

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 61 (1961)

Artikel: Äquivalenzrechnung

Autor: Yntema, L.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966743>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Äquivalenzrechnung

Von L. Yntema, Amsterdam

Zusammenfassung

Verfasser legt dar, dass die unterrichtsmässige Darstellung von Finanz- und Versicherungsmathematik erneuert werden sollte. Er schlägt eine analytische Behandlung des Stoffes vor, wobei das Äquivalenzprinzip in allgemeinster Form als Ausgangspunkt zu nehmen ist. Es könnten dann Finanz- und Versicherungsmathematik unter gleichem Gesichtspunkt als ein Ganzes behandelt und auch andere dem Äquivalenzprinzip unterzuordnende Anwendungsgebiete miteinbezogen werden.

0 Einleitung

Während bei Disziplinen, die sich noch vollauf in Entfaltung befinden, der Unterricht anhaltend Erneuerungen erfährt, trägt er auf den Gebieten, die mehr oder weniger konsolidiert sind, einen stetigeren Charakter. Die Gefahr, dass diese Kontinuität zum Konservatismus erstarrt, ist selbstverständlich grösser, wenn es sich ausserdem um logisch zusammenhängende und abgerundete Disziplinen handelt, wie es auf dem Gebiete der Mathematik so oft der Fall ist.

Die Finanzmathematik (und, in etwas geringerem Masse, die Versicherungsmathematik) ist eine solche Disziplin und es ist daher üblich, die jüngere Generation in diesem Stoff derart zu unterrichten, wie man es selber von der vorigen gelernt hat. Es mag zwar nützlich sein, die grossväterliche Gelehrsamkeit an die Enkel weiterzugeben, es ist aber nicht weniger einsichtsvoll sich dabei zugleich von seinem Steckenpferde, umständlicher Argumentation und undurchsichtiger Fachsprache zu distanzieren.

Es ist z. B. unnötig, vier verschiedene Symbole für im Grunde eine und dieselbe Angelegenheit, wie eine Annuität, zu verwenden. Man stösst weiter auf Umständlichkeiten, die durch die Verwendung des anderswo

in der Mathematik gebräuchlichen Äquivalenz-Zeichens bequem zu beseitigen wären. Statt «Barwert des nach n Jahren fälligen Kapitals 1 beträgt $A_{\bar{n}}$ » könnte man ganz einfach schreiben:

$$[1]_n \sim [A_{\bar{n}}]_0.$$

Diese Schreibart liesse nicht bloss die nur halbformalisierte Finanzmathematik (und Versicherungsmathematik) an Übersichtlichkeit gewinnen, sondern würde auch die Einsicht fördern. Das fiktive Aufzinsen und Abzinsen ist sodann zu einer *Bewertungsmethode* zu entwickeln und das Äquivalenzprinzip fungiert auf diese Weise tatsächlich wie ein *Grundsatz*, von dem bei allen Betrachtungen explizit auszugehen ist. Somit ist der Weg für eine *analytische* Behandlung geebnet, die bei dem der Kursrechnung zugrunde liegenden Bewertungsprinzip beginnt, und worin die Zinsrechnung als Sonderfall enthalten ist. Diese analytische Behandlung ersetzt die (übliche) *synthetische* Methode, bei welcher die Probleme durch Argumentation ad hoc gelöst werden, und die Allgemeinproblematik erst allmählich (mehr oder weniger) deutlich wird.

Es gibt, ausser Vorteilen didaktischer Art, noch weitere Erwägungen, die für eine Bevorzugung des Äquivalenzprinzips sprechen. Man kann dieses nämlich in solcher Weise formulieren, dass daraus nicht nur die Formeln der Finanzmathematik folgen, sondern das Problem der Beziehung zwischen in zwei verschiedenen Zeitpunkten erfolgten Bewertungen derselben Zahlung in seiner *Allgemeinheit* für Berechnung zugänglich gemacht wird. So können z. B. Versicherungsmathematik und Finanzmathematik aus demselben Ausgangspunkt behandelt werden. Die Verwandtschaft zwischen beiden Disziplinen findet auf diese Weise eine naturgemässere Erklärung, als in der bizarren Aussage, dass «bei der Finanzmathematik die Sterbenswahrscheinlichkeiten Null sind», und die in beiden Disziplinen auftretende Formel $A = 1 - ra$ ergibt nicht länger eine undurchsichtige Koinzidenz. Weiter treten in den letzten Jahren im Versicherungswesen Erscheinungen hervor, die nicht mit dem Formelsystem der konventionellen Versicherungsmathematik behandelt werden können. Man denke an «wertbeständige» Versicherungen, oder an die Anwendung des Umlageverfahrens. Auch in diesem Zusammenhang bildet das (allgemein formulierte) Äquivalenzprinzip den zweckdienlichsten Ausgangspunkt. Wer mit solchen Novitäten zu tun hat, entdeckt (nicht selten zu seiner Verwunderung), dass er sich erst der wesentlichen Absicht des überlieferten Verfahrens bewusst

werden muss, bevor er an diese neuen Probleme herantreten kann. Sogar hinsichtlich einer spielerisch aufgeworfenen Frage, wie jener der Berechnung einer Annuität bei einfacher Verzinsung, ist dies der Fall.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass eine allgemein zu formulierende Äquivalenzrechnung, die dann auf bestimmten Gebieten näher ausgearbeitet wird, erwünscht ist. Im Nachfolgenden ist dieser Entwurf skizzenhaft angegeben.

1 Das Äquivalenzprinzip

Ähnlich wie die Münzeinheit, in einem gegebenen Zeitpunkt, in geographischer Hinsicht im Werte variabel ist, so ist dieser Wert, an einem bestimmten Ort, in chronologischem Sinne variabel. Wie nun der Geldkurs im ersten Fall einen Zusammenhang zwischen geographisch auseinanderliegenden Münzeinheiten legt, so legt das Äquivalenzprinzip einen solchen Zusammenhang in chronologischem Sinne. In beiden Fällen ist man bestrebt, eine *Gleichwertigkeit* festzustellen, was u. a. beinhaltet, dass es sich weder um eine Gleichheit, noch um eine Wertschätzung, sondern nur um ein *Wertverhältnis* handelt.

Diese Wertänderung ist von verschiedenen, nicht unbedingt in die Betrachtung hineinzuziehenden Faktoren abhängig und erfolgt meistens in abnehmendem Sinne. Aus diesem Grunde wird im Nachstehenden einfachhalber fortwährend von «Entwertung» gesprochen; die Betrachtungen sind jedoch mutatis mutandis auch bei Aufwertung gültig.

Unter einer *Entwertungsfunktion* $A(t)$ verstehen wir eine (nichtsteigende) Funktion, die den Wert der Münzeinheit im Zeitpunkt t im Verhältnis zu dem Wert im Zeitpunkt 0 angibt. Sowohl diese Funktion wie der Zeitpunkt 0 sind in Abhängigkeit der gegebenen Situation zu wählen; in ein und derselben Betrachtung muss die einmal getroffene Wahl jedoch ungeändert bleiben.

Zwei Geldbeträge, bzw. in Höhe von K_1 und K_2 , zu betrachten in den Zeitpunkten t_1 und t_2 , können nun für gleichwertig gehalten werden, oder

$$[K_1]_{t_1} \sim [K_2]_{t_2}, \quad (1.1)$$

falls

$$K_1 A(t_1) = K_2 A(t_2); \quad (1.2)$$

so dass

$$[K_1]_{t_1} \sim \left[K_1 \frac{A(t_1)}{A(t_2)} \right]_{t_2}. \quad (1.3)$$

Für $K_1 = 1$, $t_1 = 0$ und $t_2 = n$ ergibt sich hieraus

$$[1]_0 \sim \left[\frac{1}{A(n)} \right]_n \quad (1.4)$$

und mithin

$$[A(n)]_0 \sim [1]_n, \quad (1.5)$$

solches im Einklang mit der Definition der Funktion $A(t)$. Die *Gleichheit* (1.2) ist erforderlich, damit die *Gleichwertigkeit* (1.1) gelten möge. Die hiermit übereinstimmende Relation (1.5) bezeichnen wir als «das Äquivalenzprinzip».

Das Äquivalenzprinzip wird bedeutsam, wenn die oben betrachteten «Beträge» sich auf Zahlungen beziehen. So wird jemand, der in den Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ die Zahlungen $K_1, K_2, \dots, K_i, \dots$ erwartet, diesen im Zeitpunkt 0 den Wert $\sum_i A(t_i) K_i$ beimessen. Hierdurch findet das Äquivalenzprinzip seine bedeutendsten Anwendungen auf dem Gebiete der Schuldtilgungen, wo ja zwischen den zu gewährenden und einzunehmenden Beträgen Gleichwertigkeit vorliegen muss. Dennoch hat das Äquivalenzprinzip, wie vorhin dargelegt, mit Begriffen wie Anlehen (und Zins) im wesentlichen nichts zu tun.

2 Entwertungsfunktionen

Die Entwertung der Münzeinheit kann durch verschiedene Faktoren herbeigeführt werden. Bei dem *Anlehen* ist es besonders von Bedeutung, dass, je später über einen Betrag verfügt werden kann, um so kürzer er zu gewinnbringenden Zwecken verwendbar ist. Es wird vorausgesetzt, dass diese Entwertung ein passendes Modell findet in der Funktion

$$A(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad (2.1)$$

worin r eine Konstante von der Grösse einiger Prozente darstellt. Bei *aktuariellen Problemen* gilt die Erwägung, dass je später eine Zahlung vorgenommen wird, desto grösser die Wahrscheinlichkeit wird, dass sie nicht stattfindet, weil entweder der Zahler oder der Empfänger nicht mehr am Leben sind. Hiezu entspricht die Entwertungsfunktion

$$A(t) = {}_t p_x, \quad (2.2)$$

worin ${}_t p_x$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass der in $t = 0$ x -jährige Beteiligte nach t Jahren noch am Leben ist.

Man kann weiter, unter Berücksichtigung einer *Inflation*, als Entwertungsfunktion annehmen

$$A(t) = \frac{k(0)}{k(t)}, \quad (2.3)$$

worin $k(t)$ irgendeinen Lebenskostenindex darstellt.

Bei bestimmten *Altersversorgungen* kann es wichtig sein, dass die Altersrentner im Verhältnis zu den Aktiven stärker an Zahl zunehmen, so dass die von den Letzteren behufs der Ersteren zurückzulegenden Münzeinheiten allmählich an Wert einbüßen. Diese «*Ergreisungsentwertung*» wäre zu bezeichnen durch

$$A(t) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(t)}, \quad (2.4)$$

worin $\gamma(t)$ das Verhältnis der Anzahl der Rentner zu jener der Aktiven darstellt.

Welche dieser (oder sonstiger) Funktionen in einer bestimmten Situation anzuwenden ist, hängt in erster Linie davon ab, welche Entwertung in dem Falle für wirksam gehalten wird, während weiter die erwünschte Genauigkeit von Bedeutung ist. Das heisst, dass bei einem und demselben Problem verschiedene Beurteiler verschiedene Funktionen verwenden können, was z. B. bei den Schuldtilgungen hinsichtlich des Gläubigers und des Schuldners der Fall sein kann. Wünscht man gleichzeitig mehrere Faktoren zu berücksichtigen, so kann dies erfolgen, wenn man das Produkt der diesbezüglichen Entwertungsfunktionen einführt. So wird in der Versicherungsmathematik die Kombination von (2.1) und (2.2), d. h. die Funktion

$$A(t) = \frac{t p_x}{(1+r)^t} \quad \text{angewendet.} \quad (2.5)$$

3 Die exponentielle Entwertungsfunktion

Von den hier oben als Beispiel genannten Entwertungsfunktionen hat die erstgenannte (2.1) eine besondere Eigenschaft. Aus (1.3) ergibt sich für diese Entwertung nämlich:

$$[K_1]_{t_1} \sim [K_1(1+r)^{t_2-t_1}]_{t_2}, \quad (3.1)$$

woraus hervorgeht, dass die Wahl des Anfangspunkts des Zeitmasses hier nichts zur Sache tut; an der rechten Seite tritt ja nur die Differenz

$t_2 - t_1$ auf. Keine einzige weitere Entwertungsfunktion hat diese Eigenschaft. Wenn man nämlich verlangt, dass für sämtliche t_1 und t_2 der Quotient $\frac{A(t_1)}{A(t_2)}$ aus (1.3) nur von $t_2 - t_1$ abhängen soll, so gilt für sämtliche t und Δt :

$$\frac{A(t + \Delta t)}{A(t)} = f(\Delta t)$$

und so ist

$$\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = A(t) \frac{f(\Delta t) - 1}{\Delta t}.$$

$\Delta t \rightarrow 0$ ergibt:

$$\frac{dA}{dt} = A(t) f'(0),$$

was durch Integration tatsächlich (2.1) ergibt, wenn man setzt $f'(0) = -\ln(1+r)$, und die Nebenbedingung $A(0) = 1$ berücksichtigt wird.

Dass die Wahl des Anfangspunktes bei dieser Entwertungsfunktion nichts zur Sache tut, vereinfacht die Berechnungen erheblich, so dass sie öfters auch dort angewendet wird, wo die Wahl einer anderen Entwertungsfunktion eher der Wirklichkeit entsprechen dürfte. Wenn es erlaubt scheint, Entwertungsphänomene, wie durch (2.3) oder (2.4) dargestellt, durch (2.1) zu approximieren, so hat man den Vorteil, dass auch eine Kombination der Entwertungsfunktionen bequem in die exponentielle Form gebracht werden kann. Für geringe Werte r und s ist ja $(1+r)^{-t} (1+s)^{-t}$ näherungsweise gleich $(1+r+s)^{-t}$.

Wir werden die Funktion (2.1) im Nachfolgenden als die «exponentielle Entwertungsfunktion» bezeichnen und dafür das übliche Zeichen $A_{\bar{t}}$ verwenden. Also

$$A_{\bar{t}} = \frac{1}{(1+r)^{\bar{t}}}. \quad (3.2)$$

Der Kürze wegen definieren wir

$$a(n) = \sum_{j=1}^n A(j) \quad (3.3)$$

und in ähnlicher Weise

$$a_{\bar{n}} = \sum_{j=1}^n A_{\bar{j}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+r)^j} = \frac{1}{1+r} \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1 - A_{\bar{n}}}{r}.$$

Im Falle exponentieller Entwertung hat man mithin die Beziehung

$$A_{\bar{n}} = 1 - r a_{\bar{n}}. \quad (3.4)$$

4 Rückkauf bei Umlageverfahren

Als Beispiel einer weniger üblichen Anwendung geben wir hier die Grundsätze an, nach denen bei einer wertbeständigen sozialen Pensionsversicherung, die nach dem Umlageverfahren finanziert wird, eine Rückkaufsregel aufgenommen werden könnte. Nehmen wir z. B., dass jemand in den Zeitpunkten $t+1$, $t+2$ und $t+3$ die von ihm schuldigen Umlageprämien P_1 , P_2 und P_3 entrichtet hat, und im Zeitpunkt $t+4$ die Versicherung, z. B. wegen Auswanderung, beenden muss. Es soll dann ein Rückkaufswert K für die entrichteten Prämien (unter Verfallserklärung der daraus hervorgehenden Rechtsansprüche) gewährt werden. Dieser Rückkaufswert K muss der Beziehung:

$$[K]_{t+4} \sim [P_1]_{t+1} + [P_2]_{t+2} + [P_3]_{t+3}$$

genügen. Legen wir den Anfangspunkt in $t+4$, so ist gemäss (1.3)

$$K = P_1 A(-3) + P_2 A(-2) + P_3 A(-1).$$

Es fragt sich nun jedoch, welche Entwertungsfunktion $A(t)$ hier für anwendbar gehalten werden muss. Da das Umlageverfahren befolgt wird, sind die Entwertungen (2.1) und (2.2) hier nicht wirksam. Die Realwertbeständigkeit der Pensionen fordert jedoch, dass der Zunahme der Lebenskosten Rechnung getragen wird, während weiter die Verlängerung der Lebensdauer eine allmähliche Steigerung der Prämie bewirkt. Wir werden daher als Entwertungsfunktion das Produkt der Funktionen (2.3) und (2.4) verwenden müssen. Im Prinzip ist die Frage hiermit gelöst. Approximieren wir die Funktionen (2.3) und (2.4) mittels der exponentiellen Entwertungsfunktion, so ist z. B. zu setzen

$$\frac{k(0)}{k(t)} = \frac{1}{1,02^t}, \quad \frac{\gamma(0)}{\gamma(t)} = \frac{1}{1,015^t},$$

mithin

$$A(t) = \frac{1}{1,035^t}.$$

Das heisst, dass als Rückkaufswert die entrichteten Prämien mit einer Entwertungsentschädigung zu $3\frac{1}{2}\%$ jährlich zurückerstattet werden. Diese Entschädigung wäre jedoch nicht als Zinseszins (im üblichen Sinne des Wortes) zu betrachten.

5 Anlehen und Entwertung

Unter einem *Anlehen* verstehen wir eine Transaktion zwischen zwei als Gläubiger und Schuldner zu bezeichnenden Parteien, wobei sich das Folgende ereignet. Im Anfangspunkt 0 gewährt der Gläubiger dem Schuldner einen Betrag K ; der Schuldner wird in den Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$ dem Gläubiger die Beträge $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ zahlen. Diese Größen können alle im Einverständnis gewährt werden, die Zahlungen beider Parteien müssen jedoch im Anfangspunkt 0 äquivalent sein:

$$[K]_0 \sim \sum_{i=1}^n [P_i]_{t_i}. \quad (5.1)$$

Es muss also gelten

$$K = \sum_{i=1}^n A(t_i) P_i, \quad (5.2)$$

wo $A(t)$ eine für beide Parteien akzeptable Entwertungsfunktion darstellt. Da $A(t)$ für $t > 0$ kleiner als 1 ist, ergibt (5.2), dass $\sum P_i > K$. Die Differenz $\sum P_i - K$ kann betrachtet werden als eine dem Gläubiger von dem Schuldner zu gewährende Entschädigung für die Entwertung, die während der Dauer t_n des Anlehens auftritt. Ausser im Fall $n = 1$, können die Beträge P_i aus (5.2) nicht ohne Nebenbedingungen bestimmt werden.

Die von den Parteien akzeptierte Funktion $A(t)$ braucht nicht mit der Funktion zusammenzutreffen, nach welcher der Gläubiger die künftigen Einnahmen P_i für sich bewertet. Kennzeichnen wir letztere mit dem Zeichen $\tilde{A}(t)$, so sind die Einnahmen P_i für den Gläubiger gleichwertig mit dem Betrag

$$\tilde{K} = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(t_i) P_i. \quad (5.3)$$

Nennen wir $A(t)$ die objektive (oder «nominelle») Entwertungsfunktion; dann ist $\tilde{A}(t)$ als subjektive (oder «effektive») Entwertungsfunktion zu bezeichnen. Demgemäß ist K der objektive (oder «nominelle») Wert des Anlehens; \tilde{K} können wir als den subjektiven (oder «effektiven») Wert bezeichnen. Der Quotient

$$\frac{\tilde{K}}{K} = x = \frac{\sum \tilde{A}(t_i) P_i}{\sum A(t_i) P_i} \quad (5.4)$$

heisst der *Kurs* des Anlehens.

Beispiele:

- a) Wenn wir setzen $t_i = i$ und sämtliche P_i gleich P , so folgt aus (5.2) und (3.3):

$$K = \sum_{i=1}^n A(i) P = P a(n),$$

so dass

$$P = \frac{K}{a(n)}. \quad (5.5)$$

Bei diesem Anlehen findet während n Jahren am Ende des Jahres dieselbe Zahlung P statt. Wir nennen dies eine n -jährige (gleichbleibende postnumerando) *Zeitrente*. Der Kurs beträgt:

$$x = \frac{\tilde{a}(n)}{a(n)}. \quad (5.6)$$

- b) Wieder setzen wir $t_i = i$ und fordern weiter:

Sämtliche P_i sind gleich P , ausser P_n , das $= K + P$ sein muss.

Aus (5.2) folgt dann:

$$K = P a(n) + K A(n)$$

also

$$P = K \frac{1 - A(n)}{a(n)}. \quad (5.7)$$

Wir nennen dies vorläufig eine n -jährige «Normal-Anleihe». Der Kurs beträgt:

$$x = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n \tilde{A}(i) P_i = \frac{1}{K} [P \tilde{a}(n) + K \tilde{A}(n)],$$

also

$$x = \tilde{A}(n) + \frac{1 - A(n)}{a(n)} \tilde{a}(n). \quad (5.8)$$

6 Zins und Tilgung

Bei der Normal-Anleihe wird der im Zeitpunkt n dem Gläubiger gezahlte Betrag K gewöhnlich als eine Rückzahlung des geliehenen Betrags interpretiert. Die Zahlungen P , die in den Zeitpunkten $1, 2, \dots, n$ erfolgen, bilden somit eine jährliche Entschädigung für die Entwertung, die der Betrag K während n Jahren erfährt. Diese jährliche Entschädigung wird *Zins* genannt und die Rückzahlung des geborgten Betrags heisst *Tilgung*.

Unter einer *in n Terminen zu tilgenden Anleihe* mit jährlicher Zinszahlung verstehen wir nun die Summe von n Normal-Anleihen, gross bzw. K_1, K_2, \dots, K_n und bzw. $1, 2, \dots, n$ Jahren dauernd. Der Gesamtbetrag K der Anleihe wird definiert als

$$K = \sum_{i=1}^n K_i, \quad (6.1)$$

wobei zu bemerken wäre, dass einige dieser K_i gleich 0 sein dürfen. Bei der Normal-Anleihe ist z. B. nur $K_n \neq 0$, und wir können diese daher als eine *auf einmal zu tilgende Anleihe* bezeichnen.

Die Zahlung P_i im Zeitpunkt i ist gleich der alsdann zur Tilgung gelangenden Teilschuld K_i nebst dem Zins wegen der noch nicht zur Tilgung gelangten Anleihen K_i, K_{i+1}, \dots, K_n .

Also, im Zusammenhang mit (5.7):

$$P_i = K_i + \sum_{j=i}^n K_j \frac{1 - A(j)}{a(j)}, \quad (\text{für } i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.2)$$

Bei gegebenen Werten K_i , (6.1) genügend, sind also die Zahlungen P_i bestimmt (wir legen gleich dar, dass sie (5.2) genügen). Umgekehrt können bei gegebenen P_i , (5.2) genügend, aus diesen n Gleichungen die Werte K_i bestimmt werden und es zeigt sich, dass dieselben (6.1) genügen ¹⁾. □

Aus (6.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A(i) P_i &= \sum_{i=1}^n A(i) K_i + \sum_{i=1}^n A(i) \sum_{j=i}^n K_j \frac{1 - A(j)}{a(j)} = \\ &= \sum_{i=1}^n A(i) K_i + \sum_{j=1}^n K_j \frac{1 - A(j)}{a(j)} \sum_{i=1}^j A(i). \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit $\sum_{i=1}^j A(i) = a(j)$ findet man auf der rechten Seite $\sum_{j=1}^n K_j$. Also

$$\sum_{i=1}^n A(i) P_i = \sum_{i=1}^n K_i.$$

Wenn demnach eine der beiden Seiten $= K$, ist auch die andere Seite $= K$, q. e. d.

¹⁾ Es steht jedoch nicht fest, dass sämtliche K_i und $P_i - K_i$ positiv sein werden. Hieraus ergibt sich, dass die Gliederung der Zahlungen in Zinsendienst und Rückzahlungsquote etwas Künstliches an sich hat.

Beispiele:

- a) Wenn sämtliche K_i gleich sind, und folglich $\frac{K}{n}$ betragen, sprechen wir von einer *n-jährigen gleichmäßig zu tilgenden Anleihe*.

Die Jahreszahlung beträgt nun

$$P_i = \frac{K}{n} \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{1-A(j)}{a(j)} \right]. \quad (6.3)$$

- b) Bei der Annuitätenanleihe sind sämtliche P_i gleich, $= \frac{K}{a(n)}$.

Nach (6.2) gilt also

$$K_i + \sum_{j=i}^n K_j \frac{1-A(j)}{a(j)} = K_{i+1} + \sum_{j=i+1}^n K_j \frac{1-A(j)}{a(j)},$$

mithin

$$K_i + K_i \frac{1-A(i)}{a(i)} = K_{i+1}$$

und die Tilgungen genügen den Rekursionsformeln:

$$K_{i+1} = K_i \left[1 + \frac{1-A(i)}{a(i)} \right]. \quad (6.4)$$

Sie können also bequem berechnet werden, wenn man noch erwägt, dass

$$K_n + K_n \frac{1-A(n)}{a(n)} = \frac{K}{a(n)}$$

sein muss, so dass

$$K_n = \frac{K}{a(n) + 1 - A(n)}. \quad (6.5)$$

7 Anlehen bei exponentieller Entwertung

Wenn man das Vorhergehende in Anwendung bringt für die Entwertungsfunktion $A_{\bar{t}}$, finden wir die bekannten Ergebnisse:

- a) Für die *Annuitätenanleihe* ist die Jahreszahlung nach (5.5):

$P = \frac{K}{a_{\bar{n}}}$. Im Zusammenhang mit (3.4) genügen die Rückzahlungsquoten laut (6.4):

$$K_{i+1} = K_i(1+r) \quad (7.1)$$

und bilden also eine geometrische Reihe; gemäss (6.5) ist die letzte Tilgung gleich

$$\frac{K}{a_{\bar{n}}(1+r)} = \frac{P}{1+r}. \quad (7.2)$$

- b) Bei der *auf einmal zu tilgenden Anleihe* beträgt der jährlich zu zahlende Zins laut (5.7): $K \frac{1-A_{\bar{n}}}{a_{\bar{n}}}$. Im Zusammenhang mit (3.4) ist dies $= rK$.

Der in der exponentiellen Entwertungsfunktion auftretende Parameter r gibt also an, welcher Bruchteil des Kapitals jährlich als Zins zu zahlen ist. Dies erklärt, aus welchem Grunde r der *Zinsfuß* genannt wird.

- c) Bei der *gleichmäßig zu tilgenden Anleihe* ist der im Zeitpunkt i zu zahlende Zins laut (6.3) gleich:

$$\frac{K}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1-A_{\bar{j}}}{a_{\bar{j}}} = \frac{K}{n} (n-i+1)r,$$

mithin

$$P_i = \frac{K}{n} + \frac{K}{n} (n-i+1)r.$$

Wir bezeichnen den im Zeitpunkt $t = 0$ einer Reihe von Zahlungen zu $n, n-1, \dots, 2, 1$, vorzunehmen in den Zeitpunkten $1, 2, \dots, n$, gleichwertigen Betrag mit dem Symbol $Da(n)$.

Der im Zeitpunkt $t = 0$ gleichwertige Betrag der obengenannten Zahlungen P_i ist dann zu schreiben als

$$\frac{K}{n} a_{\bar{n}} + \frac{K}{n} r Da_{\bar{n}}.$$

Da dieser Äquivalenzwert $= K$ sein muss, finden wir also

$$K = \frac{K}{n} a_{\bar{n}} + \frac{K}{n} r Da_{\bar{n}}$$

und mithin

$$Da_{\bar{n}} = \frac{n - a_{\bar{n}}}{r}. \quad (7.3)$$

8 Kursberechnung

Die Formeln (5.2) und (5.3) können wie folgt verallgemeinert werden:

$${}_k K = \frac{1}{A(k)} \sum_{i=k+1}^n A(i) P_i, \quad (8.1)$$

$${}_k \tilde{K} = \frac{1}{\tilde{A}(k)} \sum_{i=k+1}^n \tilde{A}(i) P_i. \quad (8.2)$$

Hiermit findet man den objektiven, bzw. subjektiven Wert der $k+1$ -ten bis zur letzten Zahlung zu dem Zeitpunkte, da die k -te Zahlung gerade stattgefunden hat.

Der Quotient

$${}_k x = \frac{{}_k \tilde{K}}{{}_k K} \quad (8.3)$$

heisst der *Kurs* in dem betreffenden Zeitpunkt. Der objektive Wert ${}_k K$ ist im allgemeinen *nicht* gleich dem Schuldrest $\sum_{i=k+1}^n K_i$. Wohl ist dies für $k = 0$ laut dem Satz des Paragraphen 6 immer der Fall, aber für $k = 1, 2, \dots, n$ gilt dies nur, wenn für $A(t)$ die exponentielle Entwertungsfunktion gewählt wird. Dann gilt ja

$$\frac{A(i)}{A(k)} = A(i-k)$$

und die rechte Seite von (8.1) wird sodann

$$\sum_{i=k+1}^n A(i-k) P_i = \sum_{i=1}^{n-k} A(i) P_{i+k} = \sum_{i=1}^{n-k} K_{i+k}.$$

Wenn man die Formel (8.1) gleichfalls für $k+1$ aufstellt, und dann von (8.1) subtrahiert, so findet man:

$${}_{k+1} K = \frac{A(k)}{A(k+1)} {}_k K - P_{k+1} \quad (8.4)$$

und in ähnlicher Weise

$${}_{k+1} \tilde{K} = \frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(k+1)} {}_k \tilde{K} - P_{k+1}. \quad (8.5)$$

In Worten: der neue objektive (bzw. subjektive) Wert ist gleich dem aufgewerteten alten Wert, abzüglich der erfolgten Zahlung.

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{A(k)}{A(k+1)} {}_k K - {}_{k+1} K = \frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(k+1)} {}_k \tilde{K} - {}_{k+1} \tilde{K}. \quad (8.6)$$

Die Differenz ${}_k K - {}_k \tilde{K} = {}_k A$ bezeichnen wir als das *Disagio*, und die Differenz ${}_k A - {}_{k+1} A = {}_k d$ heisst die *Abschreibung* vom Disagio. Wegen

$${}_k d = {}_k K - {}_k \tilde{K} - ({}_{k+1} K - {}_{k+1} \tilde{K}) = ({}_{k+1} \tilde{K} - {}_k \tilde{K}) - ({}_{k+1} K - {}_k K) \quad (8.7)$$

ist diese Abschreibung gleich der Differenz zwischen der Änderung in subjektiven und jener in objektiven Wert. Im Zusammenhang mit (8.6) ist dies zu schreiben

$${}_k d = {}_k K - {}_k \tilde{K} - \left[\frac{A(k)}{A(k+1)} {}_k K - \frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(k+1)} {}_k \tilde{K} \right]$$

und mithin

$${}_k d = {}_k \tilde{K} \left[\frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(k+1)} - 1 \right] - {}_k K \left[\frac{A(k)}{A(k+1)} - 1 \right]. \quad (8.8)$$

Die Abschreibung vom Disagio ist gleich der Differenz zwischen den Beträgen, die erforderlich sind, um die subjektiven und objektiven Werte vom Niveau k zum Niveau $k+1$ aufzuwerten. Laut der Terminologie des Paragraphen 6 bezeichnen wir diese Beträge als «Zins» und man kann somit (8.8) wie folgt in Worte fassen: die Abschreibung vom Disagio ist gleich der Differenz zwischen dem subjektiven Zins des subjektiven und dem objektiven Zins des objektiven Wertes.

Durch Einsetzen der Funktion $A_{\bar{t}}$ in diese Ergebnisse für $A(t)$ und durch Ersatz der Worte subjektiv und objektiv durch effektiv und nominell, ermittelt man die bekannten Fazite. Hierbei ist zu beachten, dass für die objektive Funktion $A(t)$ in der praktischen Anwendung tatsächlich meistens die exponentielle Entwertungsfunktion gewählt wird. Es ist jedoch bei weitem nicht immer reell, dies auch für die subjektive Entwertung anzunehmen. Der Gläubiger möchte z. B. berücksichtigen, dass der erhobene Zins nicht gewinnbringend, sondern konsumtiv angewendet wird, oder bestimmte Wahrscheinlichkeiten in seine Bewertung hineinkalkulieren. Dies möge Anlass dazu geben, dem einfachen Zins und der Versicherungsmathematik noch einige Betrachtungen zu widmen.

9 Einfacher Zins und Zinseszins

Im Paragraphen 6 haben wir die Zahlungen P_i (des Schuldners an den Gläubiger) in Rückzahlungsquoten K_i und Zinszahlungen $P_i - K_i$ aufgegliedert. In den Anleihebedingungen kann nun, gleichviel aus welchem Grunde, bestimmt werden, dass diese jährlichen Zinszahlungen nicht sofort erhoben, sondern bis zu einem bestimmten Zeitpunkt *gutgeschrieben* werden, um z. B. gleichzeitig mit der letzten Tilgung ausgezahlt zu werden. Hinsichtlich dieses «Gutschreibens» sind zwei Verfahren üblich. Im ersten Falle wird angenommen, dass die als Zinsen eingehenden Summen gleichfalls einer Entwertung unterliegen, und wird somit für eine zu späte Zahlung davon eine gleichwertige Entschädigung gewährt. Im zweiten Falle wird die Entwertung als nichtdaseiend betrachtet und es findet die diesbezügliche Entschädigung also nicht statt. Dementsprechend spricht man von *Gutschreiben* von *Zinseszins*, bzw. von *einfachem Zins*. Wenn die Entwertung nicht exponential verläuft, wird das Rechnen mit Zinseszins bald kompliziert, weil für jede aufgeschobene Zahlung des Zinses ein anderer Anfangspunkt der Entwertungsfunktion zur Geltung kommt. Dies erklärt, dass Zinseszins in der Praxis immer mit exponentieller Entwertung verbunden ist und damit öfters in verwirrender Weise identifiziert wird. So wird man z. B. (7.3) als eine «Formel mit Zinseszins» bezeichnen, obwohl hier der Zins jährlich tatsächlich gezahlt, und nicht verzinslich gemacht wird. Auf diese Weise wird z. B. auch das Problem einer Annuitätsanleihe mit einfacher Verzinsung als Scheinproblem entlarvt: denn bei einer Annuitätsanleihe findet Zahlung des Zinses und keine Anlegung des Zinses statt. Wenn wir die im Paragraphen 5 genannten Normal-Anleihe unter Anwendung von Zinseszins (bei exponentieller Entwertung) stattfinden lassen, muss im Zeitpunkt n ausser der Tilgung K noch ein Betrag X , genügend

$$\sum_{i=1}^n [rK]_i \sim [X]_n$$

gezahlt werden, woraus folgt

$$X = \frac{r K a_{\bar{n}}}{A_{\bar{n}}}.$$

Insgesamt wird also gezahlt $K \left[1 + \frac{r a_{\bar{n}}}{A_{\bar{n}}} \right] = \frac{K}{A_{\bar{n}}}$, solches im Einklang mit der Äquivalenzgleichung (1.5).

Bei Anwendung einfachen Zinses muss ausser der Tilgung K nur der rückständige Zins zu nrK gezahlt werden. In diesem Falle erhält der Gläubiger im Zeitpunkt n also $K(1 + nr)$ im Tausch für seine Zahlung K im Zeitpunkt 0. Man könnte daher Anlage bei einfachem Zins interpretieren als das Rechnen mit der «hyperbolischen» Entwertungsfunktion:

$$A_{\bar{t}} = \frac{1}{1 + rt}. \quad (9.1)$$

So aufgefasst bekommt der Begriff «Annuitätenanleihe mit einfacher Verzinsung» eine ganz andere Bedeutung. Indem wir nehmen

$$a_{\bar{n}} = \sum_{j=1}^n A_{\bar{j}}, \quad (9.2)$$

und diesen Wert in die allgemeinen Annuitätenformel (5.5) einsetzen, finden wir die Jahreszahlung

$$P = \frac{K}{a_{\bar{n}}}$$

geltend für die Annuitätenanleihe bei hyperbolischer Entwertungsfunktion. Auch die Zerlegung in Rückzahlungsquote und Zinsdienst ist gemäss der allgemeinen Formel (6.4) aufzusetzen.

10 Versicherungsmathematik

Zum Schluss möchten wir noch angeben, in welcher Weise die Versicherungsmathematik in der Äquivalenzrechnung enthalten ist (wir beschränken uns auf die Nettoprämiens).

Wenn ein x -jähriger im Zeitpunkt 0 einem Versicherer einen Betrag $A(n)$ zahlt, kann ihm, falls er nach n Jahren am Leben ist, die Münzeinheit ausgezahlt werden, falls $A(n)$ die in dieser Situation geltende Entwertungsfunktion (2.5) darstellt. Wir deuten diese Funktion mit dem Zeichen A_{xn}^1 an. Für eine *Erlebensfallversicherung*, abgeschlossen von einem x -jährigen, mit Dauer n , beträgt somit die Einmal-Prämie:

$$A_{xn}^1 = \frac{np_x}{(1+r)^n}. \quad (10.1)$$

Völlig analog (3.3) stellt

$$a_{x\bar{n}} = \sum_{j=1}^n A_{xj}^1 \quad (10.2)$$

die Einmal-Prämie einer n -jährigen (nachschüssigen) *Leibrente* in Grösse 1 jährlich, abgeschlossen von einem x -jährigen, da. Da für $x+j > \omega$ (= eine Konstante) die Grössen A_{xj}^1 verschwinden, gilt für die *lebenslängliche Rente*

$$a_x = a_{x\omega-x} = \sum_{j=1}^{\omega-x} A_{xj}^1. \quad (10.3)$$

Wenn ein x -jähriger im Zeitpunkt 0 bis zu seinem Tode dem Versicherer einen Betrag 1 leibt, muss ihm dafür im Zusammenhang mit Paragraph 7 solange er lebt eine jährliche Zinszahlung r erstattet werden. Der Zins ist gemäss (10.3) zu $t = 0$ gleichwertig ra_x . Die Differenz $1 - ra_x$ ist daher zu $t = 0$ äquivalent mit dem im Todesfalle ¹⁾ auszuzahlenden Betrag 1, so dass die Einmal-Prämie für die *lebenslängliche Todesfallversicherung* beträgt:

$$A_x = 1 - ra_x. \quad (10.4)$$

Indem man das obenstehende Anlehen höchstens n Jahre andauern lässt, erhält man die Einmal-Prämie $A_{x\bar{n}}$ für eine Leistung 1, zu zahlen nach n Jahren im Erlebensfalle, oder früher im Todesfalle, das ist die «gemischte Versicherung». Verminderung dieser Einmal-Prämie um $A_{x\bar{n}}^1$ ergibt die Einmal-Prämie $A_{x\bar{n}}^1$ für die *temporäre Todesfallversicherung*.

Die Beziehung (10.2) ergibt weiter die Umrechnung von Einmal-Prämiien in *Jahresprämiien*. Zum Schluss wäre zu erwähnen, dass die *Prämienreserve* übereinstimmt mit dem, was im Paragraph 8 als der Objektivwert eines Anlehens definiert worden ist.

11 Schlussfolgerung

Im vorhergehenden ist dargestellt, in welchen Punkten der Elementarunterricht in der Finanzmathematik und Versicherungsmathematik erneuert werden könnte – und sollte. Selbstverständlich konnte in diesem Rahmen keine Vollständigkeit erreicht werden und wurden natürlich jene Punkte, die abgeändert werden müssten stärker hervor-

¹⁾ Hierbei ist vorausgesetzt, dass der Todesfall am Anfang des Versicherungsjahres eintritt.

gehoben als die, welche keine Änderung brauchen. Diese Änderungen können wie folgt zusammengefasst werden:

- a) Ersatz der synthetischen durch die analytische Behandlung, wobei das Äquivalenzprinzip in seiner allgemeinsten Form als Ausgangspunkt zu nehmen ist;
 - b) Behandlung der Finanzmathematik und Versicherungsmathematik von demselben Ausgangspunkt aus;
 - c) Anwendung des Äquivalenzprinzips auch in anderen, als den gewöhnlich in der Finanzmathematik und Versicherungsmathematik betrachteten Fällen;
 - d) systematische Formalisierung durch Verwendung des Äquivalenzzeichens;
 - e) Verwendung einer klareren Terminologie;
 - f) Beschränkung hinsichtlich Formeln und Zeichen.
-

Résumé

L'auteur fait ressortir que le système d'enseignement des mathématiques financières et des mathématiques actuarielles devrait être réformé. Il propose une étude analytique de ces matières, dans laquelle le principe d'équivalence dans sa forme plus générale serait pris comme point de départ. Les mathématiques financières et les mathématiques actuarielles pourraient ainsi être traitées comme un tout. D'autres domaines d'application, où le principe d'équivalence intervient, pourraient être englobés dans cette étude.

Summary

The author explains that the teaching method for financial mathematics and actuarial sciences ought to be renewed. He therefore proposes an analytic treatment of the subject, where the principle of equivalence in its most general form is taken as point of departure. Financial mathematics and actuarial sciences could then be treated both on the same basis. Other fields of application involving the principle of equivalence could also be handled in the same way.

Riassunto

L'autore fa risaltare che il sistema d'insegnamento della matematica finanziaria e della matematica attuariale necessita una revisione. Propone quindi uno studio analitico della materia: il principio di equivalenza nella sua forma più generale dovrebbe essere preso quale punto di partenza. La matematica finanziaria e la matematica attuariale potrebbero così essere svolte in modo analogo. Altri campi di applicazione che fanno capo al principio di equivalenza sarebbero assoggettati al medesimo trattamento.