen daher den Beweis beispielsweise durch Grenzübergang $y_{k+1} \rightarrow 0$ leisten. Doch ist das nicht einmal nötig; denn wir brauchen

die Richtigkeit für den Fall $y_{k+1} = 0$ gar nicht zu beweisen. Mindestens ein x_i und ein y_h sollten ja jeweils für die Extremalstellen der Zielfunktionen positiv ausfallen, da sonst die Aufgaben ihres Sinnes entkleidet sind ¹⁾. Wir denken uns den Beweis in bisheriger Manier durchgeführt für eine Variablenkonstellation, bei der y_{k+1} eine der Veränderlichen ist, die für $\text{Min } Y(k+1, n)$ nicht verschwinden. Durch geeignetes Umnumerieren der Indizes lässt sich dies bewerkstelligen, ohne dass der Beweis an Allgemeingültigkeit einbüsst, weil eben stets mindestens ein solches y_{k+1} vorhanden ist.

Eine bemerkenswerte Folgerung lässt sich nun ohne weiteres gewinnen:

Die obigen Variablen x_i, y_h mögen beliebige, nur positive Werte annehmen. Wir multiplizieren die erste Gleichung von (1 b) mit y_1 , die zweite mit y_2, \dots die k -te mit y_k , addieren sie und bekommen so:

$$X(n, k) + \sum_{h=1}^k y_h x'_h + \sum_{i=1}^n x_i y'_i = Y(k, n), \quad (9)$$

also wegen des Dualitätstheorems bei Annäherung an die Lösungssysteme der x_i, x'_h, y_h, y'_i ,

$$\sum_{h=1}^k y_h x'_h + \sum_{i=1}^n x_i y'_i \longrightarrow 0. \quad (10)$$

Kein Produkt links darf positiv bleiben, also muss beim allmählichen Übergang zu den Extremalstellen hin jeweils mindestens ein Faktor in jedem Produkt sehr klein werden und in der Grenze verschwinden.

Sind z. B. die maximierenden Variablen x_i, x'_h gegeben – nach dem Haupttheorem sind n Werte dieser Variablen Null –, so ergibt sich daraus, welche y_h, y'_i für das duale Minimum unter allen Umständen verschwinden müssen.

Es sei beigefügt, dass sich über das Haupttheorem und die Beziehung (9) die Existenz von $\text{Min } Y(k, n)$ aus dem Vorhandensein von $\text{Max } X(n, k)$ direkt beweisen lässt – et vice versa.

¹⁾ Mit andern Worten: Wir setzen voraus, dass es ein Lösungssystem der y_h, y'_i gibt, das nicht durch Nullwerden aller Lösungswerte entartet.

Résumé

Le théorème de la dualité ainsi que le théorème principal de la programmation linéaire se laissent démontrer par induction sur le nombre des inégalités à accomplir. L'auteur prouve de cette façon le théorème de la dualité et en dérive la relation qui rejoint les variables fournissant les valeurs extrêmes des deux fonctions linéaires rattachées.

Summary

The duality theorem in linear programming can be demonstrated by induction over the number of inequalities to be accomplished, in the same way as the principal theorem. The author is working this out for the duality theorem and then derives the relation existing between the variables delivering the extreme values of the two linear functions adjointed.

Riassunto

Il teorema della dualità della programmazione lineare si può dimostrare come il teorema principale per mezzo dell'induzione completa. L'autore eseguisce ciò e ne deriva il rapporto tra le variabili che forniscono i valori estremi delle due funzioni lineari congiunti.