Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 62 (1962)

Artikel: Modelle mit Wahrscheinlichkeitsansteckung

Autor: Kupper, Josef

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555275

Modelle mit Wahrscheinlichkeitsansteckung

Von Josef Kupper, Zürich [1])

Zusammenfassung

Es wird auf verschiedene Möglichkeiten hingewiesen, wie die Hypothese der Ansteckung der Schadenereignisse eines stochastischen Vorgangs in das mathematische Modell einbezogen werden kann. Insbesondere ist das bekannte Schema von Pólya/Eggenberger einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

1. Einleitung

Die klassische Methode zur Darstellung eines unstetigen stochastischen Vorgangs, wie ihn beispielsweise das Unfallgeschehen vermittelt, führt auf einen einfachen Poisson-Prozess. Dieses Modell ist zwar für manche Belange durchaus befriedigend, in vielen Fällen ist es aber doch so, dass sich der Mangel an Parametern spürbar bemerkbar macht. Erweisen sich Mittelwert und Streuung der empirischen Statistik als wesentlich voneinander verschieden, dann wird man kaum darum herumkommen, zu einem etwas flexibleren Schema zu greifen. Eine Möglichkeit besteht darin, dass man die Voraussetzung der Unabhängigkeit der stochastischen Ereignisse fallen lässt. Im folgenden nehmen wir an, dass ein Schadenereignis die Wahrscheinlichkeit für später zu erwartende Fälle beeinflusst oder, wie man sagt, dass Wahrscheinlichkeitsansteckung stattfindet. Nach einigen Angaben allgemeiner Natur streifen wir kurz die Möglichkeit, die Ansteckungshypothese mit Hilfe eines stochastischen Prozesses zu erörtern. Darnach folgen wir jedoch dem Weg, den Pólya und Eggenberger bei der Herleitung ihres Modells eingeschlagen haben. Es wird gezeigt, auf welche Weise das zugrundeliegende Urnenschema Verallgemeinerungen fähig ist.

---

[1]) Nach einem Vortrag an der Mitgliederversammlung der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker in Zürich am 7. Oktober 1961.

2. Einige Vorbemerkungen allgemeiner Natur

Die Darstellung der Schadenzahl eines stochastischen Prozesses kann auf zwei verschiedenen Grundlagen erfolgen. Der ältere individuelle Standpunkt befasst sich mit dem einzelnen Objekt des vorgegebenen Risikobestandes. Dieser wird zu Beginn der Untersuchung als völlig homogen vorausgesetzt, d.h. die Schadenwahrscheinlichkeit für jedes Objekt sei gleich gross. Tritt ein Schaden ein, so ändert sich die betreffende Wahrscheinlichkeit. Man kann sich das Geschehen gut anhand des Unfallprozesses verdeutlichen. Ein Individuum, das einen Schaden erlitten hat, mag in Zukunft eine gesteigerte Unfallanfälligkeit aufweisen. Das ist so erklärbar, dass das betrachtete Individuum seine frühere Sicherheit eingebüsst hat, ängstlicher und nervöser geworden ist. Umgekehrt ist es auch möglich, dass die Anfälligkeit nach einem Unfall sich verringert, dies gemäss dem Sprichwort «Durch Schaden wird man klug». Das erste Verhalten wird als positive, das zweite als negative Ansteckung bezeichnet.

Auf Grund der bisherigen Ausführungen geht hervor, dass der Begriff «Ansteckung» in diesem Sinne nicht dem eigentlichen Wortlaut nach aufgefasst werden darf. Es könnte sonst die Meinung auftauchen, durch den Eintritt des Schadenereignisses bei einem Objekt werde die Anfälligkeit anderer Objekte beeinflusst. Das ist aber gerade nicht der Fall; nur die Wahrscheinlichkeit des betroffenen Objektes soll sich ändern können.

In den vergangenen Jahren hat die kollektive Risikotheorie stark an Bedeutung gewonnen. Diese zerlegt den vorliegenden Risikobestand nicht mehr in seine Einzelteile, sondern betrachtet ihn als Ganzes. Auf diese Betrachtungsweise übertragen, würde Ansteckung bedeuten, dass nach einem Schadenfall die Wahrscheinlichkeit für ein weiteres Schadenereignis des Kollektivs grösser oder kleiner wird. Ersteres kann beispielsweise durch ungeschickte, unpsychologische Führung bewirkt werden, letzteres auf der Ergreifung geeigneter Sicherheitsmassnahmen beruhen.

Auch unter der Voraussetzung der Ansteckungshypothese lässt es sich kaum vermeiden, gewisse vereinfachende Annahmen zu treffen, die natürlich der Kritik zugänglich sind. Soll das hergeleitete Modell nicht allzu kompliziert und für die praktische Behandlung schwer verwertbar werden, muss man unwillkürlich Kompromisse eingehen.

Noch ein Wort über den Nutzen solcher Modelle! Neben dem Interesse, das die Verteilung der Schadenzahl an sich beansprucht, ist diese als einer der Grundpfeiler zum Aufbau der Verteilung des Totalschadens bekannt, jener Grösse, deren Kenntnis dem Versicherer besonders erwünscht ist. Der Totalschaden lässt sich aus den beiden stochastischen Variablen Schadenzahl und Schadenhöhe zusammensetzen. Ich will hier nicht weiter ausholen, um so weniger als erst kürzlich Derron [4] [1]) sich zu diesem Gedankenkreis geäussert hat. Es sei nur daran erinnert, dass sich mit Hilfe eines derartigen Modells verschiedene wichtige Fragen wie Rückversicherung, Überschaden, Sicherheitsmargen, Ruinwahrscheinlichkeit einfach auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage behandeln lassen. Wir möchten hierfür auf den Artikel von Lang [10] und verschiedene Arbeiten von Ammeter [1], [2], [3] verweisen.

3. Aufbau des mathematischen Modells als stochastischer Prozess

Im Falle der Unabhängigkeit der Ereignisse und eines homogenen Bestandes lässt sich bekanntlich durch die Annahmen

(A) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Schadenereignisses im Intervall $[t, t + \Delta t]$ sei $\lambda(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$

(B) daselbst betrage die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Schaden $o(\Delta t)$

ein stochastischer Prozess definieren, der durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} P_r'(t) &= -\lambda(t)\,[P_r(t) - P_{r-1}(t)] \\ P_0'(t) &= -\lambda(t)\,P_0(t) \end{aligned} \tag{1}$$

wiedergegeben wird. $P_r(t)$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, in der gegebenen Zeitspanne $[0,t]$ r Schadenfälle zu erleiden. Eine nützliche Methode zur Lösung eines derartigen Gleichungssystems besteht im Übergang auf die erzeugende Funktion

$$E(z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)\, z^r$$

---

[1]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Artikels.

der Verteilung der Schadenzahl $P_r(t)$. Das System unendlich vieler Differentialgleichungen (1) geht im allgemeinen in eine partielle Differentialgleichung für $E(z,t)$ über, deren Lösung häufig einfacher zu ermitteln ist. Hier z. B. ergibt sich

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \lambda(t)\,(z-1)\,E(z,t)\,, \tag{2}$$

was unter der Anfangsbedingung $E(z,0) = 1$ die erwartete Lösung

$$E(z,t) = e^{(z-1)\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau} = e^{\lambda^*(t)\,(z-1)} \quad \text{liefert.} \tag{3}$$

Wird der Tatbestand der Ansteckung als erfüllt betrachtet, dann muss Annahme (A) dahingehend modifiziert werden, dass die Grösse λ nicht nur von der Zeit, sondern auch von der Schadenzahl r in irgendeiner Form beeinflusst sein kann. Bezeichne $\lambda_r(t)\,\Delta t + o\,(\Delta t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, nach r eingetretenen Schäden im Intervall $[t, t + \Delta t]$ einen weitern Schadenfall zu erleiden, so lässt sich gleicherweise wie zuvor ein Differentialgleichungssystem für $P_r(t)$ aufbauen. Anstelle von (1) erhält man

$$\begin{aligned} P_r'(t) &= -\lambda_r(t)\,P_r(t) + \lambda_{r-1}(\iota)\,P_{r-1}(t) \\ P_0'(t) &= -\lambda_0(t)\,P_0(t)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

In analoger Weise wie oben leitet sich eine (2) entsprechende partielle Differentialgleichung her,

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = (z-1)\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r(t)\,P_r(t)\,z^r, \tag{5}$$

deren Lösung allerdings im Gegensatz zu jener bei weitem nicht so einfach anzugeben ist (man sehe z. B. bei Feller [7]).

Ein hübsches, einfaches Beispiel mit negativer Ansteckung geht bereits auf Greenwood und Yule zurück, deren fundamentaler Beitrag [8] auf die Wahrscheinlichkeitstheorie ungemein befruchtend gewirkt hat. Die beiden Autoren nehmen an, die Schadenwahrscheinlichkeit betrage vorerst für alle Objekte δ, sinke nach Eintritt des ersten Schadens jedoch auf ε und bleibe fürderhin konstant. In unserer Terminologie würde das bedeuten, dass

$$\lambda_r(t) = \begin{cases} \delta & r = 0 \\ \varepsilon & r \neq 0 \end{cases}, \quad \text{unabhängig von } t. \tag{6}$$

Die Literatur kennt dieses Modell unter dem Namen «burnt finger-distribution». Nachdem das unter Beobachtung stehende Individuum sich am ersten Schaden «die Finger verbrannt» hat, ist es hinfort gewitzigt genug, die notwendige Sorgfalt anzuwenden. Man könnte (6) in (4) und (5) einsetzen, um das Modell weiter auszuarbeiten. Wir wollen dies aber nicht tun, sondern es bei diesen wenigen Andeutungen bewenden lassen.

4. Aufbau des mathematischen Modells als Urnenschema

Das Modell von Pólya und Eggenberger

Eine nicht unbedeutende Rolle bei den ersten Ansätzen einer Theorie der Ansteckung hat die Schweiz gespielt. Die Arbeiten von Pólya und seinem leider kürzlich verstorbenen Schüler Eggenberger ([5], [6]) sind schon früh als grundlegend anerkannt worden. Ihr Vorgehen sei kurz skizziert, anschliessend soll auf einige Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Modells hingewiesen werden.

Gegeben sei eine Urne, deren Inhalt aus R roten und S schwarzen Kugeln bestehen möge ($R+S=N$). Bei einer Folge von rein zufälligen Zügen aus der Urne sollen stets neben der gezogenen Kugel zusätzlich $\varDelta$ Kugeln der betreffenden Farbe zurückgelegt werden. Das Verfahren werde n-mal wiederholt. Da die Wahrscheinlichkeit, erst r-mal rot, dann s-mal schwarz zu ziehen

$$\frac{R(R+\varDelta)\ldots[R+(r-1)\varDelta]\,S(S+\varDelta)\ldots[S+(s-1)\varDelta]}{N(N+\varDelta)\ldots[N+(n-1)\varDelta]}$$

beträgt, ergibt sich im Hinblick auf die Indifferenz der Reihenfolge unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\frac{R}{N}=\varrho\,,\qquad \frac{S}{N}=\sigma\,,\qquad \frac{\varDelta}{N}=\delta$$

folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit, unter den n gezogenen Kugeln r rote zu finden:

$$W_r=\frac{\binom{\frac{\varrho}{\delta}+r-1}{r}\binom{\frac{\sigma}{\delta}+s-1}{s}}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}}\,,\quad 0\leqq r\leqq n. \tag{7}$$

$\delta = 0$ – keine Ansteckung – entspricht der Binomialverteilung. Von ebensolcher Bedeutung wie der Grenzübergang Binomial $\longrightarrow$ Poisson ist hier der Pólyasche Limes für seltene Ereignisse und schwache Ansteckung

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow \infty \\ \varrho &\longrightarrow 0 \quad \text{mit} \quad n\varrho = h, \quad n\delta = d, \\ \delta &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{8}$$

der als Ergebnis die Verteilung

$$W_r = \binom{\frac{h}{d} + r - 1}{r} \left(\frac{d}{1+d} \right)^r (1+d)^{-\frac{h}{d}} \tag{9}$$

erzeugt, eine negative Binomialverteilung mit dem sogenannten Ansteckungsparameter d. Erzeugende Funktion und erste Momente dieser wichtigen Verteilung lauten

$$E(z) = [1 + d(1-z)]^{-\frac{h}{d}}, \quad \mu = h, \quad \sigma^2 = h(1+d) > \mu, \tag{10}$$

wobei die für positive Ansteckung bezeichnende Ungleichung zwischen Mittelwert und Streuung zu beachten ist.

Die negative Binomialverteilung ist für praktische Anwendungen gerade noch einfach genug und bietet bei Versagen der Poisson-Verteilung häufig ausgezeichnete Dienste. Das hat seine tiefere Ursache nicht zuletzt darin, dass sie noch auf Grund anderer Schemata zu erklären ist. Gewisse Autoren kreiden ihr dies allerdings als Mangel an, da so allein durch ihr Auftreten nichts über die tatsächlich vorliegende Modellhypothese ausgesagt werden kann.

5. Eine erste Verallgemeinerung

Wir verallgemeinern das Pólyasche Urnenschema in folgender Weise: Beim Zug einer roten Kugel sollen hinfort R_r rote und S_r schwarze, beim Zug einer schwarzen Kugel R_s rote und S_s schwarze zurückgelegt werden (stets neben der gezogenen Kugel). Das Modell wird auf diese Weise viel flexibler, allerdings ist die rechnerische Herleitung nicht mehr so einfach wie bei (7), da hier der Reihenfolge des Eintritts der rot/schwarzen Ereignisse ausschlaggebende Bedeutung zukommt. Nachdem ausführliche Überlegungen unlängst zur Veröffentlichung gelangt sind [9], begnüge ich mich mit der Wiedergabe einiger Grundgedanken.

Die beiden stochastischen Variablen

$$\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{falls im } n\text{-ten Zug schwarz gezogen wird,} \\ 1, & \text{falls im } n\text{-ten Zug rot gezogen wird,} \end{cases}$$

$$x_n = \text{Anzahl roter Kugeln nach } n \text{ Zügen } (x_0 = R)$$

sind durch die Rekursionsformel

$$x_{\tau+1} = x_\tau + (R_r - R_s)\,\xi_{\tau+1} + R_s\,, \quad \tau = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

miteinander verbunden, Summiert man beide Seiten von 0 bis $n-1$ auf, so ergibt sich unter Einführung der neuen Variablen $\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$

$$x_n = (R_r - R_s)\,\zeta_n + n R_s + R\,. \tag{12}$$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten W_r sind identisch mit $W(\zeta_n = r)$; es ist jedoch einfacher, sich erst mit der Variablen x_n zu befassen. Ist deren Verteilung bekannt, so geht daraus ohne weiteres jene von ζ_n hervor; die erzeugenden Funktionen $E_n(z)$ von ζ_n und $e_n(z)$ von x_n sind nämlich durch die Gleichung

$$E_n(z) = z^{-\frac{nR_s + R}{R_r - R_s}}\, e_n\!\left(z^{\frac{1}{R_r - R_s}}\right) \tag{13}$$

miteinander verbunden. Für $e_n(z)$ lässt sich unter einer leichten Einschränkung ein Differenzen/Differentialgleichungssystem aufstellen

$$e_{n+1}(z) = z^{R_s}\left[e_n(z) + \frac{z^{R_r - R_s} - 1}{N + n(R_s + S_s)}\, z\, e_n'(z)\right], \tag{14}$$

$$e_0(z) = z^R,$$

welches mit Hilfe einiger Transformationen und Substitutionen allgemein lösbar ist.

Das eben beschriebene allgemeine Modell enthält verschiedene interessante Spezialfälle, von denen die folgenden erwähnt seien:

(a) $$R_r = R_s\,, \qquad S_r = S_s\,.$$

Diese Annahme kann man als schematische Ansteckung bezeichnen. Ohne auf das Ergebnis des Versuchs zu achten, werden nach jedem Zug zusätzlich zur gezogenen Kugel R_r rote und S_r schwarze zurückgelegt.

In (14) verschwindet der Term rechts, und als Lösung der gewöhnlichen Differenzengleichung erscheint

$$e_n(z) = z^{R+nR_s},$$

was nichts anderes heisst, als dass nach n Zügen mit Sicherheit (unabhängig von der Art der Versuchsreihe) $R + n R_s$ rote Kugeln vorhanden sein müssen.

(b) $$R_s = S_r = 0, \qquad R_r = S_s = \varDelta.$$

Das ist das schon in (4) vorweggenommene Pólya/Eggenberger-Modell.

(c) $$R_s = S_s = 0, \qquad S_r = -R_r.$$

Rutherford [11] hat sich mit einem Spezialfall eines von Woodbury [12] dargestellten Schemas befasst, dessen Annahmen (c) gleichzusetzen sind. Durch das Verfahren (Ersetzen von R_r schwarzen Kugeln durch ebensoviele rote bei einem roten Ereignis; bei einem schwarzen Zug wird nichts unternommen) wird der Ansteckungseffekt gegenüber (b) verstärkt. Die entstehende Verteilung ist in ihrer allgemeinen Form weniger übersichtlich als (7). Führt man in ihr den zu (8) analogen Grenzübergang durch, so erhält man

$$W_r = \binom{\frac{h}{d} + r - 1}{r} e^{-h} (1 - e^d)^r, \tag{15}$$

also wieder eine negative Binomialverteilung mit Momenten

$$\mu = \frac{h}{d}(e^d - 1), \qquad \sigma^2 = \frac{h}{d}(e^d - 1)\, e^d. \tag{16}$$

Beachtenswert ist vielleicht, dass in (16) im Gegensatz zu (10) eine Variation des Ansteckungsparameters d den Mittelwert der Verteilung in Mitleidenschaft zieht. Wie leicht ersichtlich streben für $d \longrightarrow 0$ Mittelwert und Streuung gegen h.

Es möge noch die interessante Feststellung angefügt werden, dass die Verteilung (15) im Limes auch dann entsteht, wenn im Modell (b) noch zusätzlich die Forderung $S_s = 0$ aufgestellt wird, also nurmehr $R_r \neq 0$ bleibt.

(d) $$R_r = R_s = 0, \qquad R_s = S_r = \nabla;$$

(e) $$S_r = 0, \qquad R_s = 2R_r, \qquad S_s = -R_r.$$

Die beiden Modelle (d) und (e) gehören insofern einer andern Gruppe an, als für sie der Grenzübergang (8) nicht mehr existiert. Es erweist sich als vorteilhaft, die Modifikation

$$\begin{matrix} n \longrightarrow \infty \\ \varrho \longrightarrow 0 \\ \delta \longrightarrow 0 \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} n\varrho = h \\ n\delta \longrightarrow 0 \quad n^2\delta = d \end{matrix} \tag{17}$$

vorzunehmen. Geht man so vor, so ergeben sich im Limes Poisson-Verteilungen mit Parametern $h + \frac{d}{2}$ bzw. $h + d$.

(d) kann man als inverses Pólya/Eggenberger-Modell bezeichnen. Aus der Definition geht hervor, dass es bei negativer Ansteckung Verwendung finden kann.

(e) haben wir pessimistisches Modell genannt, dies aus der Überlegung heraus, dass die Schadenwahrscheinlichkeit, ob das Ereignis eintritt oder nicht, erhöht wird, stärker jedoch im zweiten Fall.

6. Eine zweite Verallgemeinerung

Das zugrundeliegende Urnenschema soll in folgender Weise erweitert werden:

Wir nehmen in Zukunft an, die betrachtete Urne möge $k+1$ (statt 2) verschiedenfarbige bzw. mit $0, 1, \ldots, k$ beschriftete Kugeln enthalten. Von jeder Sorte seien N_j Kugeln vorhanden, wobei $\sum_{j=0}^{k} N_j = N$.

Das vorliegende Modell lässt sich, wie in [9] näher erörtert, zur Darstellung des Kumulrisikos benutzen. Man interpretiert dabei Züge der $0, 1, 2, \ldots$ Kugeln als Schadenereignisse mit $0, 1, 2, \ldots$ dabei auftretenden Fällen. Im Sinne dieser Ausführungen treten wir darauf nicht weiter ein, sondern wollen uns sofort mit der Möglichkeit der Ansteckung befassen.

Wird eine Kugel der Ziffer i gezogen, so sollen anschliessend, wie immer neben dieser Kugel, Z_{ij} Kugeln der Ziffer j (beide Indizes laufen von 0 bis k) zurückgelegt werden. Bei n-maliger Wiederholung des Experimentes stellt sich wieder die Frage nach der Wahrscheinlichkeit von total r Schadenfällen (hier zu unterscheiden von Ereignissen).

Einige Beispiele mögen zur Illustration dienen:

(a) $$Z_{ij} = \Delta_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k, \text{ unabhängig von } i.$$

Man erkennt in Verallgemeinerung von (a) im Abschnitt 5 die schematische Ansteckung.

(b) $$Z_{ij} = \begin{cases} \Delta & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Das erweiterte Pólya/Eggenberger-Modell lässt sich in analoger Weise wie im einfachen Fall (7) behandeln. Führt man den entsprechenden Grenzübergang

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow \infty \\ N_j/N = \varrho_j &\longrightarrow 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} n\varrho_j &= h_j \\ n\delta &= d \end{aligned}, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \text{ sowie } k \longrightarrow \infty \\ \delta &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{18}$$

durch, so entsteht eine multiple negative Binomialverteilung, d. h. W_r nimmt die Gestalt (19) an:

$$W_r = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j} \sum_{n_1+2n_2+\ldots+rn_r=r} \left(\frac{d}{d+1}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{r} n_j} \prod_{j=1}^{r} \binom{\frac{h_j}{d}+n_j-1}{n_j} \tag{19}$$

Für gewisse Belange mag dieses Modell nützlich sein, den Bedürfnissen der Schadenversicherung scheint es kaum zu entsprechen, da die Annahme, ein k-Ereignis erhöhe die Wahrscheinlichkeit für solche, irgendwie dem gesunden Menschenverstand widerspricht. Diesen Einwand berücksichtigt

(c) $$Z_{ij} = \begin{cases} \Delta & i = 0, \quad j = 0 \\ 0 & i = 0, \quad j \neq 0 \quad \text{und} \quad i \neq 0, \quad j = 0, \\ N_j \Delta / (N - N_0) & i \neq 0, \quad j \neq 0 \end{cases}$$

wo ausser beim Zug einer 0-Kugel nun die zurückzulegenden Δ Kugeln proportional zur Kugelanzahl N_j auf die einzelnen Arten (ausser 0) verteilt werden. Die aus diesem Modell hervorgehende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist leider keineswegs einfach.

Die Fragen und Probleme, die die Ansteckungshypothese aufwirft, sind wohl vom theoretischen Standpunkt aus recht interessant und ohne weiteres diskutierbar; man darf jedoch nicht vergessen, dass sich in vielen Fällen, sobald man die Modelle nur leicht verallgemeinert, nicht einfach zu handhabende Verteilungen einstellen. Ob für ein zur Untersuchung vorliegendes Material ein Modell mit Ansteckung verantwortet werden kann, muss von Fall zu Fall überprüft werden. Wichtig scheint mir jedenfalls, dass man sich, und damit wäre der Zweck meiner Ausführungen erreicht, über die Möglichkeit einer Ansteckungshypothese Rechenschaft gibt.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Ammeter:* Kollektive Risikotheorie und Sachversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 54 (1954).

[2] – Über die risikotheoretischen Grenzen der Versicherbarkeit. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 2 (1955).

[3] – Anwendung der kollektiven Risikotheorie auf Probleme der Risikopolitik in der Sachversicherung. Transact. XVth intern. Congress of Actuar., New York 1957.

[4] *M. Derron:* Mathematische Probleme der Automobilversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 62 (1962).

[5] *F. Eggenberger:* Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 24 (1924).

[6] *F. Eggenberger* und *G. Pólya:* Über die Statistik verketteter Vorgänge. Zeitschrift angew. Math. Mech. 3 (1923).

[7] *W. Feller:* On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications. Proc. Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability. Univ. of California Press 1949.

[8] *M. Greenwood* and *G. U. Yule:* An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings, with particular reference to the occurrence of multiple disease or of repeated accidents. J. Roy. Stat. Soc. 83 (1920).

[9] *J. Kupper:* Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung, Teil I: Die Schadenzahl. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 5 (1962).

[10] *R. Lang:* Die Untersuchungen der Zufallsschwankungen einer Versicherungsgesellschaft mit Hilfe der kollektiven Risikotheorie. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 1 (1952).

[11] *R. S. G. Rutherford:* On a contagious distribution. Ann. Math. Stat. 25 (1954).

[12] *M. A. Woodbury:* On a probability distribution. Ann. Math. Stat. 20 (1949).

Wir fügen noch einige Beiträge an, auf die im Text nicht speziell Bezug genommen wurde:

G. E. Bates and *J. Neyman:* Contributions on the theory of accident proneness I and II. Univ. of California Press 1952.

W. Feller: On a general class of «contagious» distributions. Ann. Math. Stat. 14 (1943).

J. Gurland: A generalized class on contagious distributions. Biometrics 14 (1958).

J. Neyman: On a new class of contagious distributions, applicable in entomology and bacteriology. Ann. Math. Stat. 10 (1939).

J. Sousselier et *M. Ramel:* De la détermination et de l'indétermination des primes d'excédents de sinistres. Non-proportional reinsurance. *ARITHBEL S. A.*, Bruxelles 1955.

L. Yntema: Einiges zur Wahrscheinlichkeitsansteckung. Het Verz. arch., Act. Bijv. XXXI (1954).

Résumé

L'auteur expose différentes méthodes permettant d'inclure dans le modèle mathématique l'hypothèse de la contagion des sinistres causés par un phénomène stochastique. En particulier, le schéma connu de Pólya/Eggenberger fait l'objet d'un examen approfondi.

Summary

Various models of stochastic processes based on contagious claim occurrences in the insurance field are outlined. In particular, the well known model of Pólya/Eggenberger is examined thoroughly.

Riassunto

Viene attirata l'attenzione sulle diverse possibilità di come l'ipotesi del contagio degli eventi di sinistri di un processo stocastico può essere compresa nei modelli matematici. In particolare viene sottoposto a approfondito esame lo schema noto Pólya/Eggenberger.