Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 62 (1962)

Artikel: Considérations sur la probabilité [...] que, de m têtes x, y, z, ..., w, r exactement soient en vie après n années

Autor: Urech, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555037

Considérations sur la probabilité ${}_n p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]}$ que, de m têtes x, y, z, …, w, r exactement soient en vie après n années

Par Aug. Urech, Lausanne

A mes chers Collègues,
Messieurs Jules Chuard et Charlie Jéquier, professeurs honoraires,
En témoignage d'estime et d'affection

Résumé

Dans l'enseignement, il est judicieux de présenter de diverses manières la démonstration de formules importantes, en utilisant si possible des méthodes classiques, applicables dans plusieurs domaines des mathématiques. Le présent travail examine dans ce sens la probabilité que, de m têtes, r exactement soient en vie après n années.

Cette probabilité, que nous désignerons par le symbole ${}_n p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]}$ de la notation actuarielle internationale, est donnée par la formule connue:

$$ {}_n p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots $$
$$ \ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m . $$

La signification des symboles $Z_r, Z_{r+1}, \ldots, Z_m$ sera rappelée plus loin.

La démonstration de cette formule offre un grand intérêt pour l'enseignement. Elle peut en effet être entreprise de diverses manières, dont plusieurs se retrouvent ailleurs dans les mathématiques et piquent la curiosité du chercheur. Il n'est pas possible, faute de temps, de les présenter toutes à la même volée d'étudiants. En revanche, on a là un bel exemple de la variété qu'on peut introduire dans un cours; plusieurs années de suite, des démonstrations classiques, différentes et précises d'une même formule, sont à disposition et l'esquisse des autres stimule l'intérêt des jeunes à la recherche.

Ces démonstrations ne présentent pas de difficultés spéciales, à la condition cependant de bien se pénétrer de la signification des symboles Z.

6

J'aime à croire que les éminents collègues à qui je dédie ce travail y trouveront quelque plaisir. N'ont-ils pas tous deux dans leur enseignement lumineux insisté pendant de nombreuses années sur la nécessité de définitions correctes, sur lesquelles s'appuient des démonstrations dès lors relativement faciles à conduire.

Pour développer la formule qui nous sert de thème, il est naturellement indiqué de procéder du particulier au général. On cherche à exprimer la probabilité ${}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]}$ au moyen des probabilités sur une tête: ${}_n p_x, {}_n p_y, {}_n p_z, \ldots, {}_n p_w$, qu'on suppose connues. Il n'est pas nécessaire que toutes les têtes suivent la même loi de mortalité; dans le cas général, chacune est soumise à sa loi propre. Le nombre r de têtes en vie après n années est compris entre 0 et m; $0 \leqq r \leqq m$.

Le cas particulier le plus simple est celui où l'on demande que toutes les têtes soient en vie au terme: $r = m$. Si d'autre part, m est d'abord supposé égal à 1, la probabilité cherchée, ${}_n p_x$, est donnée dans la table de mortalité de la tête x, ou bien, elle est égale au produit des probabilités annuelles $p_x, p_{x+1}, \ldots, p_{x+n-1}$.

Le cas de deux têtes, $m = 2$, conduit à l'application du théorème des probabilités composées. C'est l'occasion de rappeler que, dans la réalité, les têtes assurées par une même police ne sont en général pas indépendantes, qu'au contraire elles dépendent souvent les unes des autres en ce qui concerne la mortalité, dans une mesure plus ou moins grande qu'on ne sait pas fixer. Dans une communication faite au Congrès international d'actuaires de Stockholm, en 1930 (Comptes rendus, tome II, pages 402–405, Le problème du risque), S. Dumas en a donné un exemple impressionnant fondé sur la mortalité durant l'épidémie de grippe de 1918. Mieux que beaucoup d'explications, cet exemple, ou d'autres, fera comprendre aux étudiants la prudence avec laquelle notre formule et celles qui en découlent devront être appliquées dans la pratique, mais aussi le besoin de développer les études concernant le risque.

On généralise alors facilement au cas de m têtes et l'on a la formule:

$$ {}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[m]} = {}_n p_{xyz \ldots w(m)} = {}_n p_x \, {}_n p_y \cdots {}_n p_w . $$

On peut l'écrire symboliquement:

$$ {}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[m]} = Z_m ; $$

c'est un cas particulier de la formule générale.

Le cas situé en quelque sorte à l'opposé du précédent, celui où l'on demande que toutes les têtes soient décédées après n années, caractérisé par $r = 0$, n'est guère plus compliqué.

$$\begin{aligned} {}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[0]} = {}_{|n}q_{\overline{xyz\,\ldots\,w}} &= {}_nq_x\,{}_nq_y \cdots {}_nq_w \\ &= (1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y) \ldots (1 - {}_np_w) \\ &= 1 - ({}_np_x + {}_np_y + \ldots + {}_np_w) \\ &\quad + ({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + \ldots) \\ &\quad - ({}_np_{xyz} + \ldots) \\ &\quad \pm \ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^m\,{}_np_{xyz\,\ldots\,w(m)}\,. \end{aligned}$$

Le nombre des termes de ce développement est égal à:

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = (1+1)^m = 2^m.$$

On peut écrire symboliquement:

$${}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[0]} = Z_0 - Z_1 + Z_2 \mp \ldots + (-1)^m Z_m,$$

en posant:

$$Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} {}_np_{xy\ldots(r)},$$

où la $\sum$ s'étend aux $\binom{m}{r}$ probabilités sur r têtes qu'on peut former en partant des m têtes $x, y, z, \ldots, w$, pour $1 \leqq r \leqq m$, et $Z_0 = 1$ pour $r = 0$. C'est un cas particulier de la formule générale.

Entre les deux hypothèses extrêmes considérées jusqu'ici, de la conservation totale et de l'extinction totale du groupe $x, y, z, \ldots, w$, il y a toute la gamme des autres éventualités qu'on peut considérer:

r individus en vie après n années et $(m - r)$ décédés,

où r peut prendre successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, m-1$.

En abordant le cas où l'on demande que r têtes exactement soient en vie après n années, il est prudent d'examiner successivement quelques cas particuliers:

$m = 2$, $\quad r = 0, 1, 2$, $\quad$ où $r = 1$ seul est nouveau;

$m = 3$, $\quad r = 0, 1, 2, 3$, $\quad$ où $r = 1$ et 2 sont nouveaux;

$m = 4$, $\quad r = 0, 1, 2, 3, 4$, $\quad$ où $r = 1, 2$ et 3 sont nouveaux.

L'événement considéré, soit la présence au terme de r têtes vivantes, exactement, peut se réaliser de diverses manières qui s'excluent les unes les autres. Outre le théorème des probabilités composées, on peut appliquer celui des probabilités totales.

Pour $m = 4$, $r = 2$, par exemple, on a 6 éventualités:

(*a*) $x, y, \cancel{z}, \cancel{w}$ de probabilité partielle: ${}_np_x\, {}_np_y\, (1 - {}_np_z)\, (1 - {}_np_w)$,

(*b*) $x, \cancel{y}, z, \cancel{w}$ de probabilité partielle: ${}_np_x\, (1 - {}_np_y)\, {}_np_z\, (1 - {}_np_w)$,

. . . .

(*f*) $\cancel{x}, \cancel{y}, z, w$ de probabilité partielle: $(1 - {}_np_x)\, (1 - {}_np_y)\, {}_np_z\, {}_np_w$,

où les têtes biffées sont censées être décédées après n années, les autres étant en vie.

La probabilité cherchée devient:

$$
\begin{aligned}
{}_np_{\overline{xyzw}}^{[2} &= ({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + \ldots + {}_np_{zw}) \\
&\quad - 3\,({}_np_{xyz} + {}_np_{xyw} + \ldots + {}_np_{yzw}) \\
&\quad + 6\,{}_np_{xyzw}\,.
\end{aligned}
$$

Quelques exemples permettent d'affirmer que la probabilité cherchée ${}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[r]}$ s'exprime au moyen d'une somme algébrique:

de probabilités	sur	r		têtes:	${}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r)}$,
»	»	»	$(r+1)$	»	${}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r+1)}$,
»	»	»	$(r+2)$	»	${}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r+2)}$,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	»	»	m	»	${}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(m)}$,

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent des têtes bien déterminées au nombre de r, de $(r+1)$, de $(r+2)$, etc., jusqu'à m têtes, choisies parmi les m têtes $x, y, z, \ldots, w$. Du reste, toutes les probabilités sur $(r+t)$ têtes $(0 \leqq t \leqq m-r)$ qu'on peut former en partant des m têtes considérées $x, y, z, \ldots, w$ apparaissent symétriquement dans la formule ${}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[r]}$, de sorte qu'en réunissant les $\binom{m}{r+t}$ probabilités différentes sur $(r+t)$ têtes, ce sont les sommes des probabilités sur $(r+t)$ têtes

qui interviennent:
$$Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\ldots(r)}\,,$$
$$Z_{r+1} = \sum_{\binom{m}{r+1}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\ldots(r+1)}\,,$$
$$Z_{r+2} = \sum_{\binom{m}{r+2}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\ldots(r+2)}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_m = \sum_{\binom{m}{m}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\ldots(m)} = {}_np_{xyz\ldots w(m)}\,.$$

Les symboles Z_r, Z_{r+1}, $\ldots$, Z_m sont ainsi définis d'une manière précise pour $1 \leqq r \leqq m$. Z_{r+t} est la somme des $\binom{m}{r+t}$ probabilités sur $(r+t)$ têtes qu'on peut former en partant des m têtes considérées $xyz\ldots w$. Nous avons complété plus haut ces définitions par $Z_0 = 1$.

Les exemples montrent encore que les signes des termes en Z_r, Z_{r+1}, $\ldots$, Z_m sont alternativement positifs et négatifs, si bien qu'on peut écrire la probabilité cherchée sous la forme:

$$\begin{aligned} {}_np_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} &= \alpha_r Z_r - \alpha_{r+1} Z_{r+1} + \alpha_{r+2} Z_{r+2} \mp \ldots \\ &\ldots + (-1)^t \alpha_{r+t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \alpha_m Z_m\,, \end{aligned}$$

α_r, α_{r+1}, $\ldots$, α_m étant des coefficients entiers positifs; le premier, α_r est égal à 1, ainsi qu'on le voit facilement. Le coefficient α_{r+t} indique combien de fois chaque probabilité sur $(r+t)$ têtes apparaît dans le développement. Pour peu qu'on ait l'habitude de l'analyse combinatoire, il n'est pas très difficile de déterminer directement, en toute rigueur, les coefficients α_{r+t}, même au degré gymnasial, et c'est ainsi que souvent on établit la formule.

Le raisonnement le plus simple nous paraît être le suivant.

Si r têtes exactement doivent être en vie après n années, on peut envisager les $\binom{m}{r}$ éventualités:

(a) $\quad x, y, z, \ldots, r, \cancel{s}, \cancel{t}, \ldots, \cancel{w},$

(b) $\quad x, y, z, \ldots, \cancel{r}, s, \cancel{t}, \ldots, \cancel{w},$

$\quad \cdots\cdots\cdots,$

où les têtes biffées sont censées être décédées après n années, les autres étant en vie. Ces éventualités s'excluent l'une l'autre; le tableau des cas possibles est du reste complet.

Les probabilités partielles de chacune des éventualités sont:

$$(a) \qquad {}_np_x\, {}_np_y \ldots {}_np_r\,(1 - {}_np_s)\,(1 - {}_np_t) \ldots (1 - {}_np_w)\,,$$

$$(b) \qquad {}_np_x\, {}_np_y \ldots (1 - {}_np_r)\, {}_np_s\,(1 - {}_np_t) \ldots (1 - {}_np_w)\,,$$

. . . .

En effectuant les calculs, chaque probabilité partielle fournit 2^{m-r} termes, soit:

1 probabilité sur r têtes de la forme ${}_np_{\alpha\beta\ldots(r)}$,

$\binom{m-r}{1}$ probabilités sur $(r+1)$ têtes de la forme ${}_np_{\alpha\beta\ldots(r+1)}$,

. . . .

$\binom{m-r}{t}$ probabilités sur $(r+t)$ têtes de la forme ${}_np_{\alpha\beta\ldots(r+t)}$,

. . . .

$\binom{m-r}{m-r}$ probabilités sur m têtes de la forme ${}_np_{\alpha\beta\ldots(m)}$;

en tout, on a bien:

$$1 + \binom{m-r}{1} + \binom{m-r}{2} + \ldots + \binom{m-r}{t} + \ldots + \binom{m-r}{m-r} = (1+1)^{m-r} \text{ termes.}$$

Ainsi, les $\binom{m}{r}$ éventualités conduisent au total à: $\binom{m}{r} \cdot \binom{m-r}{t}$ probabilités sur $(r+t)$ têtes qui ne sont pas nécessairement différentes les unes des autres. A cause de la symétrie, chaque probabilité sur $(r+t)$ têtes doit cependant se présenter le même nombre de fois. Comme il existe $\binom{m}{r+t}$ probabilités différentes sur $(r+t)$ têtes, chacune se retrouve:

$$\frac{\binom{m}{r}\binom{m-r}{t}}{\binom{m}{r+t}} = \binom{r+t}{t} \text{ fois.}$$

C'est le coefficient α_{r+t} de notre développement, de sorte qu'on a bien:

$$
{}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m .
$$

On sait que ces coefficients s'obtiennent facilement au moyen du triangle arithmétique de Pascal.

Cependant, la démonstration directe ci-dessus, qui vient d'abord à l'esprit, n'est ni la plus élégante, ni la plus simple. Il arrive qu'elle ne soit pas absolument convaincante pour les jeunes gens qui n'ont pas assez de pratique dans ce genre de calculs. En cours de route on est presque fatalement tenté d'appliquer plutôt la méthode de récurrence. Par l'examen des cas particuliers $m = 1, 2, 3, 4$, on s'aperçoit assez vite que la formule doit être celle que nous avons écrite à la page 85. Elle est vraie lorsque $m = 1, 2, 3, 4$, quel que soit r. Admettons qu'elle est exacte dans le cas de $(m-1)$ têtes pour toutes les valeurs $r \leqq m-1$; il s'agit de prouver qu'elle est alors nécessairement vraie aussi pour m têtes et $r \leqq m$.

Considérons donc m têtes $x, y, z, \ldots, w$. Si r têtes exactement doivent être en vie après n années, on peut envisager par exemple les deux éventualités suivantes:

(*a*) la tête x doit être en vie après n années ainsi que exactement $(r-1)$ autres têtes choisies de toutes les manières possibles parmi les $(m-1)$ têtes $y, z, \ldots, w$;

(*b*) la tête x doit être décédée après n années; en revanche parmi les $(m-1)$ têtes $y, z, \ldots, w$, r têtes exactement choisies de toutes les manières possibles doivent être en vie.

Ces deux éventualités s'excluent l'une l'autre; il n'y en a du reste pas d'autre possible. Pour avoir la probabilité totale ${}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]}$, il suffit d'additionner les probabilités partielles relatives aux éventualités (*a*) et (*b*). On a donc:

$$
{}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = {}_n p_x \, {}_n p_{\overline{yz \ldots w(m-1)}}^{[r-1]} + (1 - {}_n p_x) \, {}_n p_{\overline{yz \ldots w(m-1)}}^{[r]} ,
$$

$$
\text{où } r \leqq m-1 .
$$

Puisque notre formule est vraie par hypothèse dans le cas de $(m-1)$ têtes pour $r \leqq m-1$:

$$
{}_n p_{\overline{yz \ldots w(m-1)}}^{[r-1]} = Z_{r-1} - \binom{r}{1} Z_r + \binom{r+1}{2} Z_{r+1} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t-1}{t} Z_{r+t-1} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{m-r} Z_{m-1},
$$

$$
{}_n p_{\overline{yz \ldots w(m-1)}}^{[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots + (-1)^{t-1} \cdot
$$

$$
\binom{r+t-1}{t-1} Z_{r+t-1} + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r-1} \binom{m-1}{m-r-1} Z_{m-1}.
$$

En multipliant la première probabilité par ${}_n p_x$ et la seconde par $(1 - {}_n p_x)$, on obtient:

$$
{}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = {}_n p_x \Big[Z_{r-1} - \binom{r}{1} Z_r + \binom{r+1}{2} Z_{r+1} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t-1}{t} Z_{r+t-1} \pm \ldots\ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{m-r} Z_{m-1} \Big] +
$$

$$
+ \Big[Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r-1} \binom{m-1}{m-r-1} Z_{m-1} \Big] +
$$

$$
+ {}_n p_x \Big[-Z_r + \binom{r+1}{1} Z_{r+1} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t-1}{t-1} Z_{r+t-1} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{m-r-1} Z_{m-1} \Big].
$$

De l'addition des quantités placées dans le 1er et dans le 3e crochet, multipliées par ${}_n p_x$, résulte sans difficulté:

$$
{}_n p_x \Big[Z_{r-1} - \binom{r+1}{1} Z_r + \binom{r+2}{2} Z_{r+1} \mp \ldots\ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t-1} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_{m-1} \Big],
$$

car l'addition des coefficients du terme général en Z_{r+t-1} donne:

$$
\binom{r+t-1}{t} + \binom{r+t-1}{t-1} = \frac{(r+t-1)!}{t!\,(r-1)!} + \frac{(r+t-1)!}{(t-1)!\,r!} = \frac{(r+t-1)!\,[r+t]}{t!\,r!} = \binom{r+t}{t}.
$$

En revanche, une difficulté d'écriture survient lorsqu'on veut additionner la somme partielle ainsi obtenue à la quantité figurant dans le 2e crochet de ${}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[r]}$.

On a l'habitude d'écrire les symboles Z en les affectant d'un indice r, $r+1$, ... qui indique le nombre de têtes participant aux probabilités ${}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r)}$ qui figurent sous le signe $\sum$. Par exemple: $Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r)}$. Cependant, Z_r dépend aussi du nombre de têtes considérées m, ce que l'on pourrait préciser en écrivant:

$$Z_r^{(m)} = \sum_{\binom{m}{r}} {}_np_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,(r)}\,.$$

Dans les développements ci-dessus, les symboles Z ont trait à $(m-1)$ têtes seulement: y, z, ..., w. En précisant ainsi, le terme en Z_{r+t-1} de la somme partielle ci-dessus additionné au terme en Z_{r+t} contenu dans le deuxième crochet de ${}_np_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{[r]}$ donne:

$$(-1)^t \binom{r+t}{t} \left[{}_np_x Z_{r+t-1}^{(m-1)} + Z_{r+t}^{(m-1)}\right],$$

où
$$Z_{r+t-1}^{(m-1)} = \sum_{\binom{m-1}{r+t-1}} {}_np_{yz\,\ldots\,\varphi\,(r+t-1)}\,,$$

et
$$Z_{r+t}^{(m-1)} = \sum_{\binom{m-1}{r+t}} {}_np_{yz\,\ldots\,\varphi\varepsilon\,(r+t)}\,.$$

Le produit: ${}_np_x Z_{r+t-1}^{(m-1)}$ contient les $\binom{m-1}{r+t-1}$ probabilités de survie sur $(r+t)$ têtes choisies parmi les m têtes $x\ y\ z\ \ldots\ w$ qui, toutes, comprennent la tête x; elles sont au nombre de $\binom{m-1}{r+t-1}$;

$Z_{r+t}^{(m-1)}$ est la somme de toutes les probabilités de survie sur $(r+t)$ têtes choisies parmi les m têtes $x\ y\ z\ \ldots\ w$ qui ne comprennent pas la tête x; il y en a $\binom{m-1}{r+t}$. Au total nous avons les $\binom{m}{r+t} = \binom{m-1}{r+t-1} + \binom{m-1}{r+t}$ probabilités de survie sur $(r+t)$ têtes choisies parmi les m têtes $x\ y\ z\ \ldots\ w$.

On a: $$ {}_{n}p_x Z^{(m-1)}_{r+t-1} + Z^{(m-1)}_{r+t} = Z^{(m)}_{r+t}\,, $$

d'où: $$ {}_{n}p_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots $$

$$ \ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r-1} \binom{m-1}{m-r-1} Z_{m-1} + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m\,, $$

tous les symboles Z étant relatifs à m têtes.

Le cas $r = m$ se calcule directement:

$$ {}_{n}p_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;[m]} = {}_{n}p_x\, {}_{n}p_y \cdots {}_{n}p_w = {}_{n}p_{xyz\,\ldots\,w(m)} = Z_m\,. $$

La formule est également démontrée en toute rigueur.

Dans de nombreuses questions de mathématiques, des plus variées, la méthode de récurrence rend de grands services. On peut assez souvent aussi l'utiliser en mathématiques actuarielles; la démonstration précédente n'en est qu'un exemple.

Un autre moyen de déterminer les coefficients de la formule:

$$ {}_{n}p_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;[r]} = \alpha_r Z_r - \alpha_{r+1} Z_{r+1} + \alpha_{r+2} Z_{r+2} \mp \ldots $$
$$ \ldots + (-1)^t \alpha_{r+t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \alpha_m Z_m $$

consiste à l'établir, si possible, dans un cas simple comportant m têtes. Supposons qu'elles soient toutes de même âge x et qu'elles suivent toutes la même loi de mortalité, de sorte que les probabilités, pour chaque tête, de vivre après n années soient toutes égales. En désignant ces têtes d'âge x par $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \omega$ pour les distinguer les unes des autres, on peut noter $\binom{m}{r}$ éventualités différentes, dans lesquelles r têtes exactement seront en vie après n années, qui s'excluent les unes les autres; il n'y en a pas d'autre. Chacune a pour probabilité partielle

$$ {}_{n}p_x^r \left(1 - {}_{n}p_x\right)^{m-r}, $$

de sorte que la probabilité cherchée dans ce cas particulier est:

$$ {}_{n}p_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;[r]} = {}_{n}p_{\overline{xxx\,\ldots\,x\,(m)}}^{\;[r]} = \binom{m}{r} {}_{n}p_x^r \left(1 - {}_{n}p_x\right)^{m-r} = $$

$$ \binom{m}{r} {}_{n}p_x^r - \binom{m}{r}\binom{m-r}{1} {}_{n}p_x^{r+1} + \binom{m}{r}\binom{m-r}{2} {}_{n}p_x^{r+2} \mp \ldots $$

$$ \ldots + (-1)^t \binom{m}{r}\binom{m-r}{t} {}_{n}p_x^{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{r}\binom{m-r}{m-r} {}_{n}p_x^m. $$

Pour comparer cette formule à celle du cas général écrite ci-dessus avec les coefficients α_{r+t}, nous introduisons les fonctions Z. Dans le cas particulier où toutes les têtes sont d'âge x et suivent la même loi de mortalité, elles deviennent:

$$Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} {}_n p_{\alpha\beta \dots (r)} = \binom{m}{r} {}_n p_{xx \dots (r)} = \binom{m}{r} {}_n p_x^r,$$

. . . .

$$Z_{r+t} = \sum_{\binom{m}{r+t}} {}_n p_{\alpha\beta \dots (r+t)} = \binom{m}{r+t} {}_n p_x^{r+t},$$

. . . .

$$Z_m = \sum_{\binom{m}{m}} {}_n p_{\alpha\beta \dots (m)} = \binom{m}{m} {}_n p_{xx \dots (m)} = \binom{m}{m} {}_n p_x^m.$$

Le terme général de la probabilité ${}_n p_{\overset{[r]}{\overline{xxx \dots x(m)}}}$ s'écrit:

$$(-1)^t \frac{\binom{m}{r}\binom{m-r}{t}}{\binom{m}{r+t}} Z_{r+t} = (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t},$$

d'où

$${}_n p_{\overset{[r]}{\overline{xxx \dots x(m)}}} = \binom{r}{0} Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \dots$$

$$\dots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \dots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m.$$

Or, les coefficients α_{r+t} de la formule générale sont indépendants des probabilités ${}_n p_x, {}_n p_y, \dots, {}_n p_w$. Le cas particulier nous a permis de les calculer. On a, quelles que soient les probabilités:

$$\alpha_{r+t} = \binom{r+t}{t}.$$

Un procédé qui pourrait rendre de grands services en assurance, qu'on n'utilise cependant guère, est l'examen des cas aux limites.

La formule exprimée au moyen des coefficients α_{r+t}, d'abord inconnus, est valable, nous l'avons dit, dans tous les cas. Les coefficients α sont indépendants des probabilités ${}_n p_x$, ${}_n p_y$, ..., ${}_n p_w$, ainsi que du différé n. Choisissons les tables de mortalité des diverses têtes, soit les probabilités p, de manière que la probabilité ${}_n p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]}$ puisse être calculée directement sans peine comme aussi les symboles Z du deuxième membre de la formule. Nous aurons une relation entre les coefficients α_{r+t}. Par d'autres choix convenables, répétés $(m-r)$ fois, on aura le moyen de calculer indirectement tous les coefficients α_{r+t} et la formule sera établie.

Supposons donc que le différé $n = 1$ et que les lois de mortalité relatives à $x, y, z, \ldots, w$ soient telles que la probabilité de survie de chacune des $(r+1)$ premières têtes soit égale à 1 et celle de chacune des $(m-r-1)$ dernières, égale à 0.

$$p_x = p_y = \ldots = p_r = p_s = 1, \quad \text{et} \quad p_t = \ldots = p_w = 0.$$

Ainsi, par hypothèse, $(r+1)$ têtes seront en vie au terme;

$$p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = 0.$$

Les fonctions Z deviennent dans ce cas:

$$Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} p_{\alpha\beta\ldots(r)} = r+1,$$

$$Z_{r+1} = \sum_{\binom{m}{r+1}} p_{\alpha\beta\ldots(r+1)} = 1,$$

$$Z_{r+2} = \ldots = Z_m = 0.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule:

$$p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = Z_r - \alpha_{r+1} Z_{r+1} + \alpha_{r+2} Z_{r+2} \mp \ldots$$
$$\ldots + (-1)^t \alpha_{r+t} Z_{r+t} \mp \ldots + (-1)^{m-r} \alpha_m Z_m,$$

on obtient la relation suivante entre les coefficients:

$$(r+1) - 1\,\alpha_{r+1} + 0\,\alpha_{r+2} \mp \ldots + 0\,\alpha_m = 0.$$

Elle conduit à la valeur du coefficient $\alpha_{r+1} = \underline{\binom{r+1}{1}}$.

Conservant le différé $n = 1$, supposons maintenant que les lois de mortalité soient telles que:

$p_x = p_y = \ldots = p_r = p_s = p_t = 1$, les probabilités de survie des autres têtes étant nulles. On a:

$$p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = 0,$$

et

$$Z_r = \binom{r+2}{r} = \binom{r+2}{2},$$

$$Z_{r+1} = \binom{r+2}{r+1} = \binom{r+2}{1},$$

$$Z_{r+2} = \binom{r+2}{r+2} = 1,$$

$$Z_{r+3} = Z_{r+4} = \ldots = Z_m = 0.$$

Ces valeurs, introduites dans la formule en α, conduisent à une nouvelle relation entre les coefficients inconnus α:

$$\binom{r+2}{2} - \binom{r+2}{1}\alpha_{r+1} + 1\,\alpha_{r+2} - 0\,\alpha_{r+3} \pm \ldots + 0\,\alpha_m = 0,$$

d'où:

$$\alpha_{r+2} = \binom{r+2}{1}\binom{r+1}{1} - \binom{r+2}{2} = \underline{\binom{r+2}{2}}.$$

On voit comment il faut continuer. Choisissons maintenant les lois de mortalité de manière que les $(r+t)$ premières têtes soient en vie après une année, les autres étant décédées.

$p_x = p_y = \ldots = p_r = \ldots = p_u = 1$, u étant la $(r+t)^{\text{e}}$ tête; les probabilités de survie des autres têtes sont nulles. On a:

$$p_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = 0,$$

et

$$Z_r = \binom{r+t}{r} = \binom{r+t}{t},$$

$$Z_{r+1} = \binom{r+t}{r+1} = \binom{r+t}{t-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_{r+t} = \binom{r+t}{r+t} = 1,$$

$$Z_{r+t+1} = Z_{r+t+2} = \ldots = Z_m = 0.$$

La formule en α conduit à:

$$\binom{r+t}{t}-\binom{r+t}{t-1}\alpha_{r+1}+\binom{r+t}{t-2}\alpha_{r+2}\mp\ldots+(-1)^{t-1}\binom{r+t}{1}\alpha_{r+t-1}+(-1)^{t}1\alpha_{r+t}=0,$$

d'où:

$$\alpha_{r+t}=\binom{r+t}{1}\alpha_{r+t-1}-\binom{r+t}{2}\alpha_{r+t-2}\pm\ldots+(-1)^{t}\binom{r+t}{t-1}\alpha_{r+1}-(-1)^{t}\binom{r+t}{t}.$$

Faisant usage de la méthode de récurrence, on admet que:

$$\alpha_{r+1}=\binom{r+1}{1};\quad \alpha_{r+2}=\binom{r+2}{2};$$

(comme on vient de le démontrer); et, en outre que:

$$\alpha_{r+3}=\binom{r+3}{3};\ \ldots;\ \text{jusqu'à: } \alpha_{r+t-1}=\binom{r+t-1}{t-1}.$$

Il en résulte:

$$\alpha_{r+t}=\binom{r+t}{1}\binom{r+t-1}{t-1}-\binom{r+t}{2}\binom{r+t-2}{t-2}\pm\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{t}\binom{r+t}{t-1}\binom{r+1}{1}-(-1)^{t}\binom{r+t}{t},$$

qu'on met facilement sous la forme:

$$\binom{r+t}{t}\left[1-(1-1)^{t}\right]=\underline{\binom{r+t}{t}},\ \text{quel que soit } t\leqq m-r.$$

La considération des cas aux limites permet ainsi d'établir un système de $(m-r)$ relations du premier degré, non homogènes et indépendantes, entre les coefficients:

$$\alpha_{r+1},\ \alpha_{r+2},\ \ldots,\ \alpha_{m}.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\alpha_{r+1} & & & & & =\binom{r+1}{1}\\
\binom{r+2}{1}\alpha_{r+1}- & \alpha_{r+2} & & & & =\binom{r+2}{2}\\
\binom{r+3}{2}\alpha_{r+1}- & \binom{r+3}{1}\alpha_{r+2}+ & \alpha_{r+3} & & & =\binom{r+3}{3}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\binom{r+t}{t-1}\alpha_{r+1}- & \binom{r+t}{t-2}\alpha_{r+2}+ & \binom{r+t}{t-3}\alpha_{r+3}\mp & \ldots & & =\binom{r+t}{t}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\binom{m}{m-r-1}\alpha_{r+1}- & \binom{m}{m-r-2}\alpha_{r+2}+ & \binom{m}{m-r-3}\alpha_{r+3}\mp & \ldots & +(-1)^{m-r-1}\alpha_{m} & =\binom{m}{m-r}
\end{array}\right.$$

Si l'on avait envisagé pour commencer le cas dans lequel la probabilité de survie de chacune des r premières têtes est égale à 1 et celle des $(m-r)$ dernières égale à 0, on aurait

$$p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = 1\,,$$

$$Z_r = 1\,; \quad Z_{r+1} = Z_{r+2} = Z_{r+3} = \ldots = Z_m = 0\,.$$

La formule en α conduirait à:

$$1\,\alpha_r - 0\,\alpha_{r+1} \pm \ldots + 0\,\alpha_m = 1\,;$$

d'où $$\underline{\alpha_r = 1}\,,$$

résultat que nous avions établi directement plus haut.

Dans notre formule générale, les coefficients $\alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_m$ sont donc indépendants des probabilités ${}_np_x, {}_np_y, \ldots, {}_np_w$ et du différé n. Seules les quantités $Z_r, Z_{r+1}, \ldots, Z_m$ sont fonctions des probabilités. De par sa nature, chaque probabilité ${}_np_x, {}_np_y, \ldots$ est comprise entre 0 et 1, les limites 0 et 1 étant admises; il en est de même de ${}_np_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]}$.

Dans nos considérations, on pourrait tout aussi bien envisager m variables $x, y, z, \ldots, w$ ainsi qu'un paramètre $0 \leqq r \leqq m$ et définir une fonction $F(x, y, z, \ldots, w : [r])$ en lieu et place de la probabilité ${}_np_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]}$ au moyen de combinaisons qui se substitueraient aux éventualités. Des calculs semblables à ceux que nous avons faits plus haut conduiraient à des fonctions symétriques $Z_r, Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots, Z_m$ de $x, y, z, \ldots, w$ analogues aux fonctions de probabilités Z utilisées jusqu'ici. On aurait encore:

$$F(x, y, z, \ldots, w : [r]) = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots$$
$$\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m\,,$$

avec les mêmes coefficients α_{r+t} que plus haut.

La fonction F ne serait plus une probabilité. Nous aurions une fonction plus générale que celle que nous avons envisagée dans l'étude ci-dessus, qui admettrait comme cas particulier la fonction de probabilité lorsque toutes les variables sont comprises entre 0 et 1. Nous espérons revenir sur ce problème à une autre occasion.

Zusammenfassung

Im Unterricht ist es angezeigt, wichtige Formeln auf mehrere Arten zu beweisen, wenn möglich unter Verwendung klassischer Methoden, die in verschiedenen Zweigen der Mathematik Verwendung finden. Vorliegende Arbeit untersucht in diesem Sinne die Wahrscheinlichkeit, dass genau r von m Personen n Jahre überleben.

Summary

For purposes of instruction it is recommended to prove important formulas in several ways, by applying, if possible, the classical methods in the different branches of mathematics. The present paper investigates in this sense the probability that exactly r of m persons survive n years.

Riassunto

Nell'insegnamento è raccomandabile di presentare in modi diversi la dimostrazione di formule importanti usando possibilmente dei metodi classici, che trovano applicazione in diversi rami della matematica. Il presente lavoro esamina in tale senso la probabilità che di m teste siano in vita esattamente r dopo n anni.