

# Das Einmalprämiensystem in der Schaden- und Rückversicherung und die Verallgemeinerung der in der Lebensversicherung üblichen Formen der Darstellung

Autor(en): **Giese, August**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **62 (1962)**

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555102>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Das Einmalprämiensystem in der Schaden- und Rückversicherung und die Verallgemeinerung der in der Lebensversicherung üblichen Formen der Darstellung

Von *August Giese, Berlin*

## Zusammenfassung

Mit Hilfe eines einfachen stochastischen Modells, einer geometrischen Verteilung, wird eine Formel für die Einmalprämie des versicherten Schadens 1 hergeleitet, die sich in der formalen Konstruktion mit der in der Lebensversicherung verwendeten Einlage für eine lebenslängliche Todesfallversicherung deckt. Auf dieser Grundlage werden verschiedene Untersuchungen verallgemeinernder Natur (Folgeschäden bzw. Reihen von solchen, Einflüsse eines variablen Leistungsschemas, Wartezeit, Bonus, Malus u. a.) vorgenommen. Ferner wird auch für die Schadenverteilung ein ähnliches Modell (geometrische Verteilung resp. Überlagerung mehrerer solcher Verteilungen) vorgeschlagen. Die Ergebnisse finden auf Fragen der Rückversicherung Anwendung.

## 1. Einleitung

Es sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass in einer gewissen Periode ( $t$ ) kein Schaden eintritt. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit

$$q = 1 - p$$

soll gelten für den Eintritt des Schadens 1 in der gleichen Periode ( $t$ ).

Ist diese Periode ( $t$ ) kurz genug, so kann  $q$  gleichzeitig als Häufigkeit eines einzigen Schadenereignisses verwendet werden.

Die zu erwartende Häufigkeitsverteilung ( $\pi$ ) für den Eintritt des ersten Schadens in der  $i$ -ten Periode, also nach  $i - 1$  schadenfreien Perioden ist:

$$\pi_i = p^{i-1} q, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Setzt man zudem  $\pi_N = p^{N-1}$  (gleich der Häufigkeit, innerhalb von  $N-1$  Perioden schadenfrei zu bleiben), dann ist:

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1.$$

Die Werte  $p$  und  $q$  werden zunächst als konstant innerhalb der gesamten Häufigkeitsverteilung ( $\pi$ ) angenommen.

Es hätte für den Zweck einer praktischen Verwendung nur geringe Bedeutung, den Grenzfall  $q = 0$  oder  $1$  mit zu erfassen, sofern diese Voraussetzung für beliebig viele Perioden ( $t$ ) gelten soll. Man kann also davon ausgehen, dass dieser Grenzfall nur für endlich viele Perioden gilt oder ganz ausgeschlossen ist. Im zunächst mit konstanten  $p$  und  $q$  ausgestatteten Modell kann von  $0 < q < 1$  ausgegangen werden, was somit gleichfalls für  $p$  gilt.

Bei einer endlichen Verteilung  $(\pi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ergibt sich die zugeordnete «erzeugende Funktion»:

$$F = F(e^p) = \sum_{i=1}^N \pi_i e^{i p} = 1 - (1 - e^p) a_N,$$

wo  $a_N = \frac{1 - p^N e^{pN}}{1 - p e^p}$  ist.

Deutet man die Variable  $e^p$  in der erzeugenden Funktion  $F$  als Diskontfaktor, etwa  $v$ , bezogen entweder auf das Ende oder auf die Mitte der Perioden ( $t$ ), so erhält man aus  $F$  gleichzeitig den Erwartungswert

$$A = 1 - (1 - v) a$$

für das erste Schadenereignis innerhalb einer endlichen oder beliebig langen Laufzeit ( $T$ ). Dieser Ausdruck  $A$  wäre damit die Prämie – d.h. Einmalprämie – für den versicherten Schaden  $1$ , der durch dasselbe Ereignis ausgelöst wird.

Ist die Möglichkeit von Teilschäden neben Totalschäden gegeben, so versteht man üblicherweise unter dem Schaden  $1$  den mittleren Schaden gleicher Höhe aus einer so normierten Schadenverteilung ( $s$ ).

## 2. Die Erwartungswerte des ersten Schadens ( $A$ ) und die Erwartungswerte aller Schäden ( $E$ )

Eine Zuordnung der Perioden ( $t$ ) an bestimmte Zeitintervalle ( $T/N$ ) braucht zunächst keineswegs vorausgesetzt zu werden. Erst mit der Einführung der Diskontierung durch die Gleichsetzung von  $v = e^p$  werden den Perioden ( $t$ ) bestimmte Zeitperioden zugeordnet. Jedem Wert  $v \leq 1$  entspricht ein Erwartungswert:

$$A \leq 1.$$

Je seltener das zu erwartende Ereignis sein soll, desto geringer ist der zugehörige Faktor  $v$  und der zugehörige Erwartungswert  $A$ .

Wenn  $v$  nur diskrete Werte annehmen soll, so bedeutet das lediglich einzweckmässige Annahme z. B. darüber, dass nur zwischen bestimmten, einzelnen Schadensklassen oder Tarifpositionen unterschieden werden soll. Als Funktion von  $v$  ist  $A$  unter den gegebenen Voraussetzungen stetig.

Der Wert  $A$  ist gleichzeitig die einmalige Prämie für eine «lebenslängliche» Versicherung. Die Verteilung der Schadenereignisse ( $\pi$ ) lässt nur ein einziges Schadenereignis zu. Ungewiss ist lediglich, wann dieses eintritt; es ist gewiss, dass es einmal eintritt.

Zunächst kann ferner angenommen werden, dass ein jedes von diesen Ereignissen einen einzigen Schaden in der Höhe 1 auslöst. Die Versicherung erlischt gleichzeitig. Der formalen Konstruktion gemäss handelt es sich um einen Parallelfall zur lebenslänglichen Todesfallversicherung, der die Einlage:

$$A_x = 1 - d a_x$$

entspricht, wo  $d = 1 - v$  der diskontierte Zinsfaktor ist.

Denkbar wäre es, zu einem bestimmten Zwecke – jedoch nicht notwendig – die Konstruktion auf den Eintritt eines einzigen Ereignisses zu beschränken. So wird in genau gleicher Weise zu verfahren sein, wenn nach Eintritt eines Ereignisses noch weitere Zufallsereignisse zugelassen werden. Diese sind entweder vollständig unabhängig von einem jeden vorangegangenen Ereignis, und davon soll hier zunächst ausgegangen werden; oder es kann der Erwartungswert der zukünftigen Ereignisse durch einzelne oder alle vorangegangenen beeinflusst werden. Eine funktionale Abhängigkeit zwischen diesen und jenen ist im gegebenen Zusammenhang ohne Interesse, da das zu den Problemen der Schadenverteilung ( $s$ ) gehört. Sollte eine Versicherung nach dem ersten Schadenereignis erneuert werden, so wäre es erforderlich, die Einlage  $A$  im Zeitpunkt dieses Ereignisses neu zu erheben oder bereitzustellen.

Unter den gegebenen Voraussetzungen kann die unbegrenzte Erneuerung so vorgesehen werden: An Stelle des zu versichernden Schadens 1 muss ein höherer Betrag versichert werden. Die Erhöhung selbst ist die Bedarfsprämie ( $E$ ) für die unbegrenzte Erneuerung. Versichert wird also nunmehr der Betrag

$$1 + E.$$

Die Einlage für die ursprüngliche Versicherung war  $A$  und für die erhöhte  $A(1 + E)$ .

Die Voraussetzungen sahen keine Änderungen im Schadenablauf vor. Daher gilt hier die übliche Gleichung:

$$E = A(1 + E)$$

und entsprechend:

$$E = \frac{A}{1 - A}.$$

Unter geänderten Voraussetzungen wird nicht mehr  $E$ , sondern eine modifizierte Bedarfsprämie, z. B.

$$f = f(E)$$

bei der Erneuerung gefordert werden.

Es treten hier verschiedene typische Fälle auf, die zum Teil auch aus ihrer Verwendung bekannt sind.

Der einfachste Fall ist die unmittelbare Abhängigkeit von  $f(E)$  als Funktion von  $E$ , wie beispielsweise

$$f(E) = (1 + \alpha)E, \quad \text{wo } \alpha \text{ ein Abschlag oder Zuschlag ist.}$$

Der modifizierte Wert  $f(E)$  kann jedoch ausserdem vom Schadenverlauf und von der zurückgelegten schadenfreien Dauer abhängen, was dem begrifflich gleichwertig ist.

Dabei wird man darauf zurückkommen, dass der Erwartungswert  $A$  aus der erzeugenden Funktion  $F(e^p)$  hergeleitet worden ist; nur hatte diese Herleitung damals einen ganz speziellen Fall zu behandeln. Der zu versichernde Schaden war bei der Gelegenheit der Konstanten 1 gleichzusetzen. Es handelte sich somit um das einfachste Leistungsschema. Sofern diese Voraussetzung nicht mehr gegeben ist, wäre von einem allgemeineren Ansatz für dieses auszugehen. Der allgemeinste Fall beruht auf folgendem Schema: Jede erzeugende Funktion  $F$  ist als eine Matrix  $\{\Phi\}$  zu behandeln, die so viele Positionen  $N$  enthält, wieviele unterschiedliche Potenzen von  $e$  bei der Bildung der erzeugenden Funktion zugelassen waren.  $N$  kann endlich sein oder beliebig gross. Jeder Position in der Matrix  $\{\Phi\}$  entspricht so ein besonderer zugelassener Fall im Ablauf des Zufallsprozesses. Einem jeden von diesen  $N$  Fällen entspricht wiederum bei der Herleitung des Erwartungswertes ein Versicherungsfall mit der Leistung  $\varepsilon_i$  oder 0. Das Schema der  $\varepsilon_i$  ist selbst eine Matrix, die genau so viele Positionen aufweist, nämlich  $N$ . Von diesen kann ein Teil durch gleiche Beträge besetzt sein. Es können auch

alle  $\varepsilon_i$  verschieden sein. Soweit eine gewisse Normierung, wie üblich, verwendet wird, bestehen  $N - 1$  Freiheitsgrade innerhalb des Schemas der  $\varepsilon_i$ . Von Bedeutung sind dann die Verhältnisse der  $\varepsilon_i : \varepsilon_{i-1}$ .

Anstelle von:  $A = F(v)$

kann hier geschrieben werden:

$$A(\varepsilon) = F(\varepsilon v).$$

Dieses ist eine symbolische Schreibweise für eine aus der zusammengesetzten Matrix abgeleitete Form  $F$ . In besonderen Fällen genügt es, den Wert  $v$  durch einen anderen Wert oder eine Funktion von  $v$  zu ersetzen.

Bereits in folgendem Falle wäre ein so modifizierter Ansatz erforderlich: Der zu versichernde Schaden sei zu Beginn gleich 1 und steige in jeder Periode ( $t$ ) während der gesamten Laufzeit bis zum Ende der vom ersten Schaden betroffenen Periode in einem konstanten Verhältnis von  $u : 1$ . Das Schema der  $\varepsilon_i$  verläuft hier in einer geometrischen Progression. Es ist  $\varepsilon_i : \varepsilon_{i-1} = u =$  eine Konstante.

Anstelle von:  $A = F(v)$

tritt hier

$$A(u) = F(uv).$$

Dieses wäre im vorliegenden besonderen Falle nicht mehr als ein symbolischer Ausdruck anzusehen. Man erhält nämlich  $A(u)$  bereits, indem hier lediglich  $v$  durch  $(uv)$  ersetzt wird.

Eine solche einfache Anpassung von  $A$  genügt im allgemeinen nicht. Bereits die Berücksichtigung einer Wartezeit, eines Selbstbehalts oder einer konstanten Franchise innerhalb der ersten  $k$  Perioden erfordert schon die Verwendung des Wertes einer aufgeschobenen Rente

$$a = a_k$$

oder einer Abart dieses Rentenwerts bei der Ableitung eines modifizierten Ausdrucks  $\bar{A}$ .

Weitere Beispiele dieser Art sind:

Die Berücksichtigung eines festen Bonusbetrages  $B$  nach einer einzigen, aber beliebigen schadenfreien Periode und eines Malus  $M$  nach einer einzigen schadenbehafteten Periode erfordert eine Ergänzung von  $A$  durch zusätzliche Glieder:

$$B(a-1) - MA.$$

Ein solcher Ansatz setzt voraus, dass der Malus  $M$  bei Fortsetzung des Vertrages eingehoben werden kann. Eine Fortsetzung dieser Art ist jedoch nicht gesichert. Auch ist eine einzige Periode nur wenig signifikant für den Zerfall einer Gesamtheit der versicherten Risiken in gute und schlechte. Unter dem Abgang durch Verzicht auf Fortsetzung nach dem ersten Schaden können auch gute und nicht allein die schlechten Risiken enthalten sein. Es müsste also ein Sicherheitszuschlag vorgesehen werden, indem ein Mindestbetrag  $M_0$  des Malus technisch gesichert wird. Das erfordert den Zuschlag von:

$$M_0 A.$$

Eine solche Versicherung wäre, wie vorauszusehen war, nicht stabil. Anstelle dieser könnte daher für den Bonus und den Malus eine Karenzdauer in den ersten  $k$  Perioden nach Beginn eingeschaltet werden. Die Bedingungen können vorsehen, dass ein Bonus nur nach  $k$  schadenfreien Perioden und ein Malus nur nach  $k$  schadenbehafteten nach dem Beginn fällig wird. In allen übrigen Fällen wird weder ein Bonus noch ein Malus fällig. Diese Unterscheidung nach dem Schadenverlauf in einem einmaligen Karenzabschnitt erfordert eine Ergänzung von  $A$  durch:

$$(B p^k - M q^k) v^k.$$

Im Ergebnis der Anwendung aller Ansätze dieser Art muss bemerkt werden, dass sie nur eine gewisse Form der Darstellung enthalten. Vorausgesetzt wurde nicht, ob sie sich auf eine einzelne Versicherung bestimmter Art beziehen oder auf ein Kollektiv von solchen.

### 3. Der Erwartungswert eines Folgeschadens oder einer Reihe von Folgeschäden

Genau so, wie  $A$  als Erwartungswert des ersten Schadens bestimmt wurde, kann vorgegangen werden, wenn lediglich der zweite Schaden oder der mit der Kennziffer ( $n$ ) zugrunde gelegt werden soll.

Die Folge der Perioden ( $t$ ) kann beliebig fortgesetzt werden. Es konnte angenommen werden, dass der erste Schaden in irgendeine Periode fällt. Die Ungewissheit besteht für den ersten sowie für jeden folgenden Schaden nur in der Periode, in die er fallen kann. Die Wahrscheinlichkeit für die beliebig ausgedehnte Schadenfreiheit kann beliebig klein angesetzt werden.

Um aus  $A$  den Erwartungswert des zweiten Schadens abzuleiten, genügt es zunächst anzunehmen, die Versicherung liefere ohne Regulierung des ersten Schadens über diesen hinweg bis zum zweiten. Damit für diesen der Betrag 1 zur Verfügung steht, müsste bereits sofort nach Anfall des ersten Schadens der Betrag  $A$  bereitgestellt worden sein. Man müsste also so vorgehen, dass dieser Betrag  $A$  als die versicherte Leistung im Falle des ersten Schadens gilt. Da andererseits für eine solche Versicherung mit der Leistung 1 die Prämie gleich  $A$  war, so hätte man für die Versicherung des zweiten Schadens als Prämie folglich:

$$A A = A^2.$$

Man kann auf gleiche Weise für jeden bestimmten Folgeschaden mit der Kennziffer ( $n$ ) die Prämie:

$$A^{n-1} A = A^n$$

mit dem Schluss von  $n - 1$  auf  $n$  ableiten.

Diese Form der Versicherung von bestimmten Folgeschäden gibt die Möglichkeit, einen gestaffelten Malus in einfacher Weise zu berücksichtigen. In gleicher Weise kann das bei einem Bonus geschehen.

Will man den ersten und alle Folgeschäden bis  $n = N$  gleichzeitig einbeziehen, so ergibt sich die Summe

$$\sum A^n = A + A^2 + \dots + A^N.$$

Unter den geltenden Voraussetzungen wäre immer  $A < 1$ . Die geometrische Reihe konvergiert mit wachsendem  $N$  gegen den Grenzwert:

$$E = \frac{A}{1 - A}.$$

Dieser Ausdruck ist in der Tat, wie zu erwarten, gleich dem entsprechenden, wie er sich aus dem vorangegangenen Abschnitt unter der Bezeichnung  $E$  unmittelbar ergeben hatte.

Die Bewertung der Gesamtheit aller Schäden mit den Kennziffern gleich und grösser als ( $n$ ) ergibt

$$A^{n-1} E \quad \text{als Erwartungswert.}$$

Ebenso die des ersten Schadens und aller folgenden bis zum ( $n - 1$ )-ten einschliesslich:

$$(1 - A^{n-1}) E.$$

Dem Ausdruck  $A$  war die erzeugende Funktion  $F = F(e^q)$  zugeordnet.

Es galt auch noch:  $A = F(v)$ .

Dem Ausdruck  $A^n$  muss folglich die erzeugende Funktion:

$$(F)^n \quad \text{zugeordnet werden.}$$

Dieses ist der Ausdruck dafür, dass die zugehörige neu hervorgegangene Verteilung für den  $n$ -ten Schaden durch  $n$ -fache Faltung (oder «Konvolution») entstanden ist. Die geometrische ( $\pi$ )-Verteilung ergibt so bekanntlich die sogenannte «Pascal-Verteilung», nämlich unmittelbar als Koeffizienten der Potenzen von  $v$  in der Entwicklung von:

$$\left( \frac{qv}{1-pv} \right)^n$$

Je höher  $n$  wird, desto geringer wird dieser Wert; da nur Werte von  $A < 1$  zugelassen waren, nimmt die Prämie wie eine Potenz eines echten Bruches ab.

Gleichzeitig wird die Stabilität, z. B. die zu erwartenden Schwankungen der «schadenfreien Lebensdauer», so gesteigert, als ob die Anzahl der unabhängigen Risiken um das  $n$ -fache gewachsen sei.

#### 4. Die Schadenverteilung (s)

Die Möglichkeit von Teilschäden wirkt sich so aus, dass meistens nur wenige, dafür aber hohe Schäden neben vielen geringen Schäden auftreten. Alle zugelassenen Schäden gruppieren sich um den durchschnittlichen Schaden, der gleich 1 sein möge. Der gesamte zugelassene Schadenbereich  $S \cdot \Delta$  kann in genügend viele Intervalle  $\Delta$  zerlegt werden. Im untersten Intervall treten alle anfallenden Schäden auf. Jeder von ihnen erreicht irgendeins von den zugelassenen Intervallen und setzt sich nicht mehr in das nächste fort. Die Ausbreitung eines Schadens kann durch gewisse Ursachen in einer Richtung beeinflusst werden oder dem Zufall unterliegen. Hier soll die letzte Voraussetzung gelten, da die systematischen Einflüsse anders erfasst werden müssen.

Hat ein Schaden das Intervall  $\Delta_i$  erreicht, so hat er die Alternative, sich mit der Wahrscheinlichkeit  $P$  in das Intervall  $\Delta_{i+1}$  fortzusetzen oder mit der Wahrscheinlichkeit  $\Delta P$  im  $i$ -ten zu verbleiben. Die so den Intervallen zugeordneten relativen Anzahlen der Schäden bilden eine Häufigkeitsverteilung (s).

Es ist

$$s_i = P^{i-1} \Delta P, \quad i = 1, 2, \dots, S;$$

$$s = P^S.$$

Dieses gilt, falls die «Erlebensfallwahrscheinlichkeit»  $P$  nicht von der erreichten Höhe ( $i$ ) abhängen sollte. Anderenfalls treten anstelle der Potenzen  $P^i$  die entsprechenden Produkte auf.

Es wäre dann  $P = P(i)$  und damit  $s_i = P(i) s_{i-1}$  eine mit steigendem  $i$  fallende Verteilung ( $s$ ). Es gilt für diese:

$$s + \sum_{i=1}^S s_i = 1.$$

Die Verteilung der Anzahl von Schäden pflegt bekanntlich in besonderem Masse Eigenschaften aufzuweisen, die von Fall zu Fall sehr unterschiedlich zu sein scheinen. Die Verteilungen dieser Art können sehr unsymmetrisch sein. In sehr vielen Fällen werden jedoch die  $s_i$  und  $P(i)$  abschnittsweise sehr stetig verlaufen und nur bei einer Reihe besonderer Schadengrenzen ( $i$ ) sind die entsprechenden Positionen in ( $s$ ) sehr stark besetzt. Das ist in der Form der Verteilung genau der gleiche Vorgang, der entsteht bei normalem Ablauf eines Bestandes von Todesfallversicherungen gleichen Alters. Sind darin die gemischten Versicherungen mit bestimmten Endaltern in besonders starkem Masse vertreten, so wirkt sich ihr Ablauf ebenso aus, wie eine natürliche Begrenzung der Ausbreitung von Schäden etwa durch eine häufige Verwendung bestimmter Deckungssummen in der Haftpflichtversicherung oder bestimmter normaler Beschränkungen in der Summenversicherung.

Bei der Verteilung der Anzahl der Schäden müsste daher nicht nur eine einzige Grenze  $S$  vorgesehen werden, sondern mehrere Stufen  $S(k)$ . Die ganze Verteilung würde sich dann aus mehreren – z. B. geometrischen – Reihen zusammensetzen, die sich in den untersten Intervallen überlagern, dann jedoch an verschiedenen Stufen  $S(k)$  enden. Vorauszusetzen wäre die Eliminierung von Einflüssen, die auf alle Schäden einseitig wirken. Die Intervalle  $\Delta_i$  wären demnach nicht in absoluten Beträgen, sondern immer in Anteilen des jeweiligen durchschnittlichen Schadens zu bemessen.

Um nun die zufälligen Auswirkungen des Schadenverlaufes in den einzelnen zugelassenen Intervallen  $\Delta_i$  zu erfassen, könnten zwei Anordnungen verwendet werden.

Einmal liesse sich jedes Intervall für sich allein betrachten: nämlich unter einer vorläufigen Annahme, in einem solchen Intervall wirke sich die besondere Schadenintensität eines Bestandes aus, der bereits durch Abgabe einer Priorität modifiziert ist. Die hier zu erwartende Anzahl der Schäden ist dann  $\sum_{x=1}^{x=i} s_x$ . Es wäre dabei nicht wesentlich, innerhalb eines Intervalls noch Teilschäden zuzulassen. Die gesonderte Behandlung eines solchen Intervalles oder einer Reihe von Intervallen ist gleichwertig der Versicherung eines Schadenexzedenten.

Die andere Möglichkeit sieht vor, das Verfahren, das im vorangegangenen Abschnitt entwickelt wurde und die Folgeschäden betrachtete, so fortzusetzen:

Die Anzahl der aufgetretenen Schäden ist gleichzeitig auch die Anzahl der in dem untersten Intervall vertretenen Schäden. Die Fortsetzung in die nächsthöheren Intervalle wäre gleichwertig einem System von Folgeschäden. Die Höhe eines jeden Folgeschadens wäre das  $i$ -fache einer Einheit  $\Delta$ . Der Schaden wird nur dann gezählt, wenn er diesen Betrag erreicht und sich nicht mehr fortsetzt; also dann, wenn die Versicherung endgültig ausscheidet.

Aus dieser Anordnung ergibt sich also der Erwartungswert der Schadenhöhe. Dieser Erwartungswert wäre gleich 1, wenn der gesamte Bestand zugrunde gelegt wird. Will man jedoch den Selbstbehalt oder mit diesem nur einen bestimmten folgenden Exzedenten zugrunde legen, so erhält man einen entsprechenden geringeren Wert. Mit dieser Anordnung wären also die Prioritäten erfasst.

## 5. Die Rückversicherung

Die klassischen Formen der Rückversicherung können ungeachtet ihrer Bedeutung, die ihnen zukommt, in diesem Zusammenhang nicht einbezogen werden. Dagegen ist die sogenannte «Nicht-proportionelle Rückversicherung» ein gleichartiges Problem. Folgende Ursachen von Überschäden sollen erfasst werden:

Zufällige, einzelne hohe Schäden innerhalb eines Jahres. Diese brauchen nicht das Jahresergebnis zu beeinflussen. Sie sind jedoch aus anderen Gründen nachteilig. Durch eine Rückdeckung von Einzel-

schaden-Exzedenten (sogenannte Excess of Loss) werden diese Zufallseinwirkungen ganz oder teilweise eliminiert.

Ferner:

Zufällige Ausfälle mit Wirkung auf das Jahresergebnis durch eine höhere Anzahl von Schäden. Darüber hinaus könnte angenommen werden, die durchschnittliche Schadenhöhe falle höher aus, als anzunehmen war. Die letzte Möglichkeit fällt jedoch dann nicht ins Gewicht, wenn die Anzahl der Schäden gross ist. Auch wird bereits durch die Rückdeckung der Exzedenten von Einzelschäden das Ergebnis bereinigt sein. Dann verbleibt als Aufgabe der Rückdeckung von Gesamtschäden oder Jahresüberschäden (Stop-Loss) die Sicherung vor zu hohen Schadenfrequenzen. Dabei wurde angenommen, dass die nicht zufällige Bewegung im Schadenergebnis ausser Betracht bleibt.

Aus dem vorangegangenen Abschnitt konnte eine gewisse Anordnung für die Exzedenten von Schäden abgeleitet werden. Die zugelassenen Schadenintervalle können der Priorität und den verschiedenen Exzedenten zugeordnet werden. Für jedes Intervall im Bereiche der hohen Schäden sei noch die Anzahl der Schäden festgelegt, die man selbst zu tragen bereit ist. Es kann nun ein einziger Schaden in vielen Intervallen gleichzeitig auftreten. Je höher er ist, desto mehr Intervalle werden betroffen. Im Schadenablauf kann jeder Schaden in der natürlichen Reihenfolge eine Kennziffer tragen. Soll der Selbstbehalt für einen einzigen Schaden nicht in zu vielen Intervallen zugelassen werden, so muss nach Möglichkeit eine Koinzidenz so vermieden werden, dass nicht die gleiche Ziffer in benachbarten Intervallen in dem Selbstbehalt enthalten ist. *Es müsste also ein Verfahren angewendet werden, die Prämie für die Schäden mit einer bestimmten Kennziffer gesondert zu ermitteln.*

Zu diesem Zwecke wurde ein solches Verfahren abgeleitet; ausgehend von dem Verfahren für die Aussonderung des ersten Schadens (= Ereignisses, s. Abschnitt 2) wird eine genau gleiche Behandlung bestimmter Folgeschäden abgeleitet (Abschnitt 3). *Das Wesen dieses Systems müsste darin gesehen werden, dass nicht eine Anzahl von Schäden in einer Zeit, sondern Schäden mit bestimmten Kennzeichen in einer Folge einzeln zu erfassen waren.*

Bei den Jahresüberschäden (Stop-Loss) kommt es dagegen überwiegend auf die Anzahl der Schäden an, folglich auf die Anzahl in dem

untersten Intervall. Hier kann eine Serie von Schäden z. B. eine solche mit den Nummern 1 bis  $n$  einbezogen werden. Sowohl in dem ersten als auch im zweiten Falle ist nicht als bekannt vorausgesetzt worden, welche Versicherungen auf bestimmte Kennzeichen (Nummern) der Folge entfallen werden; es ist jedoch ebenso möglich, eine Versicherung gesondert zu erfassen. Es muss in dieser so konstruierten Anordnung nur vorausgesetzt werden, dass eine Folge *a priori* gegeben ist. Diese kann eine Folge in der Zeit sein. Dann muss *a priori* festgelegt sein, welcher von zwei Schäden als erster gilt, falls zufällig beide «gleichzeitig» anfallen sollten, d. h. *a posteriori* nicht zu unterscheiden sind.

Es ist nicht erforderlich, die *a priori*-Folge in der Zeit festzulegen, sie kann in einer anderen Weise definiert sein, z. B. in einer gewissen Anordnung der Höhe nach.

## 6. Das Einmalprämiensystem

Als Prämie wurde in diesem Zusammenhang immer die Eimalprämie verstanden (siehe Giese: Einmalprämiensystem in der Lebensversicherung <sup>1)</sup>).

Eine sogenannte «laufende Prämie» kann immer als Mittel zur Finanzierung in der einen oder anderen Weise abgeleitet werden. Es braucht eine Prämie nicht in bar eingezogen zu werden; dieses kann vielmehr im Wege der Verrechnung geschehen. Die Einmalprämie kann in der Rückversicherung durch ein Depot gedeckt sein. Es käme dann nur noch auf die Verzinsung des Depots an. Dieses ist am Beispiele einer Lebensversicherung besonders evident. Aus diesem Grunde wurde eine Anlehnung an die Form einer solchen als zweckmässiges Mittel der Darstellung verwendet.

---

<sup>1)</sup> Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik Bd. 1 Heft 3, 1952.

### Literaturverzeichnis

- H. Ammeter* (Zürich): The Calculation of premium rates for Excess of Loss and Stop Loss reinsurance treaties. Arithbel S.A., Brussels 1955.
- A. Giese* (Hamburg): Einmalprämiensystem in der Lebensversicherung. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik Band 1, Heft 3, Mai 1952.
- J. Sousselier et M. Ramel* (Paris): De la détermination et de l'indétermination des primes d'excédents de sinistres. Arithbel S.A., Brussels 1955.
- Jaroslav Tuma*: Shock loss cover. New Reinsurance Comp.
- Jaroslav Tuma*: Second Risk Reinsurance. The New Ins. and Reinsurance Co., Liss.

## Résumé

A l'aide d'un modèle stochastique simple fondé sur une fonction de fréquence du type géométrique, l'auteur établit une formule permettant de calculer la prime unique nécessaire à la couverture d'un dommage d'un montant unitaire. Du point de vue structural, cette formule coïncide avec celle de la prime unique d'une assurance vie entière. Sur cette base, l'auteur entreprend des recherches d'un caractère plus général (notamment sur des sinistres en chaîne, resp. des séries de tels processus, les effets d'un schéma variable d'indemnisation, délai d'attente, bonus, malus, etc.). Ensuite, un modèle semblable (distribution géométrique, resp. superposition de plusieurs distributions géométriques) est proposé pour la représentation de la fonction de distribution des sinistres. Les résultats obtenus font l'objet d'applications au domaine de la réassurance.

## Summary

For a simple stochastic model denoted by a geometrical distribution a formula for the single premium for the insured amount 1 is derived which in its formal construction is identical with the single premium for a whole life assurance. On that basis several investigations of a more general nature (sequel resp. series of claims, effects of a variable benefit scheme, waiting period, bonus, malus, etc.) are examined. Furthermore a similar model for the distribution of claims (geometrical distribution resp. superposition of some of these distributions) is proposed. The results are applied on reinsurance problems.

## Riassunto

Con l'ausilio di un semplice modello stocastico, una ripartizione geometrica, viene derivata una formula per il premio unico del sinistro assicurato 1, equivalente nella costruzione formale, al versamento effettuato nell'assicurazione sulla vita per un'assicurazione di decesso vita intera. Su questa base vengono eseguite diverse indagini di natura generale (conseguenze dei sinistri, risp. serie di questi ultimi, influssi di uno schema variabile di prestazioni, periodo di attesa, bonus, malus, ecc.). Inoltre viene proposto anche per la ripartizione dei sinistri un modello simile (ripartizione geometrica, risp. sovrapposizione di parecchie di queste ripartizioni). I risultati trovano applicazioni su questioni della riassicurazione.