Genäherte Prämienbestimmung bei Versicherungen anomaler Risiken mit hohem Endalter

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **62 (1962)**

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555276

Genäherte Prämienbestimmung bei Versicherungen anomaler Risiken mit hohem Endalter

Von H. Jecklin, Zürich

Zusammenfassung

Die bekannten praktischen Näherungsformeln zur Prämienbestimmung gemischter Versicherung bei erhöhten Risiken gelten nur bis zum Endalter von etwa 70 Jahren. Es wird eine ausreichende Approximation für höhere Endalter angegeben.

Für die technische Behandlung der Versicherung erhöhter Risiken in der Lebensversicherung hat sich namentlich die Methode der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit eingebürgert. Ist q_x die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des normalen Risikos und α der konstante Übersterblichkeitssatz, so ist die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des erhöhten Risikos

$$q_x^{(\alpha)} = (1+\alpha)\, q_x, \tag{I}$$

und für die Sterbetafel hat man die Rekursionsformel

$$l_{x+1}^{(\alpha)} = l_x^{(\alpha)}\left(1-q_x^{(\alpha)}\right) = l_x^{(\alpha)}\left(1-(1+\alpha)\, q_x\right). \tag{II}$$

Zur Bestimmung der bezüglichen Nettoprämie für die gemischte Versicherung besitzen wir eine Anzahl von approximativen Arbeitsformeln [1] [1]), von welchen insbesondere die folgende an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt [2].

$$P_{x:\overline{n|}}^{(\alpha)} \sim P_{x:\overline{n|}} + \alpha\left(P_{x:\overline{n|}} - P_{\overline{n|}}\right) = (1+\alpha)\, P_{x:\overline{n|}} - \alpha P_{\overline{n|}}. \tag{III}$$

Diese und mit ihr verwandte Näherungsformeln haben leider den Nachteil, dass sie nur bis zum Endalter von etwa 70 Jahren Resultate von genügender Approximation liefern, für höhere Endalter versagen sie.

---

[1]) Literaturangaben am Schlusse des Artikels.

Nun sind aber, zumindest in theoretischer Hinsicht, Versicherungen mit höherem Endalter nicht ausgeschlossen, aber auch praktisch gesehen besteht im Hinblick auf die erhöhte mittlere Lebenserwartung ein Bedürfnis, die Versicherung erhöhter Risiken auf höhere Endalter, eventuell auf lebenslängliche Versicherung auszudehnen. Nachdem sich hiezu für jede Grundtafel und jeden Übersterblichkeitssatz die Notwendigkeit der Aufstellung separater Kommutationszahlen ergeben würde, sei hier der Versuch unternommen, eine Näherungsformel aufzustellen, welche bei multiplikativ erhöhter Sterblichkeit für gemischte Versicherungen hohen Endalters und für lebenslängliche Todesfallversicherungen zur Anwendung gelangen kann.

Unter der Voraussetzung, dass die Grundtafel, d. h. die für normale Risiken verwendete Sterbetafel, nach Makeham ausgeglichen ist, lässt sich die konstante multiplikative Sterblichkeitserhöhung stets durch eine Alterserhöhung in der Normaltafel plus eine konstante additive Sterblichkeitserhöhung ausdrücken [3]. Denn es ist

$$q_x = a + b\,c^x. \tag{IV}$$

$$q_x^{(\alpha)} = (1+\alpha)\,q_x = (1+\alpha)\,a + b\,(1+\alpha)\,c^x = a + a' + b\,c^{x+m} = q_{x+m} + a',$$

$$\text{wobei} \quad a' = \alpha\,a, \quad (1+\alpha) = c^m.$$

Es ist mithin

$$m = \frac{\log\,(1+\alpha)}{\log\,c}. \tag{V}$$

Wir notieren als erfreuliches Faktum, dass die Alterserhöhung m vom Eintrittsalter x unabhängig ist. Nachdem für moderne Sterbetafeln $c \sim 1{,}1$, darf man für Schätzungen $1/\log c \sim 25$ ansetzen. Auf dieser Basis ergeben sich beispielsweise die folgenden Alterserhöhungen

α	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
m	2,4	4,4	6,1	7,5	9,9	11,9	13,6	15,1

Wir können hier vorwegnehmen, dass sich die Ersetzung der multiplikativen Übersterblichkeit durch Altererhöhung bei Versicherungen hohen Endalters zur Gewinnung von Näherungsformeln gut eignet, wie dies wegen der Altersunabhängigkeit der Alterserhöhung zu erwarten ist.

Was die zusätzliche additive Sterblichkeitserhöhung a' anbelangt, haben wir andernorts [3] für die daraus resultierende Zusatzprämie folgende altersunabhängige Näherung angegeben.

$$Z^{(\alpha)} \sim 0{,}5\,a'(1+0{,}25\,in)\,. \tag{VI}$$

Setzen wir $Z = 0{,}5\,a(1+0{,}25\,in)$, so ist, weil $a' = \alpha a$,

$$Z^{(\alpha)} = \alpha Z\,.$$

Für die Sterbetafel S.M. 48/53 errechnet man nach der Methode von Landré [4] a zu $0{,}63\,^0/_{00}$ und auf dieser Basis ergeben sich bei einem Zinsfuss von $2^1/_2\,^0/_0$ folgende Werte für Z in $^0/_{00}$

n	10	20	30	40	50	60	70	80
Z	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48

Es hat also hiernach Z die Grössenordnung von weniger als ein halbes Promille.

Bekanntlich kann man die konstante additive Sterblichkeitserhöhung auch durch eine Zinsfussänderung des Rentenwertes ersetzen. Die Zusatzprämie Z kann dann nach folgender Formel bestimmt werden [5]

$$Z = \frac{a(1+i)}{0{,}01\,(1-a)}\left(\frac{1}{\ddot{a}''_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right), \tag{VII}$$

wobei $\ddot{a}''_{x:\overline{n}|}$ zum Zinsfuss $i+0{,}01$ gerechnet ist, d.h. mit einem um $1\,^0/_0$ höheren Zinsfuss als die Rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ der normalen Grundtafel. Hat man nur die Grundtafel mit dem Zinsfuss i zur Verfügung, kann man die folgende praktische Formel verwenden

$$Z = \frac{a(1+i)}{i\,(1-a)}\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{e}_{x:\overline{n}|}}\right), \tag{VIII}$$

oder auch, da a kleiner als $1\,^0/_{00}$

$$Z \sim \frac{a}{d}\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{e}_{x:\overline{n}|}}\right). \tag{IX}$$

Somit ergibt sich als genäherte Prämie beim Übersterblichkeitssatz α in Funktion der normalen Prämie

$$P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} \sim P_{x+m:\overline{n}|} + \alpha Z\,. \tag{X}$$

In den Kolonnen A und B der Tabelle I am Schluss sind eine Anzahl genauer und nach Formel (X) genäherter Prämienwerte für $\alpha = 1$ einander gegenübergestellt. Z ist dabei nach Formel (VIII) bestimmt. Als Grundtafel wurde S.M. 1939/44 zu $2^1/_2\,^0/_0$ benutzt, ausgeglichen nach Makeham mit den Konstanten $a = 0{,}810008\,^0/_{00}$, $b = 0{,}105148\,^0/_{00}$, $c = 1{,}093543226$. Mit diesem c ergibt sich bei $\alpha = 1$ für $m = 7{,}75$ Jahre.

Wie gesagt, ist Z von der Grössenordnung eines halben Promille. Es ist jedoch kaum möglich, für Z einen generell anwendbaren mittleren Wert anzugeben, da die Konstante a von Tafel zu Tafel variiert. Als erschwerendes Moment kommt hinzu, dass moderne Tafeln im allgemeinen gar nicht nach der Makehamschen Formel ausgeglichen sind. Dagegen kann man als wichtige Tatsache festhalten, dass Z, d.h. die additive Zusatzprämie bei $\alpha = 1$, im Vergleich zur Gesamtprämie klein ist und der Grössenordnung nach die Prämienunterschiede nicht wesentlich überschreitet, die sich bei verschiedener Tafelausgleichung ergeben können.

Um zu einer praktisch ausreichenden Lösung unseres Problems zu gelangen, scheint es daher nicht abwegig, die additive Zusatzprämie als geringfügig zu vernachlässigen und dafür in der Ansetzung der Alterserhöhung nach oben zu tendieren. Setzen wir aus empirischen Gründen für $\alpha = 1$ eine Alterserhöhung von $m = 8$, so folgt wegen (V) für $\log c = 0{,}03763$ und hiemit ergibt sich folgendes Schema für die Alterserhöhung

α	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
m	2,58	4,68	6,46	8,00	10,58	12,69	14,47	16,01

wobei man für praktische Belange m auf halbe Jahre auf- und abrunden wird. Als Funktion des Übersterblichkeitssatzes α betrachtet, ist die Alterserhöhung m also eine von Null konkav aufsteigende monotone Kurve.

In Tabelle II hiernach sind für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ eine Anzahl genauer und mit der Formel

$$P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} \sim P_{x+m:\overline{n}|} \qquad \text{(XI)}$$

genäherter Prämienwerte in Vergleich gestellt, wobei für $\alpha = 1$ eine Alterserhöhung von 8, und für $\alpha = 2$ eine solche von 12,5 Jahren verrechnet ist. Als Grundtafel ist S.M. 1948/53 zu $2^1/_2\,^0/_0$ benutzt [6].

Ausserdem sind in Tabelle I (S. M. 1939/44, $2^1/_2\,^0/_0$, $\alpha = 1$) in Kolonne C die nach Normaltafel mit 8 Jahren Alterserhöhung gerechneten Prämienwerte angeführt. Wie die tabellarischen Zusammenstellungen zeigen, ist die Näherung (XI) durchaus ausreichend, um in einzelnen Fällen von Versicherungen erhöhter Risiken mit hohem Endalter die Prämie abzuschätzen.

Tabelle I

S. M. 1939/44 zu $2^1/_2\,^0/_0$, Ausgleichung nach Makeham

A: $P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}$, $\alpha = 1$, in $^0/_{00}$

B: $P_{x+7,75:\overline{n}|} + Z$, in $^0/_{00}$

C: $P_{x+8:\overline{n}|}$, in $^0/_{00}$

x	n	A	B	C
20	50	16,03	15,97	15,57
	60	15,36	15,28	14,91
	$\omega - x$	15,31	15,24	14,87
30	40	23,04	22,99	22,65
	50	21,82	21,76	21,45
	$\omega - x$	21,74	21,68	21,38
40	30	35,07	35,03	34,47
	40	32,50	32,43	32,26
	$\omega - x$	32,34	32,27	32,10
50	20	58,27	58,23	58,16
	30	51,33	51,13	51,30
	$\omega - x$	50,90	50,79	50,90
60	10	118,27	118,06	118,46
	20	87,52	87,24	87,82
	$\omega - x$	85,91	85,62	86,30
70	10	168,59	168,61	170,10
	20	156,40	156,35	158,31
	$\omega - x$	156,38	156,33	158,30

Tabelle II

S. M. 1948/53 zu $2^1/_2\,^0/_0$, offizielle Ausgabe

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A}: & P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}, \quad \alpha = 1, \\ \text{B}: & P_{x+8:\overline{n}|}, \\ \text{C}: & P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}, \quad \alpha = 2, \\ \text{D}: & P_{x+12,5:\overline{n}|}, \end{array}\right\} \text{Angaben in } ^0/_{00}$$

x	n	A	B	C	D
20	50	15,15	14,70	17,57	16,62
	60	14,35	13,94	17,15	16,23
	$\omega - x$	14,29	13,87	17,14	16,22
30	40	21,41	21,38	24,64	24,60
	50	20,00	20,04	23,88	23,88
	$\omega - x$	19,89	19,92	23,86	23,86
40	30	32,73	33,19	37,84	38,61
	40	29,84	30,41	36,17	36,98
	$\omega - x$	29,62	30,17	36,12	36,95
50	20	55,47	55,83	64,49	65,13
	30	47,87	48,47	59,55	60,33
	$\omega - x$	47,32	47,87	59,42	60,22
60	10	113,88	115,29	128,57	131,15
	20	81,66	83,59	103,80	106,45
	$\omega - x$	79,71	81,41	103,26	105,78

Literaturverzeichnis

[1] *Saxer, W.:* Versicherungs-Mathematik, Zweiter Teil, Seite 232 ff. Springer-Verlag, Berlin 1958.
[2] *Jecklin, H.:* Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge. Mitteilungen Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 44, 1.
[3] *Jecklin, H.:* Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung. Mitteilungen Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 53, 1.
[4] *Landré, C.L.:* Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, 5. Aufl. Verlag G. Fischer, Jena 1921, Seite 104 ff.
[5] *Saxer, W.:* Versicherungs-Mathematik, Zweiter Teil, Seite 243.
[6] Schweizerische Volkssterbetafeln 1941/50 und 1948/53. Statistische Quellenwerke der Schweiz, Heft 282, Reihe Bk 6. Eidgenössisches Statistisches Amt, Bern 1955.

Résumé

Les formules d'approximation utilisées actuellement pour le calcul de la prime d'une assurance mixte présentant un risque aggravé ne sont valables que si l'âge terme ne dépasse pas 70 ans environ. L'auteur développe une méthode approximative applicable au cas d'un âge terme plus élevé.

Summary

The well-known practical approximation formulas for the determination of premium rates for the endowment insurance of substandard lives are only valid up to the age of termination of 70. A sufficient approximation for higher ages of termination is given.

Riassunto

Le formule approssimative note nella pratica per determinare i premi dell'assicurazione mista in caso di rischi maggiorati valgono solamente fino all'età termine di circa 70 anni. Viene presentata una sufficiente approssimazione per età termini più elevate.