

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 62 (1962)

**Artikel:** Abhängige und unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten

**Autor:** Romer, Bernhard

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-555013>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Abhängige und unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten

*Von Bernhard Romer, Basel*

### Zusammenfassung

Die sogenannten «abhängigen» und «unabhängigen» Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden auf ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht. Es ergibt sich ein strenger Zusammenhang, wenn man die Abgänge während der Zeiteinheit genau verfolgt. Unabhängige Wahrscheinlichkeiten bei verträglichen Ereignissen gemäss der Wahrscheinlichkeitstheorie sind hingegen Grössen anderer Art, mit denen man gewöhnlich bei Untersuchungen über Ausscheideursachen nicht operieren kann. Schliesslich wird noch der Zugang einbezogen.

### I. Einleitende Bemerkungen

«Gliederungswahrscheinlichkeiten» und «Verlaufswahrscheinlichkeiten» sind in sehr verschiedenem Ausmasse mit Problematik befrachtet. Beziehen sich die erstgenannten Wahrscheinlichkeiten <sup>1)</sup> auf den Zustand einer in Teilmassen zerlegten Gesamtmasse zu einem bestimmten Zeitpunkt, so haben es die zweitgenannten mit Vorgängen an einer solchen Gesamtmasse während eines bestimmten Zeitraumes zu tun. Je nach Lage und Länge der Zeitstrecken, je nachdem, ob die Vorgänge die Einbusse eines oder mehrerer Merkmale bei den Elementen bewirken, je nachdem, ob das Wiedergewinnen ursprünglicher Merkmale ausgeschlossen ist oder nicht, je nach der Zulässigkeit von Zugängen usw. bereichert sich die begriffliche Fassung durch zum Teil recht heikle Fragen.

Es kreist im Zusammenhang mit versicherungstechnischen Aufgaben bereits eine stattliche Literatur um die zweitgenannte Gattung

---

<sup>1)</sup> Wir sprechen hier von Wahrscheinlichkeiten, weil es sich um vorgestellte Modellgesamtheiten handelt, die sich einem Urnenschema mit gewissen Entnahmevorschriften angleichen lassen.

von Wahrscheinlichkeiten, und zwar fast ausschliesslich um den Begriff der Ausscheidewahrscheinlichkeit. Manche Schweizer Autoren haben zur Klärung der Sachlage beigetragen, zum grossen Teil in diesen «Mitteilungen». Dabei ist deutlich geworden, dass sich auf zwei ganz verschiedenen Seiten der Zutritt ins Problemfeld erschliesst. So kann man gewissermassen mikroskopisch vorgehen – indem man Bestandesvorgänge innerhalb sehr kurzer Zeitstrecken untersucht – oder makroskopisch – wo man ohne Grenzübergänge «ins Kleinste» auskommt. In jener Methode ist die Intensität der beherrschende Begriff, dessen elegante Handhabung aber durch einengende Voraussetzungen erkaufte wird; in dieser hingegen stützt man sich auf den isolierbaren Einzelvorgang, der sprunghaft auftritt. Es handelt sich also, anschaulich gesprochen, dort um ein Ausmessen von Abfluss- und Durchflussmengen einer Strömung, wo die einzelnen Ereignisfälle eine abgegrenzte Menge der strömenden Masse verkörpern, hier statt dessen um das Abzählen von individuellen Vorgängen. Beide Behandlungsverfahren finden sich im verallgemeinerten Begriff der Integral-Ausscheideintensität zu höherer Einheit ([8], [3])<sup>1)</sup>.

Der vorliegende Artikel gilt vornehmlich den gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen Darstellungsweisen für die Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei mehreren Ausscheideursachen. Die Bedingungen sollen dabei tunlichst wenig spezialisiert sein, entgegen dem, was üblicherweise geschieht durch Annahmen wie Kleinheit der Wahrscheinlichkeiten, gleichmässigen Verlauf des Geschehens usw. Wir halten uns an die Untersuchung diskreter Dinge und Vorfälle und gehen auf möglichst elementare Darstellung aus.

## II. Der Ausgangsbestand und seine Bewegung

Eine wohlbestimmte Anzahl von Elementen (Dingen, Personen) besitze zu Beginn eines Zeitraumes gewisse gemeinsame Stammeigenschaften (Hauptmerkmale, Kennzeichen). Diese Elemente sind in nämlicher Art und Weise Ereignissen ausgesetzt, die zweierlei Folgen haben können:

---

<sup>1)</sup> Eckige Klammern bedeuten die Nummern des Literaturverzeichnisses am Schluss.

1. Das jeweils betroffene Element entzieht sich völlig der weiteren Beobachtung, sei es, dass es untergeht (Tod, Erlöschen), sei es, dass es einfach aus der Beobachtung entschwindet (z. B. bei Versicherungsbeständen durch Vertragsablauf und durch Rücktritt vom Vertrag; in der Bevölkerung beispielsweise durch Auswanderung).
2. Das jeweils betroffene Element wird einer Stammeigenschaft beraubt, lässt sich jedoch weiter verfolgen. An die Stelle des ursprünglichen Merkmals tritt ein Ersatzmerkmal – das unter Umständen ein konträres Alternativmerkmal sein kann, so dass es eine dritte Eigenschaft im selben Begriffskreis nicht gibt (gesund – krank, aktiv – invalid); manchmal geht jedoch die begriffliche Aufgliederung weiter (verschiedene Arten des Zivilstandes, daher auch mehr als zwei Arten des Wechsels; ebenso Berufswechsel, Wohnsitzwechsel, Invaliditätsgrade usw.).

Die Wechsel mehrerer Merkmale können sich an einem und demselben Element hintereinander vollziehen oder gar genau gleichzeitig vorkommen. Dann wird man aber zwischen den Ereignisfällen der Wechsel einerseits und den davon Betroffenen anderseits zahlenmässig wohl zu unterscheiden haben.

Ist ein Element infolge eines Merkmalswechsels aus dem Ursprungsbestand ausgetreten, so kann es gedanklich in einen Tochterbestand eingewiesen werden, der alle gleichartig umgebildeten Mitglieder der Anfangsgesamtheit aufnimmt ([15], [2]). Er baut sich mit der Zeit allmählich auf und gleichzeitig wieder ab infolge des Austritts von Elementen, welche weitere Änderungen durchmachen. In der Überlagerung von Zu- und Abgang liegt die Besonderheit der Tochterbestände. Wichtig ist dieser Begriff dort, wo zwischen mehreren Beständen ein gegenseitiger Austausch von Elementen stattfindet, wo also die Rückkehr in eine einstmals verlassene Gesamtheit (bzw. das Wiedergewinnen verlorener Eigenschaften) vorkommt (Aktive – Invalide, Verheiratete – Unverheiratete).

Es gibt auf Grund des bisher Gesagten keinerlei Wiederholung desselben Ereignisses am nämlichen Element, es sei denn, zwischenhinein habe ein «Gegenereignis» die ursprüngliche Änderung rückgängig gemacht.



Es erscheint hier angebracht, einige Worte dem Begriff «Abhängigkeit» zu widmen, weil er zumindest zwei-, wenn nicht mehrdeutig ist und nicht immer gesagt wird, welche Bedeutung man meint: Eine Ausscheideursache bzw. das von ihr hervorgerufene Ereignis  $A_1$  ist von einer zweiten Ausscheideursache bzw. einem zweiten Ereignis  $A_2$  abhängig

1. auf Grund einer Funktions- oder Korrelationsbeziehung, wenn sich die Masszahlen für  $A_1$  nach gewissen Masszahlen für  $A_2$  (im nämlichen Bestand) richten – entweder streng nach Art einer eindeutigen Zuordnung oder stochastisch nach Art eines Erwartungswertes mit Streuung <sup>1)</sup>;
2. im Sinne der bedingten Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit, wenn das Ereignis  $A_1$  verhältnismässig öfter oder seltener auftritt, sofern das Ereignis  $A_2$  (vorher oder nachher) an denselben Elementen ebenfalls vorkommt.

Ob  $A_2$  unmittelbar einen Einfluss auf  $A_1$  ausübt oder ob es ein Sachzusammenhang «auf Umwegen» ist, beschäftigt uns hier nicht. Jedenfalls wird man beide Arten der Abhängigkeit auseinanderhalten müssen <sup>2)</sup>. Abhängigkeit im ersten Sinn zeigt sich z. B. bereits dort, wo entsprechende Ausscheide-Masszahlen zweier verschiedener Ursachen im gleichen Bestand durch gleichartigen Verlauf miteinander verbunden erscheinen (Beispiel: Sterben und Invalidwerden gemäss dem erreichten Lebensalter in einem Männerbestand). Man könnte sogar soweit gehen zu fragen, ob dann nicht die Masszahlen für  $A_1$  unmittelbar als Funktions- oder Korrelations-Grössen von entsprechenden Masszahlen für  $A_2$  ausgedrückt werden dürften. Unter Umständen würde so beispielsweise der Formelapparat und die Errechnung der Ausscheidungsordnungen von Aktiven vereinfacht ( $A_2$  wäre hier das Ausscheiden durch Tod,  $A_1$  das Ausscheiden durch Invalidwerden); denkbar ist ein solcher Zusammenhang in der Gestalt  $q(x+t) \cdot f(x+t) = i(x+t)$  mit  $f(x+t)$  als Bindungsfaktor <sup>3)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Der Funktionsbegriff verlangt zwar nur eine eindeutige Zuordnung zwischen Argument- und Funktionswerten; wir fordern jedoch darüber hinaus, dass ein sachlich begründeter Zusammenhang bestehe oder vermutet werden könne.

<sup>2)</sup> Zur gegenseitigen Beziehung der Abhängigkeits- bzw. Unabhängigkeitsbegriffe siehe auch Richter [4], S. 71 und 74.

<sup>3)</sup> So ist auch die Ausscheide-Intensität für eine bestimmte Ausscheideursache im erstgenannten Sinn abhängig von den übrigen, und zwar wegen des Nenners (jeweiliger Bestand). Vgl. Zwinggi [5], S. 26/27, Formeln (1.24), (1.28).

Begnügt man sich damit, Ereignisse zu zählen, die als erste oder gar als einzige während der ganzen Beobachtungsdauer ein bisher unberührtes Mitglied der Ursprungsgesamtheit treffen, so entgeht man gänzlich dem Problem der zweitgenannten Abhängigkeit. Diese letztere erscheint erst, wenn die zeitlich zweiten oder noch später folgenden Ereignisse am selben Element beobachtet und gezählt werden.

Es hat keinen Sinn, von Abhängigkeit der zweiten Art zu sprechen, sofern es sich bei  $A_2$  um Ausscheideursachen handelt, welche die Elemente selber zerstören. Ein Toter kann weder invalid werden, noch kann er es sein. Und geht es um Ausscheideursachen, welche die Elemente aus der Beobachtung werfen, ohne sie zu zerstören, so vermag man höchstens auf Grund gewisser Annahmen ein Modell des weiteren individuellen oder kollektiven Verhaltens solcher Elemente zu erstellen. Das ist solange überflüssig, als man sich darauf beschränkt, die Elemente nur während ihres Verbleibens in der Ursprungsgesamtheit und auf ihr erstes Ausscheiden hin zu verfolgen.

Wir formulieren nun unsere Voraussetzungen für die weitere Untersuchung:

1. Zu einem genau bestimmten Zeitpunkt kann nur *ein* bestimmtes Ereignis ein und dasselbe Element treffen. Es handelt sich somit um einander ausschliessende Ereignisse in einem engeren Sinn. Würden wir die Elemente auch verfolgen in den Phasen nach dem Eintreffen eines ersten Ereignisses (Tochterbestände), so dürfte von einander ausschliessenden Ereignissen nicht mehr gesprochen werden. Solange wir nur die Ursprungsgesamtheit betrachten, werden durch obige Bedingung aus sonst verträglichen Ereignissen einander ausschliessende. Dass sich die Bedingung nicht von selbst versteht, erkennt man leicht, wenn man als Ereignisse Merkmalsänderungen zu berücksichtigen hat, die sich koppeln lassen: Zivilstandswechsel – Wohnsitzwechsel, Invalidwerden – Berufswechsel und dergleichen.
2. Als Beobachtungs-Zeitstrecke gilt die Zeiteinheit (das Jahr), beginnend zur Zeit  $t = 0$  und laufend bis  $t = 1$ .
3. Um die Überlegungen möglichst zu vereinfachen, halten wir uns vorerst an den Fall von bloss drei wirkenden Ausscheideursachen. Später werden wir noch einen zusammengefassten «übrigen Abgang» miteinbeziehen.

Die drei Ausscheideursachen bestehen in  
 der Ursache  $A$ , die völliges Entschwinden aus der Beobachtung  
 nach sich zieht,  
 den Ursachen  $B$  und  $C$ , welche jeweils einen bestimmten Merkmals-  
 wechsel veranlassen und dadurch das Element in Abgang bringen;  
 die weitere Beobachtung sei möglich.

4. Der Ausgangsbestand sei  $L_0$ , der Endbestand der während der  
 Zeiteinheit unbehelligt gebliebenen Elemente sei  $L_1$ .

Während dieser Zeit werden betroffen  
 ausschliesslich vom «Ereignis»  $A$   $F(A)$  Elemente,  
                   »                  »                  »  $B$   $F(B)$  » ,  
                   »                  »                  »  $C$   $F(C)$  » .

Zwei verschiedene beobachtbare Ausscheideereignisse zeitlich hin-  
 tereinander treffen  $F(BA)$ ,  $F(CA)$ ,  $F(BC)$ ,  $F(CB)$  Elemente, mit der  
 in den Klammern angegebenen zeitlichen Ereignis-Reihenfolge.

Drei verschiedene beobachtbare Ausscheideereignisse hinterein-  
 ander treffen  $F(BCA)$ ,  $F(CBA)$  Elemente, mit der innerhalb der  
 Klammern angegebenen Ereignis-Reihenfolge.

Das Ereignis  $A$  stört die beliebige Tauschbarkeit der Reihenfolge,  
 weil es nur hinter den andern oder allein beobachtet werden kann. Von  
 den insgesamt 15 möglichen Anordnungen entfallen sechs, nämlich  
 $AB$ ,  $AC$ ,  $ABC$ ,  $ACB$ ,  $BAC$ ,  $CAB$ .

Die gebräuchlichen Masszahlen des Ausscheidens sind bekanntlich  
 die partielle oder unabhängige Wahrscheinlichkeit; wir bezeichnen sie  
 mit  $W(A)$ ,  $W(B)$ ,  $W(C)$ ;

die totale oder abhängige Wahrscheinlichkeit; wir bezeichnen sie mit  
 $w(A)$ ,  $w(B)$ ,  $w(C)$ .

Wir gehen aus von den Wahrscheinlichkeiten  $w$ . Einer Ausscheide-  
 ursache werden dabei alle diejenigen Ereignisfälle zugerechnet, welche  
 entweder als einzige oder doch als erste ein Element des Ausgangs-  
 bestandes treffen. Bezugzahl ist  $L_0$ .

Wir haben für die Zahl der Ausscheidenden

$$L_0 w(A) = F(A), \quad (1a)$$

$$L_0 w(B) = F(B) + F(BA) + F(BC) + F(BCA), \quad (1b)$$

$$L_0 w(C) = F(C) + F(CA) + F(CB) + F(CBA). \quad (1c)$$

Auch ist 
$$L_0 - L_1 = L_0[w(A) + w(B) + w(C)], \quad (2)$$

wie es der Additionsvorschrift für Wahrscheinlichkeiten einander ausschliessender Ereignisse entspricht.

$w(A)$ ,  $w(B)$ ,  $w(C)$  haben den gewichtigen Mangel, dass bei der Zählung der durch eine darunter – z.B. durch  $A$  – Betroffenen, die durch die übrigen Ursachen –  $B$  und  $C$  – vorweggenommenen Austritte aus  $L_0$  unbeachtet bleiben. Je stärker und frühzeitiger die andern Ausscheideursachen wirken, je zahlreicher und je früher also die sonstigen Ereignisfälle stattfinden, desto bedeutungsvoller wird dieser Umstand. Er darf nicht ausser acht bleiben, wenn die Verhältniszahlen nicht stark verfälscht werden sollen. Die zu kleinen Wahrscheinlichkeiten  $w$  sind infolgedessen zu erhöhen, indem die durch die restlichen Ausscheideursachen veranlassten Abgänge wieder wettgemacht werden. Die «vorzeitig und anderweitig» Ausgeschiedenen sind so zu erfassen, wie sie im Ursprungsbestand noch hätten vorhanden sein müssen, sofern die andern Ausscheideursachen nicht dazwischen gegriffen hätten. Es gilt also das *ungestörte* Wirken einer Ausscheideursache zu ermitteln. Darauf beziehen sich die Wahrscheinlichkeiten  $W$ .

Betrachten wir die Ursache  $A$ . Neben den wirklich erfassten  $F(A)$  Elementen hätten noch weitere von  $A$  zuerst betroffen werden können, nämlich die, welche aus den inzwischen anderweitig ausgeschiedenen  $L_0[w(B) + w(C)]$  Elementen hätten stammen müssen. Die «bereinigte» und auf  $A$  allein zugeschnittene Ausscheidewahrscheinlichkeit  $W(A)$  lässt sich dadurch etwas genauer fassen. Unterstellen wir nämlich,  $A$  wirke mit gleicher Stärke auf die jeweils verbleibenden Elemente der Ursprungsmenge, wie  $A$  auf die inzwischen anderweitig ausgeschiedenen Elemente gewirkt hätte, wenn sie weiterhin im Ursprungsbestand verharrt hätten – eine einleuchtende, ja zwingende Annahme – so wären zusätzlich weitere  $W(A) L_0[w(B) + w(C)]$  Elemente infolge  $A$  ausgeschieden. Die Überlegung geht aber insofern fehl, als der Anfangsbestand zwar durch  $B$ ,  $C$  vorzeitig geschwächt worden ist, aber nicht unbedingt von Anfang an, also nicht für das volle Jahr. Andersherum gesagt: Der wegen  $B$  und  $C$  fehlende  $A$ -Abgang muss nur korrigiert werden, soweit und solange in der Ursprungsgesamtheit ein Ausfall für  $A$  durch  $B$  und  $C$  sich überhaupt ergeben hat. Der «Nebenabgang»  $L_0[w(B) + w(C)]$  darf somit unter Umständen nur zu einem Bruchteil angerechnet werden. Es empfiehlt sich, eine Funktion  $T_A(B, C)$ ,

$0 \leq T_A(B, C) \leq 1$ , einzuführen, welche den Teil angibt, zu welchem  $L_0[w(B) + w(C)]$  die Abgänge  $A$  beeinträchtigt hat. So kommen wir zum bereinigten Gesamtabgang durch  $A$  mittels der Gleichung

$$L_0 w(A) + L_0 T_A(B, C) [w(B) + w(C)] W(A) = L_0 W(A). \quad (3a)$$

Genau entsprechend hat man

$$L_0 w(B) + L_0 T_B(A, C) [w(A) + w(C)] W(B) = L_0 W(B), \quad (3b)$$

$$L_0 w(C) + L_0 T_C(A, B) [w(A) + w(B)] W(C) = L_0 W(C). \quad (3c)$$

Daraus ergibt sich

$$W(A) = \frac{w(A)}{1 - T_A(B, C) [w(B) + w(C)]}, \quad (4a)$$

$$W(B) = \frac{w(B)}{1 - T_B(A, C) [w(A) + w(C)]}, \quad (4b)$$

$$W(C) = \frac{w(C)}{1 - T_C(A, B) [w(A) + w(B)]}. \quad (4c)$$

Schreibt man die Gleichungen (3) um zu

$$L_0 w(A) = W(A) L_0 \{1 - T_A(B, C) [w(B) + w(C)]\},$$

$$L_0 w(B) = W(B) L_0 \{1 - T_B(A, C) [w(A) + w(C)]\},$$

$$L_0 w(C) = W(C) L_0 \{1 - T_C(A, B) [w(A) + w(B)]\},$$

so ist man imstande, die Darstellung daraufhin umzudeuten, dass der wirkliche Abgang durch eine bestimmte Ausscheideursache übereinstimmt mit dem erwarteten oder vermuteten Abgang gemäss der «bereinigten» Wahrscheinlichkeit, letztere aber bezogen auf einen verkleinerten Bestand.

$T_A(B, C)$ ,  $T_B(A, C)$ ,  $T_C(A, B)$  sind drei verschiedene Grössen zwischen Null und Eins <sup>1)</sup>, in denen sich jedoch nicht nur die verkürzte Verweildauer im Hauptbestand spiegelt; in sie geht auch, bei zeitlich veränderlicher Stärke der Ausscheideursachen, diese Veränderlichkeit ein mit einem Mittelwert über die verflossene Zeit <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Sie liessen sich daher ebenfalls als Wahrscheinlichkeiten deuten.

<sup>2)</sup>  $T$  entspricht einem Integral-Mittelwert, wenn man sich die  $w$  und  $W$  durch eine Integralgleichung verbunden denkt. Vgl. Wyss [15], S. 191 sub C.

Wir stellen hier fest, dass die Ursache  $A$  keine Sonderrolle spielt, da es sich nicht darum handelt, irgendwelche bedingte Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, sondern vielmehr darum, den Beitrag von  $B$  und  $C$  zur Berichtigung der verfälschten Ausscheide-Masszahl für  $A$  zu bestimmen; dies alles unter der Voraussetzung, diese anderweitig ausscheidenden Elemente wären jeweils unangetastet im Ausgangsbestand verblieben.

Einzelne  $T$  werden Null, wenn die Ausscheide-Ereignisse der darin vereinigten Ursachen erst am Jahresende stattfinden (keine «Ausfallzeit»); der Bestand ist dann während der ganzen Zeiteinheit störungsfrei geblieben. Wie es sein muss, ergibt sich dann, dass entsprechende  $w$  und  $W$  übereinstimmen.

Einzelne  $T$  werden zu Eins, wenn die in  $T$  vereinigten Ausscheideursachen gleich zu Jahresbeginn ihren vollen Jahresabgang bewirken. Nehmen wir an, dies sei der Fall für  $B$  und  $C$ .  $W(A)$  wird dann

$$W(A) = \frac{w(A)}{1 - [w(B) + w(C)]}.$$

Sind ausserdem  $A$ ,  $B$ ,  $C$  so beschaffen, dass sie  $L_0$  innerhalb des Jahres gänzlich entleeren ( $L_1 = 0$ ), so ist  $w(B) + w(C) = 1 - w(A)$  und somit  $W(A) = 1$ . Damit erreicht  $W(A)$  seinen Höchstwert. Ähnlich lässt sich überlegen zu  $B$  und  $C$ .

Obiges Maximum Eins ist sinnvoll; es bedeutet – wenn man von der Gleichung (3a) ausgeht –, dass der wirkliche Abgang durch  $A$ , vermehrt um den gemäss  $W(A)$  erwarteten Abgang aus dem Restbestand (ohne diesen wirklichen Abgang durch  $A$ ), gleich sein soll dem erwarteten Abgang aus dem Vollbestand; das ist nur möglich, wenn das erwartete Ausscheiden gewiss ist.

Die Ermittlung der «bereinigten»<sup>1)</sup> Wahrscheinlichkeiten  $W(A)$ ,  $W(B)$ ,  $W(C)$  spitzt sich darauf zu, die richtigen Funktionen  $T_A(B, C)$ ,  $T_B(A, C)$ ,  $T_C(A, B)$  zu finden. Sie hängen ab von der Verteilung der Abgänge während der Zeiteinheit. Aus Einfachheitsgründen ist es üblich geworden, mit  $T_A(B, C) = T_B(A, C) = T_C(A, B) = \frac{1}{2}$  zu rechnen, und zwar auf Grund der Annahme, dass gleichmässige Verteilung der Abgänge herrsche. In vielen Fällen wird dies annähernd zutreffen.

---

<sup>1)</sup> In seinen «Technischen Grundlagen für Gruppenversicherungen», Bern 1931, spricht auch das Eidgenössische Versicherungsamt in ähnlichem Sinn von «erfahrungsmässigen» statt abhängigen und von «korrigierten» statt unabhängigen Wahrscheinlichkeiten (ebenda S. 5\*/6\*).



Gibt es neben  $A, B, C$  noch weiteren Abgang  $U$ , der in Sammelposten erfasst wird, so wird man die Gleichungen (3) bzw. (4) etwas erweitern. Dieser sonstige Abgang umfasse  $F(U)$  Elemente während der Zeiteinheit. Es lassen sich die nämlichen Überlegungen anstellen wie früher, indem wir davon ausgehen, dass jeder der Ursachen  $A, B, C$  für den Jahresrest, während welchem sich die einzelnen der  $F(U)$  Elemente bereits ausserhalb des Ursprungsbestandes befinden, die Gelegenheit fehlt, «zum Zuge» zu kommen; da diese  $F(U)$  Abgangselemente nicht unbedingt von Anfang an vollzählig da sind, sondern sich allmählich bis zum Jahresende vermehren, wird dieser Restabgang nur zu einem Bruchteil den «bereinigten» Abgang infolge  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  schmälern; wir nennen diesen Bruchteil  $T_A(U)$  bzw.  $T_B(U)$  bzw.  $T_C(U)$  und haben

$$L_0 w(A) + L_0 T_A(B, C) [w(B) + w(C)] W(A) + F(U) T_A(U) W(A) = L_0 W(A), \quad (5a)$$

$$L_0 w(B) + L_0 T_B(A, C) [w(A) + w(C)] W(B) + F(U) T_B(U) W(B) = L_0 W(B), \quad (5b)$$

$$L_0 w(C) + L_0 T_C(A, B) [w(A) + w(B)] W(C) + F(U) T_C(U) W(C) = L_0 W(C). \quad (5c)$$

Da alle Abgänge  $F(U)$  ebenfalls aus  $L_0$  stammen, lässt sich schreiben  $F(U) = L_0 w(U)$ , wo  $w(U)$  eine nichtbereinigte Wahrscheinlichkeit darstellt.  $W(A)$ ,  $W(B)$ ,  $W(C)$  ergeben sich formal mühelos.

Gelten hingegen die bereinigten Wahrscheinlichkeiten  $W(A)$ ,  $W(B)$ ,  $W(C)$  als gegeben, desgleichen  $w(U)$  und die verschiedenen  $T$ , so errechnen sich aus den Gleichungen (5)  $w(A)$ ,  $w(B)$ ,  $w(C)$  sehr einfach. Bezeichnen wir der Kürze halber

$$\begin{aligned} & T_A(B, C) W(A) \text{ mit } H(A), \\ & F(U) T_A(U) / L_0 \text{ mit } H'(A), \\ & T_B(A, C) W(B) \text{ mit } H(B), \\ & F(U) T_B(U) / L_0 \text{ mit } H'(B), \\ & T_C(A, B) W(C) \text{ mit } H(C), \\ & F(U) T_C(U) / L_0 \text{ mit } H'(C), \end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen (5)

$$w(A) + H(A) w(B) + H(A) w(C) = W(A) [1 - H'(A)], \quad (6a)$$

$$H(B) w(A) + w(B) + H(B) w(C) = W(B) [1 - H'(B)], \quad (6b)$$

$$H(C) w(A) + H(C) w(B) + w(C) = W(C) [1 - H'(C)]. \quad (6c)$$

Die Cramersche Regel liefert dann  $w(A), w(B), w(C)$ . Die im Nenner der Lösungen auftauchende Determinante der Koeffizienten dieser drei Unbekannten

$$D = \begin{vmatrix} 1 & H(A) & H(A) \\ H(B) & 1 & H(B) \\ H(C) & H(C) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 - H(B)H(C) - H(B)[H(A) - H(A)H(C)] + H(C)[H(A)H(B) - H(A)] = \\ 1 - H(A)H(B)H(C) - \\ [(1 - H(A))H(B)H(C) + (1 - H(B))H(A)H(C) + (1 - H(C))H(A)H(B)]$$

wird im allgemeinen grösser als Null sein; denn der Ausdruck lässt sich als zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit aus den Grundwahrscheinlichkeiten  $H(A), H(B), H(C)$  deuten.

### III. Bestand und Bewegung innerhalb der Zeiteinheit

Der Verlauf des Ausscheidens unter dem Jahr soll nun einlässlicher betrachtet werden.

Es werde vorausgesetzt, die Ereignisfälle  $A, B, C$  finden zu gewissen diskreten Zeitpunkten statt. Jeder von  $A, B, C$  betroffene Bestandesangehörige wird gezählt. Im übrigen gelten die früheren Voraussetzungen weiterhin. Es scheiden durch die Ursachen  $A, B, C$  folgende Anzahlen von Mitgliedern des Ursprungsbestandes aus:

$$\begin{array}{ll} \text{im Zeitpunkt } t_1 \geq 0 & f_1(A), f_1(B), f_1(C), \\ \text{im Zeitpunkt } t_2 > t_1 & f_2(A), f_2(B), f_2(C), \\ \vdots & \vdots \\ \text{im Zeitpunkt } t_n \leq 1 & f_n(A), f_n(B), f_n(C), \end{array}$$

und es sei

$$L_i = L_0 - \sum_{\lambda=1}^i [f_\lambda(A) + f_\lambda(B) + f_\lambda(C)]. \quad (7)$$

Die einzelnen Mitglieder werden durch die Ereignisse erstmals oder sogar nur ein einziges Mal tangiert. Die Grössen  $f$  können auch zum Teil Null sein; es ist möglich, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt nur Abgänge einer einzigen Ursache auftreten, ja dass es sich bloss um ein einziges ausscheidendes Element handelt.



Da zwischen den Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  keine Bewegung irgendwelcher Art stattfindet, bleibt dazwischen der Bestand völlig starr. Infolgedessen wird auch keine Abgangsart durch Zwischenabgang anderer Art gestört und verzerrt. Wie in Abschnitt II schon erwähnt, ist unter solchen Umständen die «bereinigte» oder «berichtigte» Wahrscheinlichkeit  $W$  für derartige Zeiträume gleich der entsprechenden «nicht-bereinigten»  $w$ .

Wir vereinfachen noch weiter und nehmen an, wir hätten es nur mit einer Zweiteilung des Jahres zu tun, mit Abgängen zur Zeit  $t$ ,  $0 < t < 1$ , und zum Zeitpunkt 1. Die Verallgemeinerungen bieten sich dann von selbst an. Es ist der Restbestand unmittelbar nach dem Abgang in  $t$

$$L_t = L_0 - f_t(A) - f_t(B) - f_t(C). \quad (7a)$$

Ausserdem gilt, wenn wir die bereinigten Wahrscheinlichkeiten  $W$  in der Schreibweise etwas modifizieren,

$$f_t(A) = L_0 W_A(0, t) = L_0(1 - P_A(0, t)), \quad (8a)$$

$$f_t(B) = L_0 W_B(0, t) = L_0(1 - P_B(0, t)), \quad (8b)$$

$$f_t(C) = L_0 W_C(0, t) = L_0(1 - P_C(0, t)). \quad (8c)$$

Die Grössen  $P$  geben die Verbleibens-Wahrscheinlichkeiten bei den einzelnen Ausscheideursachen an.

Wir bezeichnen nun mit  ${}_cW_A(a, b)$  die bereinigte Wahrscheinlichkeit, dass ein Element am Ende des abgeschlossenen Intervalles  $(a, b)$  infolge  $A$  ausscheide, jedoch bezogen auf die Zahl der Verbliebenen im Zeitpunkt  $c \leq a$ , und wobei bis  $a$  nur die infolge  $A$  Ausgeschiedenen abgezogen werden; wir kommen damit auf

$${}_0W_A(t, 1) = \frac{L_0 - f_t(A)}{L_0} \frac{f_1(A)}{L_t} = P_A(0, t) {}_tW_A(t, 1), \quad (9a)$$

$${}_0W_B(t, 1) = \frac{L_0 - f_t(B)}{L_0} \frac{f_1(B)}{L_t} = P_B(0, t) {}_tW_B(t, 1), \quad (9b)$$

$${}_0W_C(t, 1) = \frac{L_0 - f_t(C)}{L_0} \frac{f_1(C)}{L_t} = P_C(0, t) {}_tW_C(t, 1). \quad (9c)$$

Wir setzen also eine «Überlebensordnung» für jede einzelne Ausscheideursache voraus, eine Überlebensordnung, die den jeweiligen gesamten Restbestand durchwaltet. Eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung oder

-ansteckung schliessen wir aus. Die Anzahl der infolge einer Ursache Ausscheidenden sei überdies zum Bestand am Anfang des Intervalles verhältnissgleich. Würde im Zeitpunkt  $t$  kein «anderweitiger» Abgang erfolgen, so wäre daher die Zahl der Abgänge aus der Ursache  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  im Zeitpunkt 1<sup>1)</sup> erhöht auf  $f'_1(A)$ ,  $f'_1(B)$ ,  $f'_1(C)$  und zwar im Verhältnis

$$\frac{f'_1(A)}{f_1(A)} = \frac{L_0 - f_t(A)}{L_t}$$

entsprechend (9a) usw.

Nun haben wir

$$\begin{aligned} P_A(0,1) &= 1 - {}_0W_A(0,1) = 1 - {}_0W_A(0,t) - {}_0W_A(t,1) = \\ &= 1 - \frac{f_t(A)}{L_0} - \frac{L_0 - f_t(A)}{L_0} \frac{f_1(A)}{L_t} = \frac{L_0 - f_t(A)}{L_0} \frac{L_t - f_1(A)}{L_t} = \\ &= P_A(0,t) P_A(t,1) \end{aligned} \quad (10a)$$

und entsprechend

$$P_B(0,1) = \frac{L_0 - f_t(B)}{L_0} \frac{L_t - f_1(B)}{L_t} = P_B(0,t) P_B(t,1), \quad (10b)$$

$$P_C(0,1) = \frac{L_0 - f_t(C)}{L_0} \frac{L_t - f_1(C)}{L_t} = P_C(0,t) P_C(t,1). \quad (10c)$$

Es liegt also multiplikative Verknüpfung der Verbleibenswahrscheinlichkeiten vor. Ausgedehnt auf den genannten Fall mehrfacher Ausscheide-Zeitpunkte  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , gilt, wie man leicht feststellt,

$$P_A(0,1) = 1 - {}_0W_A(0,1) = \prod_{i=1}^n \frac{L_{i-1} - f_i(A)}{L_{i-1}} = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{f_i(A)}{L_{i-1}} \right), \quad (11a)$$

$$P_B(0,1) = 1 - {}_0W_B(0,1) = \prod_{i=1}^n \frac{L_{i-1} - f_i(B)}{L_{i-1}} = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{f_i(B)}{L_{i-1}} \right), \quad (11b)$$

$$P_C(0,1) = 1 - {}_0W_C(0,1) = \prod_{i=1}^n \frac{L_{i-1} - f_i(C)}{L_{i-1}} = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{f_i(C)}{L_{i-1}} \right). \quad (11c)$$

$L_i$  bedeutet dabei gemäss (7) den durch alle drei Ursachen  $A, B, C$  abgebauten Bestand  $L$  unmittelbar nach dem Abgang zur Zeit  $t_i$ .

---

<sup>1)</sup> Allgemeiner: im Restintervall zwischen  $t$  und 1; denn der anderweitige Abgang in  $t$  wäre nicht an den nächsten möglichen Ausscheidetermin 1 gebunden.

Multiplikative Verknüpfung führt bekanntlich beim Grenzübergang  $(t_i, t_{i+1}) \rightarrow 0$  zu Exponentialverlauf über die Zeit; zum Formelsystem mit den Intensitäten bedarf es von hier aus nur weniger Schritte.

Der Rückgriff auf die Gleichungen (4) liefert die Gleichsetzungen

$${}_0W_A(0,1) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{f_i(A)}{L_{i-1}}\right) = \frac{w(A)}{1 - T_A(B,C)[w(B) + w(C)]}, \quad (12a)$$

$${}_0W_B(0,1) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{f_i(B)}{L_{i-1}}\right) = \frac{w(B)}{1 - T_B(A,C)[w(A) + w(C)]}, \quad (12b)$$

$${}_0W_C(0,1) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{f_i(C)}{L_{i-1}}\right) = \frac{w(C)}{1 - T_C(A,B)[w(A) + w(B)]}. \quad (12c)$$

Dabei ist, im Einklang mit den Gleichungen (1),

$$L_0 w(A) = \sum_{i=1}^n f_i(A),$$

$$L_0 w(B) = \sum_{i=1}^n f_i(B),$$

$$L_0 w(C) = \sum_{i=1}^n f_i(C).$$

Das sind die strengen, für die verschiedenen  $T$  erhältlichen Beziehungen. Dabei werden ausschliesslich Überlegungen angestellt, die um den Ursprungsbestand und das «erste» Ereignis kreisen, gleichgültig, was mit den ausgeschiedenen Elementen dann weiterhin geschieht.

#### IV. Unabhängige Wahrscheinlichkeiten gemäss der Wahrscheinlichkeitstheorie

Gibt es nur zwei Ausscheideereignisse  $B$  und  $C$  und sind diese miteinander verträglich, d. h. kommen sie zeitlich hintereinander auch bei einem und demselben Element vor, so ergeben sich mit den bisherigen Bezeichnungen die Wahrscheinlichkeiten  $W^*(B)$  und  $W^*(C)$  dafür, dass Elemente während der Zeiteinheit überhaupt betroffen werden, als

$$\begin{aligned} L_0 W^*(B) &= F(B) + F(BC) + F(CB), \\ L_0 W^*(C) &= F(C) + F(CB) + F(BC). \end{aligned} \quad (13)$$

Man greift hier also über die «ersten» Ausscheideereignisse hinaus, indem man auch die zweiten berücksichtigt. Denn in  $W^*(B)$  werden Elemente einbezogen, obwohl an ihnen bereits das andere Ereignis  $C$  gewirkt hat, und in gleicher Weise verfährt man bei  $W^*(C)$ . Man stösst dadurch in die Tochterbestände vor.

Nun ist

$$L_0 - L_1 = F(B) + F(C) + F(BC) + F(CB) = \\ L_0 W^*(B) + L_0 W^*(C) - F(BC) - F(CB). \quad (14)$$

Handelt es sich um unabhängige Wahrscheinlichkeiten  $W^*$  im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie, so muss die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse der Art  $B$  unter allen denjenigen Ereignissen, wo  $C$  überhaupt vorkommt, übereinstimmen mit derjenigen für  $B$  überhaupt, also

$$\frac{F(BC) + F(CB)}{F(C) + F(BC) + F(CB)} = W^*(B) \quad (15)$$

oder 
$$F(BC) + F(CB) = L_0 W^*(B) W^*(C), \quad (16)$$

und damit bekommt man für (14)

$$L_1 = L_0(1 - W^*(B))(1 - W^*(C)). \quad (17)$$

Mit diesen Beziehungen zu operieren, verbieten jedoch zwei Gründe:

- a) Die Unabhängigkeit im obigen Sinne wird selten zutreffen; im Gegenteil steht meist zu erwarten, dass die Wahrscheinlichkeit für  $C$ , *nachdem* bereits das Ereignis  $B$  einem Element zugestossen ist, eine andere sein wird als diejenige für  $C$  überhaupt; dasselbe gilt von  $B$ . Ursprungsgesamtheit und Tochterbestände haben gewöhnlich Wahrscheinlichkeits-Strukturen, die sich merklich voneinander unterscheiden.
- b) Hat man es nicht nur mit Ereignisarten zu tun, die in ihrer zeitlichen Reihenfolge ohne inneren Widerspruch vertauschbar sind, sondern auch mit solchen, nach denen kein anderes mehr folgen kann (Tod) – wir haben sie bisher unter der Ausscheideursache  $A$  subsumiert –, so wird die Beziehung (15) unbrauchbar<sup>1)</sup>. Und da sozusagen bei jeder Untersuchung eine endliche Lebensdauer der Elemente vorausgesetzt wird, kommt man kaum je darum herum, auf Gleichsetzungen wie (15), (16), (17) verzichten zu müssen.

---

<sup>1)</sup> Wenn ein Ereignis  $A$  ein anderes hindert, nachher ebenfalls einzutreten, ist Unabhängigkeit im obigen Sinn nicht mehr vorhanden.

Es besteht eine gewisse Gefahr, die bereinigten Wahrscheinlichkeiten  $W$  mit den  $W^*$  zu verwechseln. Das ist schon deshalb möglich, weil sich die  $W^*$  zu den nichtbereinigten Wahrscheinlichkeiten  $w$  ungefähr ebenso verhalten wie es die bereinigten Wahrscheinlichkeiten  $W$  tun. Es ist für jede Ereignisart sowohl  $W^* > w$  als auch  $W > w$  – abgesehen von Grenzfällen, wo das Gleichheitszeichen gilt, die man jedoch eher als «Entartungsfälle» ansprechen darf. Stützt man sich, abgesehen von diesen Ungleichungen, zur Bestimmung der  $W^*$  bloss darauf, dass Gleichung (17) erfüllt sein soll – deren Verallgemeinerung auf mehr als zwei Ausscheideursachen sich ohne weiteres ergibt – so bleibt eine gewisse Wahlfreiheit zur Bestimmung der  $W^*$  übrig; denn mindestens zwei Wahrscheinlichkeiten werden durch eine einzige Relation verknüpft. Für beide Wahrscheinlichkeitsbegriffe  $W$  und  $W^*$  kann das Feld der Unbestimmtheit gewöhnlich nicht völlig mit Hilfe von Beobachtungszahlen überdeckt werden, sondern wird durch gewisse Annahmen überbrückt. Unter Umständen führt dies dazu, dass die Wahrscheinlichkeit  $W$  als  $W^*$ , und umgekehrt die  $W^*$  als  $W$  auslegbar sind <sup>1)</sup>.

## V. Austauschbestände

Bestehen zwei Gesamtheiten nebeneinander mit wechselseitigen Austritten von Elementen, so bieten die Verflechtungen ein etwas abgewandeltes Bild. Für einen Bestand an  $x$ -jährigen aktiven oder invaliden Männern gebe es an Ausscheideursachen das Invalidwerden (Ereignis  $B$ ), das Aktivwerden (Ereignis  $C$ ) und das Sterben (Ereignis  $A$ ). Der Anfangsbestand der Aktiven des Alters  $x$  sei  $L_0$ , derjenige der Invaliden  $L'_0$ . Abgänge aus  $L_0$  seien ungestrichelt, aus  $L'_0$  hingegen mit Strich versehen.

Man hat

$$L_0 - L_1 = F(A) + [F(B) + F(BA) + F(BC) + F(BCA)] - [F'(C) + F(BC)] = \\ L_0 w(A) + L_0 w(B) - F'(C) - F(BC) \quad (18)$$

---

<sup>1)</sup> Der Multiplikationssatz bei den Intensitäten mehrerer Ausscheideursachen ist ein solcher *sui generis* und hat nichts zu tun mit dem Multiplikationstheorem unabhängiger (bedingter) Wahrscheinlichkeiten; er geht vielmehr zurück auf den zeitlichen Exponentialverlauf des Ausscheidens einerseits und das Additionstheorem der Intensitäten anderseits. Zwinggi [5], S. 28 ff.

und ebenso

$$L'_0 - L'_1 = F'(A) + [F'(C) + F'(CA) + F'(CB) + F'(CBA)] - \\ [F(B) + F'(CB)] = L'_0 w'(A) + L'_0 w'(C) - F(B) - F'(CB). \quad (19)$$

$F(BC)$ ,  $F'(CB)$  sowie  $F(BCA)$ ,  $F'(CBA)$  werden üblicherweise als Abgänge mit einander im gleichen Jahr aufhebenden Zustandsänderungen vernachlässigt <sup>1)</sup>. In den obigen Formeln machen wir bei den Wahrscheinlichkeiten keinen Wesensunterschied zwischen den von Jahresanfang an invalid gewesenen und den während des Jahres invalid gewordenen Personen. Bekanntlich sind bei solchen Austauschsystemen zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten verschiedener Art für die Praxis bedeutungsvoll, so z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Aktiver invalid wird und der Invalidgewordene bis Jahresende im Bestand  $L'$  verharret. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht in unserer Schreibweise dem Ausdruck  $F(B)/L_0$ ; sie wäre durch Wahrscheinlichkeiten  $w(A)$ ,  $w(B)$ ,  $w'(A)$ ,  $w'(C)$  und/oder durch entsprechende bereinigte Wahrscheinlichkeiten  $W(A)$ ,  $W(B)$ ,  $W'(A)$ ,  $W'(C)$  darzustellen. Weil man hier ohne zusätzliche Annahmen über den Verlauf unter dem Jahr schlechthin nicht auskommt, begnügen wir uns an dieser Stelle mit dem Hinweis.

## VI. Der Zugang und seine Erfassung

Schon im Abschnitt V kommt Zugang vor. Da er aber als Abgang aus einem andern miterfassten Hauptbestand hervorgegangen ist, liefert dieser Umstand keine Schwierigkeiten. Anders verhält es sich bei Zugang aus unbekannter Quelle. Es bleibt dann kein Ausweg als der, zu unterstellen, dass die Zuzüger von ihrem Eintritt an wesensmässig mit den bereits vorhandenen Elementen übereinstimmen, wenigstens was die untersuchte Eigenschaft betrifft. Nur unter solcher Voraussetzung ist es statthaft, die Reste des Anfangsbestandes und den Zugang statistisch zu verschmelzen. Andernfalls wird man tunlichst den Abgang in seine Herkunft aus Ursprungsgesamtheit oder Zugang zu trennen versuchen.

---

<sup>1)</sup> Ein mehrfaches Pendeln zwischen  $L$  und  $L'$  schliessen wir aus.

Auf die in Abschnitt III behandelte unterjährige Bewegung des Bestandes hat A. Linder für den Fall der Sterblichkeit unter obiger Annahme allfälligen Zugang aufgerechnet ([12], S. 51, Gleichung (36)). Die gewonnenen Beziehungen gelten nicht nur für die Sterblichkeit. Bezeichnet man den Zugang im Zeitpunkt  $t_i$  mit  $E_i$ , den gleichzeitigen Abgang anderer Art als durch Tod mit  $U_i$ , den Tod mit  $A$ , und verwendet man die bisherige Terminologie, so ist die Überlebenswahrscheinlichkeit  $P(0,1)$  nach Linder

$$P(0,1) = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{f_i(A)}{L_0 + \sum_{\lambda=1}^{i-1} [E_\lambda - U_\lambda - f_\lambda(A)]} \right); \quad (20)$$

sie enthält unsere Gleichung (11 a) als Sonderfall.

Verzichtet man darauf, den Vorgängen während des Jahres genau zu folgen, so empfiehlt es sich, auch beim Zugang durch Funktionen  $Z$ ,  $0 \leq Z \leq 1$ , die durch den späteren Eintritt verkürzte Verweildauer der einzelnen Zuzüger und ihre Wirkung auf die Abgänge pauschalisiert wiederzugeben.

Es mögen nun die Ausscheideursachen  $A, B, C$  wirken sowie der restliche Sammelabgang  $U$ , und zwar möge die Wirkung der Abgänge sich auch auf den Zugang  $E$  erstrecken, sobald die Elemente eingetreten sind. Die abgehenden Elemente seien nur gesamthaft bekannt, also nicht nach ihrer Herkunft trennbar. Gleichwohl denken wir uns die im Gesamtabgang vorkommenden Elemente aus dem Zugang vorerst abgehoben und mit dem Index  $E$  versehen. Man gewinnt für sie folgende selbständige Zusatzgleichungen

$$EZ_A w(A) = F_E(A), \quad (21 a)$$

$$EZ_B w(B) = F_E(B) + F_E(BA) + F_E(BC) + F_E(BCA), \quad (21 b)$$

$$EZ_C w(C) = F_E(C) + F_E(CA) + F_E(CB) + F_E(CBA), \quad (21 c)$$

$$EZ_U w(U) = F_E(U). \quad (21 d)$$

$Z_A, Z_B, Z_C, Z_U$  werden Eins, wenn der volle Zugang  $E$  in einem Schub gleich zu Beginn des Jahres sich in den Bestand ergiesst; sie werden Null, wenn alle Zuzüger erst am Jahresende erscheinen.

Es liegt auf der Hand, die Relationen (21) mit (5) zusammenzufügen zu Gesamtgleichungen für den Totalabgang aus jeder Ursache.



Die Beziehungen zwischen den bereinigten und nichtbereinigten Wahrscheinlichkeiten gründen sich dann auf die sinngemässe Erweiterung der Gleichungen (5) durch den Zugang  $E$ , der im allgemeinen weniger lang den «abgangsauslösenden Umständen» ausgesetzt ist. Man hat somit

$$L_0 w(A) + EZ_A w(A) = (L_0 + EZ_A) W(A) - (L_0 + EZ_A) T_A(B, C, U) \cdot [w(B) + w(C) + w(U)], \quad (22a)$$

$$L_0 w(B) + EZ_B w(B) = (L_0 + EZ_B) W(B) - (L_0 + EZ_B) T_B(A, C, U) \cdot [w(A) + w(C) + w(U)], \quad (22b)$$

$$L_0 w(C) + EZ_C w(C) = (L_0 + EZ_C) W(C) - (L_0 + EZ_C) T_C(A, B, U) \cdot [w(A) + w(B) + w(U)]. \quad (22c)$$

Es erscheinen durch die verkürzte Expositionsdauer seitens des Abganges und seitens des Zuganges die Schwächungsfunktionen  $T$  und  $Z$ . Ausführlichere Untersuchungen über ihre Wirkung und Bedeutung lassen sich nur auf dem Weg über die Lindersche Gleichung (20) anstellen.

### Literaturverzeichnis

- [1] *Alfred Berger*: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, Bd. II, Berlin 1925.
- [2] *Walter Saxer*: Versicherungsmathematik, Erster Teil, Berlin 1955.
- [3] *Walter Saxer*: Zweiter Teil, 1958.
- [4] *Hans Richter*: Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin 1956.
- [5] *Ernst Zwinggi*: Versicherungsmathematik, Zweite Auflage, Basel 1958.
- [6] Eidgenössisches Statistisches Amt: Statistische Quellenwerke der Schweiz, Heft 243, Reihe Bk 5, Bern 1953.
- [7] Eidgenössisches Statistisches Amt: Heft 232, Stand und Entwicklung der Sterblichkeit in der Schweiz, Bern 1951.
- [8] *Alfred Loewy*: Die Bedeutung des Stieltjesschen Integrals in der Versicherungsmathematik, Assekuranz-Jahrbuch Bd. 54, 1935.  
Beiträge in den Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker:
- [9] *Gottfried Schärflin*: Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung, Heft 1, 1906.
- [10] *Paul Spangenberg*: Die zahlenmässige Berechnung der «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «abhängigen» und der «abhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «unabhängigen», Heft 10, 1915.
- [11] *Werner Friedli*: Intensitätsfunktion und Zivilstand, Heft 21, 1926.
- [12] *Arthur Linder*: Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen, Heft 30, 1935.



- [13] *Émile Marchand*: Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes, Heft 33, 1937.
  - [14] *Johann Meier*: Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, Heft 39, 1940.
  - [15] *Hans Wyss*: Erwägungen über abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten, Bd. 48, 1948.
  - [16] *Ernst Zwinggi*: Über die Berechnung der unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeit im ersten Versicherungsjahr, Bd. 45, 1945.
  - [17] *Ernst Zwinggi*: Bemerkungen zur Berechnung von kombinierten Übertritts- und Verbleibswahrscheinlichkeiten, Bd. 48, 1948.
  - [18] *Ernst Zwinggi*: Berechnung und Darstellung der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, Bd. 49, 1949.
  - [19] *Paul Adrian*: Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei besonderen Annahmen über den Verlauf der Ausscheideintensitäten, Bd. 54, 1954.
- 

### Résumé

L'auteur examine les relations mutuelles entre les probabilités de sortie nommées «dépendantes» et «indépendantes». Si l'on considère exactement les éléments sortant pendant l'unité de temps, il s'ensuit une connexion rigoureuse. Les probabilités indépendantes pour des événements compatibles — indépendantes selon la théorie des probabilités — sont des nombres d'un autre genre dont on ne peut généralement pas faire usage en étudiant les causes de sortie. L'auteur considère enfin les effets résultant des entrées.

### Summary

The author examines the mutual relationship between the so-called dependent and independent exit probabilities. When exits are examined with accuracy during a certain unit of time, there is a rigorous relationship resulting. On the other side, independent probabilities with compatible events according to the theory of probability are elements of a different nature which cannot generally be used in studies of exit causes. At the end of the paper, the entrances are also taken into consideration.

### Riassunto

L'autore esamina le relazioni esistenti tra le probabilità di uscita cosiddette «dipendenti» e «indipendenti». Se si considerano esattamente le uscite durante l'unità di tempo ne risulta una connessione rigorosa. Per contro le probabilità indipendenti per degli eventi compatibili conformemente alla teoria delle probabilità sono delle grandezze di un altro genere, con cui non si può generalmente operare per le ricerche sulle cause di uscita. Da ultimo l'autore considera gli effetti risultanti dalle entrate.