

# Zum Lucasschen Ehepaarproblem

Autor(en): **Schöbe, Waldemar**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **61 (1961)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966742>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zum Lucasschen Ehepaarproblem

Von Waldemar Schöbe, München

### Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass die Anzahlfunktion des Lucasschen Ehepaarproblems einer klassischen kombinatorischen Aufgabe, sich (bei mindestens 4 Ehepaaren) als nächste ganze Zahl zu

$$n e^{-2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \quad \text{ergibt.}$$

Es handelt sich um die Frage, auf wieviele Arten  $n$  Ehepaare so um einen Tisch Platz nehmen können, dass jeder Mann zwischen zwei Frauen, aber keiner neben seiner Ehefrau sitzt; mit  $A_n$  sei die Anzahl der Sitzordnungen bezeichnet, die möglich sind, nachdem die Frauen die ihnen zustehenden Plätze eingenommen haben. Indem gleichzeitig zwei andere ähnliche Anzahlfunktionen betrachtet werden, bei denen die Bedingungen einzelne Ausnahmen erleiden, gelangt man nach É. Lucas [1] <sup>1)</sup> zu drei simultanen Rekursionsformeln, aus denen sich für  $A_n$  allein eine kombinatorisch nicht mehr deutbare homogene Rekursionsformel dritter Ordnung und daraus weiter eine inhomogene Rekursionsformel zweiter Ordnung

$$(n-1) A_{n+1} = (n^2-1) A_n + (n+1) A_{n-1} + 4(-1)^n, \quad (n \geq 3), \quad (1)$$

herleiten lässt. Die Anfangswerte sind  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = 1$ . Leicht zugänglich ist die bis zur Formel (1) geführte Darstellung des Problems bei H. Dörrie [2]. Der Verfasser konnte zeigen [3], dass bei der Substitution  $A_n = 2(-1)^n + n b_n$  sich  $n! b_{n+1}$  als Anfangsglied der  $n$ -ten Differenzenfolge der Quadratzahlenfolge 1, 0, 1, 4, 81, 1936, ...,

---

<sup>1)</sup> Siehe Literaturhinweise am Schlusse dieser Arbeit.

allgemein

$$\left(m! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!}\right)^2, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

ergibt. Diese wächst so schnell, dass ihr letztes in die Differenzenbildung eingehendes Glied die Grössenordnung von  $b_{n+1}$  allein bestimmt. So findet man die Grenzbeziehung

$$A_n/n! \rightarrow e^{-2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Im folgenden soll eine andere, überraschend einfache Formel für  $A_n$  hergeleitet werden. Wird nämlich unter  $A'_n$  die ganze Zahl verstanden

$$A'_n = \sum_k (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \quad \text{mit Summation von } 0 \text{ bis } \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

so ist für  $n \geq 4$   $A_n$  die nächste ganze Zahl bei  $nA'_n e^{-2}$ . Beispielsweise ist  $A'_8 = 5040 - 720 + 60 - 4 = 4376$ ,  $8 \cdot 4376 = 35008$ ,  $35008 e^{-2} = 4737,817\dots$ ,  $A_8 = 4738$ .

Für  $n = 4$  und  $n = 5$  kann man die Behauptung direkt bestätigen. Zum Beweise für  $n \geq 6$  setzen wir zwecks formaler Vereinfachung  $b_n = (-1)^{n-1} g_n$ , so dass  $(-1)^{n-1} A_n = n g_n - 2$  ist. Aus (1) entsteht dann  $(n^2 - 1)(g_{n+1} + n g_n - g_{n-1} - 2) = 0$  mit  $g_2 = 1, g_3 = 1$ .

Unter  $\mathfrak{F}a_n$  soll der Operator  $a_{n+1} + n a_n - a_{n-1}$  verstanden werden, der folgende Transformationseigenschaft besitzt:

$$\text{Ist } n = -m, \quad a_n = c b_m, \quad \text{so ist } \mathfrak{F}a_n = -c \mathfrak{F}b_m.$$

Hieraus folgt für  $c = 1$ , dass im Falle  $\mathfrak{F}a_n \equiv 0$  stets  $a_n = a_{-n}$  sein muss, da sich zunächst  $a_1 = a_{-1}$  unmittelbar ergibt.

Mittels der Rekursionsformel  $\mathfrak{F}g_n \equiv 2$  kann die Folge  $g_n$  von den angegebenen Anfangswerten auch rückwärts fortgesetzt werden. Es wird  $g_1 = 1, g_0 = 0$ .

Die homogene Rekursionsformel  $\mathfrak{F}a_n \equiv 0$  lässt sich durch Zylinderfunktionen des Arguments  $2i$  vollständig auflösen. Aus dieser Theorie stammen die Bildungen

$$p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (n+k)!}, \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}, \quad Q_0 = 0,$$

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k + w_{k+n}}{k! (n+k)!},$$

worin  $w_0 = 0$  und für  $k \geq 1$   $w_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$  gesetzt ist.

Man findet, wenn noch  $q_n = Q_n - R_n$  eingeführt wird,

$$\mathfrak{F}p_n \equiv 0, \quad \mathfrak{F}Q_n = \mathfrak{F}R_n = \frac{1}{n!}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{F}q_n \equiv 0.$$

Es ist nämlich für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!(n+k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k-1)!} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k-1)!} = p_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-k+(n+k)}{k!(n+k)!} - p_{n-1} \\ &= p_{n+1} + np_n - p_{n-1}. \end{aligned}$$

Ähnlich bestätigt man die anderen Relationen. Sie bleiben für alle ganzen  $n$  erfüllt, wenn  $p_{-n} = p_n$ ,  $Q_{-n} = Q_n$ ,  $R_{-n} = R_n$ ,  $q_{-n} = q_n$  definiert wird. Im Sinne einer üblichen Bezeichnung modifizierter Zylinderfunktionen ist

$$p_n = I_n(2), \quad -q_n = 2K_n(2) + 2C I_n(2),$$

wobei  $C$  die Eulersche Konstante bedeutet.

Aus den Rekursionsformeln folgt sofort

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$$

und daraus  $(-1)^n (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = \text{const.} = 1$ ,

wobei sich der Wert 1 der Konstanten später durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  leicht ergeben wird.

Mittels Variation der Konstanten kann nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Rekursionsformel  $\mathfrak{F}g_n \equiv 2$  in der Form  $g_n = -p_n U_n + q_n V_n$  angesetzt werden. Dadurch entsteht  $\mathfrak{F}g_n$  als Summe der Ausdrücke

$$-p_{n+1}(U_{n+1} - U_n) + q_{n+1}(V_{n+1} - V_n)$$

und  $-p_{n-1}(U_n - U_{n-1}) + q_{n-1}(V_n - V_{n-1})$ .

Da zwischen  $U_n$  und  $V_n$  noch eine Relation frei wählbar ist, verlangen wir, dass der erstere Ausdruck für alle  $n$  verschwindet. Ersetzt man darin  $n$  durch  $n-1$ , so hat man

$$-p_n(U_n - U_{n-1}) + q_n(V_n - V_{n-1}) = 0,$$

$$-p_{n-1}(U_n - U_{n-1}) + q_{n-1}(V_n - V_{n-1}) = 2,$$

und hieraus, da die Koeffizientendeterminante gleich  $\pm 1$  ist,

$$U_n - U_{n-1} = (-1)^n 2q_n, \quad V_n - V_{n-1} = (-1)^n 2p_n.$$

Werden  $n = 0$  und  $n = 1$  eingesetzt, so entsteht

$$g_0 = -p_0 U_0 + q_0 V_0 = 0,$$

$$g_1 = -p_1(U_0 - 2q_1) + q_1(V_0 - 2p_1) = 1$$

und hieraus

$$U_0 = q_0, \quad V_0 = p_0,$$

also

$$U_n = q_0 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k q_k = \sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k q_k, \quad V_n = \sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k p_k,$$

$$g_n = -p_n \sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k q_k + q_n \sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k p_k. \quad (2)$$

Durch Multiplikation der Reihe

$$e^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \quad \text{mit} \quad e^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}$$

und Substitution  $l = m + k$  ergibt sich bei erlaubter Umordnung

$$e^{-2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+k)!}$$

mit der Massgabe, dass für negative  $k$  die innere Summe erst bei  $m = -k$  beginnt; sie hat für zwei einander entgegengesetzte Werte von  $k$  denselben Wert. Es ist also

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k p_k = e^{-2} = 0,135335\dots$$

Ähnlich

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k R_k = 2e^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} w_l.$$

Die letzte Reihe kann direkt summiert oder in eine noch bequemere Form <sup>1)</sup> transformiert werden, wodurch sich mühelos  $—0,356717\dots$  als Wert der linken Seite ergibt.

Nun lässt sich (2) folgendermassen schreiben

$$q_n e^{-2} - g_n = p_n \sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k q_k + 2q_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k p_k, \quad (n \geq 0). \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Auflage (1931), Aufgabe 116b.

Offenbar ist  $p_n \approx \frac{1}{n!}$  (asymptotisch gleich) für  $n \rightarrow \infty$  und  $p_n \leq \frac{6}{n!}$  für  $n \geq 5$ , da die Glieder von  $p_n$  rascher abnehmen als eine geometrische Reihe vom Quotienten  $\frac{1}{n+1}$ . Aus  $w_k \leq k$ ,  $w_k + w_{n+k} \leq 2(n+k)$  folgt

$$R_n \leq 2p_{n-1} \text{ für } n \geq 1, \text{ also } R_n \leq \frac{12}{5(n-1)!} \text{ für } n \geq 6.$$

Dem Betrage nach ergibt sich die alternierende Summe  $\sum_{k=-n}^{+n} (-1)^k R_k$ , wenn man von ihrem oben angegebenen Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  ausgeht, für  $n \geq 6$  als  $< 0,357 + 0,008 < \frac{2}{5}$ , da alle Glieder mit  $|k| > 6$  zusammen höchstens  $2 \cdot \frac{12}{5} \left( \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots \right) < \frac{1}{125}$  ausmachen.

Ferner liegt es auf der Hand, dass  $Q_n$  und daher auch  $q_n = Q_n - R_n$  asymptotisch gleich  $(-1)^{n-1} (n-1)!$  ist. Also wird  $(-1)^n p_n q_{n-1} \approx \frac{(n-2)!}{n!} \approx n^{-2}$  und  $(-1)^{n-1} p_{n-1} q_n \approx 1$ , so dass, wie bereits mehrfach benutzt wurde, die Konstante  $(-1)^n (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$  nicht von 1 verschieden sein kann.

Nun ist abzuschätzen, welchen Fehler  $\varrho_n$  man begeht, wenn in (3) durchwegs  $q_k$  durch  $Q_k$  ersetzt wird. Das Weglassen aller  $R_k$  bedeutet für  $n \geq 6$  auf der linken Seite den Fehler  $R_n e^{-2} \leq \frac{1}{(n-1)!}$ , rechts höchstens

$$p_n \frac{2}{5} + 2R_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{5k!} \leq \frac{12}{25n!} + \frac{24}{5(n-1)!} \frac{7}{5} < \frac{1}{(n-1)!}$$

und zusammen 
$$|\varrho_n| \leq \frac{5}{12(n-1)!}.$$

Jetzt nimmt (3) nach Multiplikation mit  $n$  und Addition von 2 die Gestalt an

$$nQ_n e^{-2} - (ng_n - 2) + n\varrho_n = 2 + 2np_n \sum_{k=1}^n (-1)^k Q_k + 2nQ_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k p_k \quad (4)$$

$$\text{mit } |n\varrho_n| \leq \frac{5n}{12(n-1)!} < \frac{1}{40}, \text{ für } n \geq 6.$$

Der Summand 2 ist wegen  $ng_n - 2 = (-1)^{n-1} A_n$  hinzugefügt worden.

Wird  $t_j = \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i}{i!}$  gesetzt, so ist  $t_0 = 1$ , weiterhin  $t_1 = 0$  – dies ist für die Abschätzungen von besonderer Bedeutung – und im übrigen  $\frac{1}{3} \leq t_j \leq \frac{1}{2}$ . Man findet

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k p_k &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!(k+m)!} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{m=0}^{l-n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \\ &= \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} t_{l-n-1} \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k Q_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{(k-l-1)!}{l!} = - \sum_{m=0}^{n-1} m! t_{n-m-1}.$$

Bezeichnet  $\vartheta$  jeweils ohne nähere Kennzeichnung eine Zahl zwischen 0 und 1, so ist, wenn die Reihe für  $p_n$  vom dritten Gliede an durch eine geometrische maximiert wird,  $p_n = \frac{1}{n!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{\vartheta}{2}}{(n+1)^2} \right)$ , ferner, weil die  $Q_n$ -Reihe alterniert und abnehmende Glieder hat,  $Q_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \left( 1 - \frac{\vartheta}{n-1} \right)$ , weiterhin auf Grund der vorausgegangenen Umformungen

$$- \sum_{k=1}^n (-1)^k Q_k = (n-1)! + \frac{\vartheta}{2} [(n-3)! + (n-3)(n-4)!] = (n-1)! \left[ 1 + \frac{\vartheta}{(n-1)(n-2)} \right]$$

und wegen  $t_2 = \frac{1}{2}$  nach näherer Überlegung

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k p_k = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{\frac{\vartheta}{2}}{(n+2)(n+3)} \right].$$

So erhält man als rechte Seite von (4)

$$2 - 2 \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{\vartheta}{2}}{(n+1)^2} \right) \left( 1 + \frac{\vartheta}{(n-1)(n-2)} \right) + \frac{2}{n+1} \left( 1 - \frac{\vartheta}{n-1} \right) \left( 1 + \frac{\frac{\vartheta}{2}}{(n+2)(n+3)} \right).$$

Hier heben sich alle von  $\vartheta$  freien Glieder weg. Nimmt man die verbleibenden sämtlich positiv und setzt zuletzt alle  $\vartheta = 1$ , so ergibt sich eine obere Schranke, die offenbar mit wachsendem  $n$  fällt. Für  $n = 6$  lautet sie

$$\left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{98} \right) \left( 1 + \frac{1}{20} \right) - 2 \left( 1 + \frac{1}{7} \right) \right] + \left[ \frac{2}{7} \left( 1 + \frac{1}{5} \right) \left( 1 + \frac{1}{144} \right) - \frac{2}{7} \right] = \frac{41}{210} < \frac{1}{5}.$$

Schliesslich ist noch abzuschätzen, was es ausmacht, wenn auf der linken Seite von (4)  $Q_n$  durch  $A'_n$  ersetzt wird. Es ist

$$Q_n - (-1)^{n-1} A'_n = \sum_k (-1)^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{k!},$$

summiert von  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  bis  $n-1$ .

Das ist eine alternierende Reihe mit abnehmenden Gliedern, deren erstes dem Betrage nach  $= \frac{2}{n}$  für gerade  $n$  bzw.  $\frac{4}{n^2-1}$  für ungerade  $n$ , also stets  $\leq \frac{2}{n}$  ist ( $n \geq 3$ ). Daraus folgt

$$|n(Q_n - (-1)^{n-1} A'_n) e^{-2}| \leq 2e^{-2} < \frac{11}{40}.$$

Setzt man schliesslich in (4) für  $ng_n - 2$  seinen Wert  $(-1)^{n-1} A_n$  ein, so ist endgültig

$$|A_n - nA'_n e^{-2}| < \frac{1}{40} + \frac{1}{5} + \frac{11}{40} = \frac{1}{2}, \quad \text{für } n \geq 6,$$

so dass  $A_n$  als nächste ganze Zahl zu  $nA'_n e^{-2}$  nachgewiesen ist, doch strebt die Differenz wegen des zuletzt erörterten Teiles nicht gegen Null.

Nach dem Bewiesenen ist  $A'_n$  die nächste ganze Zahl zu  $|Q_n|$ . Man wird erwarten, dass sich über das infinitäre Verhalten der Abweichung  $A_n - n|Q_n| e^{-2}$  bündigere Aussagen machen lassen. In der Tat zeigt sich, dass eine asymptotische Entwicklung der Form

$$(-1)^{n-1} A_n - nQ_n e^{-2} \approx 4n^{-2} + 28n^{-4} + 364n^{-6} + \dots \quad (5)$$

mit lauter positiven Koeffizienten existiert. Nach Zahlenrechnungen übertrifft schon für  $n \geq 6$  die linke Seite von (5) ihren auf der Hand liegenden Näherungswert  $4/(n^2-7)$  um weniger als 0,01.

Der Grund für die Existenz dieser Entwicklung und für das Auftreten von  $n^{-2}$  als Entwicklungsgrösse liegt in der spiegelbildlichen Struktur der rechten Seiten des Formelpaares

$$n! p_{n+l} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(1+n)(2+n)\dots(m+l+n)},$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} Q_{n-l} = \sum_{m=0}^{n-l-1} \frac{1}{m!(1-n)(2-n)\dots(m+l-n)},$$

in Verbindung mit der Tatsache, dass sich die Glieder auf der rechten Seite von (4) zu Termen  $n(p_{n+l} Q_n + Q_{n-l} p_n)$  zusammenfassen lassen;



bei jeder solchen Addition spiegelbildlicher Ausdrücke fallen in dem zulässigen Ansatz einer Entwicklung nach Potenzen von  $n^{-1}$  die ungeraden Potenzen heraus. Dieser Umstand hat mittelbar auch die früheren Abschätzungen gefördert.

### Literaturverzeichnis

- [1] *É. Lucas*: Théorie des nombres, Paris 1891, Band I, Nr. 123, S. 215 und 491 bis 495 (Note III).  
[2] *H. Dörrie*: Triumph der Mathematik, 5. Auflage, Würzburg 1958, S. 27 bis 33.  
Vergleiche auch *W. Ahrens*, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Auflage, Leipzig 1918, Band II, S. 73 bis 79.  
[3] *W. Schöbe*: Das Lucassche Ehepaarproblem, Mathematische Zeitschrift 48, 1943, S. 781 bis 784.

---

### Résumé

L'auteur montre que la fonction numérique qui apparaît dans le problème des couples de Lucas – problème classique d'analyse combinatoire – est égale, pour quatre couples au minimum, au nombre entier le plus proche de

$$n e^{-2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}.$$

### Summary

The author shows that the numerical function of the couple problem by Lucas, a classical combinatorial problem, results (with at least four couples) in the nearest entire number to

$$n e^{-2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}.$$

### Riassunto

L'autore mostra che la funzione numerica del problema dei coniugi di Lucas, problema classico di analisi combinatoria, è uguale, con almeno quattro coppie di coniugi, al numero intero più vicino a

$$n e^{-2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}.$$