Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 61 (1961)

Artikel: Risikotheoretische Grundlagen der Erfahrungstarifierung

Autor: Ammeter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966738

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Risikotheoretische Grundlagen der Erfahrungstarifierung

Von Hans Ammeter, Zürich

Prof. Dr. Hans Wyss zum 60. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung

Anhand risikotheoretischer Modelle wird eine Methode der Erfahrungstarifierung bei Kollektivversicherungen untersucht, die sich auf eine aus nicht individuellen Erfahrungen abgeleitete Grundprämie stützt und durch eine Prämienrückgewähr von der Form $G = \alpha' P' - \beta S$ an die individuelle Schadenerfahrung des einzelnen Kollektivs angepasst wird. Zunächst werden die Parameter α' und β in der Rückgewährsformel so festgelegt, dass der Erwartungswert der Prämienrückgewähr mit der verfügbaren Tarifmarge übereinstimmt. Ferner werden die Schwankungen der Prämienrückgewähr G sowie die Auswirkungen von Fehltarifierungen untersucht. Dies führt zu Optimalmethoden, bei denen die Prämienrückgewähr G nicht nur in bezug auf eine gegebene Null-Hypothese über die vorhandene Tarifmarge erwartungstreu ist, sondern gleichmässig erwartungstreu für bestimmte Bereiche von Gegenhypothesen.

I.

Einleitung

Problemstellung und grundlegende Annahmen

Unter Erfahrungstarifierung wird im folgenden eine Methode der Prämienfestsetzung im Versicherungswesen verstanden, welche ganz oder teilweise auf die individuellen Erfahrungen mit dem zu tarifierenden Risiko selbst abstellt. Die Herleitung eines Tarifs aus früheren Erfahrungen im betreffenden Versicherungszweig – z. B. die Aufstellung eines Lebensversicherungstarifs auf Grund einer Versichertensterbetafel – ist in diesem Sinne keine Erfahrungstarifierung. Hingegen ist das aus der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung bekannte Verfahren mit einer je nach dem individuellen Schadenverlauf abgestuften Rückvergütung eine Erfahrungstarifierung, weil die Prämie für die einzelne

Versicherung von den für sie fällig gewordenen Schadensummen abhängt. Wesentlich für die Erfahrungstarifierung ist somit die Berücksichtigung des eigenen, individuellen Schadenverlaufs.

Es liegt in der Natur der Sache, dass Erfahrungstarifierungen für einzelne Versicherungen nur selten benützt werden. Häufiger wird die Methode bei Kollektivversicherungen auf reiner Risikobasis ohne Sparvorgang, z.B. für Gruppen- oder Rückversicherungen, angewendet. Nach einer der einfachsten Erfahrungstarifierungen bei Risiko-Kollektivversicherungen wird die Kollektivprämie als gewogenes Mittel der im betreffenden Kollektiv in den letzten $r-1$ Jahren aufgetretenen Schadensätze bestimmt. Bezeichnet man mit S_i die Schadenbelastung im i-ten Versicherungsjahr und mit K_i die im gleichen Jahr versicherte Summe, nach der die Kollektivprämie bemessen wird, so gilt für den Erfahrungsprämien-Satz P_r die Formel

$$P_r = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{r-1}}{K_1 + K_2 + \ldots + K_{r-1}}. \tag{1a}$$

Der Erfahrungssatz P_r stellt die Nettoprämie dar. Von einer Berücksichtigung von Kosten wird hier und bei allen folgenden Betrachtungen einfachheitshalber abgesehen.

Die Prämienberechnung nach Formel (1a) bedeutet eine Erfahrungstarifierung reinsten Wassers. Sie bewirkt aber, dass im Grunde genommen vom Versicherer überhaupt keine Risikodeckung geboten wird, weil das versicherte Kollektiv alle seine Schäden schliesslich selbst deckt. Wenn man auch berücksichtigt, dass immerhin ein Ausgleich der Schadensätze geboten wird und gegebenenfalls eine Vorfinanzierung hoher Schadenbelastungen durch den Kollektivversicherer erfolgt, so ist es doch verständlich, dass das Verfahren am XVI. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker als «perfect nonsense treaty» glossiert worden ist.

Das «perfect non-sense-System» im Sinne von Formel (1a) führt jedoch zu einer wirklichen Risikodeckung des Kollektivversicherers, wenn der Kollektivsatz P_r nach oben und nach unten begrenzt wird; das heisst man setzt

$$P_r = P_{\min} \leqq \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{r-1}}{K_1 + K_2 + \ldots + K_{r-1}} \leqq P_{\max}. \tag{1b}$$

Der Kollektivversicherer übernimmt dann das Risiko eines über das vereinbarte Maximum hinausgehenden Schadensatzes; dieses Risiko wird durch die selbst bei schadenfreiem Verlauf fällige Minimalprämie abgegolten. Diese Art der Risikodeckung nennt man eine Überschadendeckung. Eine Erfahrungstarifierung, welche sich auf einen gleitenden Durchschnitt der individuellen Schadensätze mit nach oben und unten begrenzter Prämie stützt, ist somit einer Überschadendeckung äquivalent.

Die Technik des Verfahrens wird durchsichtiger, wenn es formell in folgender Weise aufgezogen wird: Man erhebt zunächst eine reichlich bemessene Kollektivprämie nach einem aus nicht individuellen Erfahrungen abgeleiteten Tarif, der mit einem Sicherheitsfaktor $1 + \lambda$ arbeitet. Von dieser erhöhten Nettoprämie $P' = P(1 + \lambda)$ kommt eine Prämienrückgewähr

$$G = k' P' - S \tag{2a}$$

in Abzug, in der S den gewogenen Schadendurchschnitt der in Betracht gezogenen Versicherungsjahre bedeutet. Ferner wird festgesetzt, dass die Prämienrückgewähr nach Formel (2a) nie negativ werden darf, d.h. für $S \geqq k'P'$ ist $G = 0$. Für die nach Abzug der Prämienrückgewähr verbleibende Prämienbelastung des versicherten Kollektivs gilt somit die Formel

$$P' - G = (1 - k') P' + S, \tag{2b}$$

worin S mit höchstens $k'P'$ eingestellt wird.

Es zeigt sich somit, dass bei schadenfreiem Verlauf ($S = 0$) eine minimale Nettobelastung von $(1 - k')P'$ fällig wird. Anderseits kann die Nettobelastung des versicherten Kollektivs nicht grösser ausfallen als die Basisprämie P'. Diese maximale Belastung gilt für den Fall, dass $S \geqq k'P'$ wird. Für $0 \leqq S \leqq k'P'$ ergibt sich eine Nettobelastung zwischen den genannten Grenzen. Damit ist aber gezeigt, dass die Nettobelastung des versicherten Kollektivs bei Anwendung einer Tarifierung, die sich auf die Rückgewährsformel (2a) stützt, im wesentlichen identisch ist mit dem Verfahren nach Formel (1b), die mit einem gleitenden Durchschnitt der Schadensätze arbeitet. Das versicherte Kollektiv deckt seine normalen Schäden bis zum Selbstbehalt $k'P'$, oder, anders ausgedrückt, die Tarifierung der normalen Schäden erfolgt nach dem individuellen Schadenverlauf des versicherten Kollektivs.

Für die Überschäden bleiben dagegen die nicht individuellen Erfahrungen des Kollektivversicherers massgebend.

Die Rückgewährsformel (2a) kann verallgemeinert werden in

$$G = \alpha' P' - \beta S, \tag{3a}$$

die sich durch Ausklammern von β auch in der Form

$$G = \beta \left(\frac{\alpha'}{\beta} P' - S \right) \tag{3a'}$$

schreiben lässt, in welcher die Klammer rechts die Rückgewährsformel (2a) mit $k' = \frac{\alpha'}{\beta}$ enthält. Die Nettobelastung des versicherten Kollektivs stellt sich bei Anwendung der verallgemeinerten Formel (3a) auf

$$P' - G = (1 - \alpha') P' + \beta S, \tag{3b}$$

worin der Schaden S mit höchstens $S = \frac{\alpha'}{\beta} P'$ eingesetzt wird. Formel (3b) lässt sich auch schreiben

$$P' - G = (1 - \beta) P' + \beta \left[\left(1 - \frac{\alpha'}{\beta} \right) P' + S \right],$$

woraus sich ergibt, dass die Anwendung der verallgemeinerten Rückgewährsformel (3a) zu einer kombinierten Risikodeckung führt, die sich aus einer gewöhnlichen Deckung mit dem Gewicht $(1 - \beta)$ und einer Überschadendeckung mit dem Gewicht β zusammensetzt.

Die Methode der Erfahrungstarifierung bietet oft beiden Versicherungsparteien Vorteile. Der Kollektivversicherer kann mit einem verhältnismässig grob abgestuften Basis-Tarif arbeiten, der sich durch die Prämienrückgewähr (Formel (2a) oder (3a)) automatisch und weitgehend den individuellen Risikoverhältnissen des versicherten Kollektivs, sogar mit Einschluss von subjektiven Komponenten, anpasst. Das versicherte Kollektiv hat anderseits die Gewähr, dass die eigenen Erfahrungen die Tarifierung massgebend beeinflussen, wodurch eine Übertarifierung auf Grund unzutreffender Risikoeinschätzung weitgehend ausgeschlossen erscheint. Mit der Erfahrungstarifierung ist aber stets der Nachteil verknüpft, dass das versicherte Kollektiv einen Selbstbehalt übernimmt und dass es deshalb rein zufällige Schwankungen zum Teil selbst tragen muss.

Die nachstehenden Untersuchungen stützen sich auf die grundlegende Annahme, dass der in den Formeln (1) bis (3) auftretende Schaden S eine zufällige Variable ist, die den aus der kollektiven Risikotheorie bekannten Modell-Verteilungen folgt. Nach dem einfachsten Modell ist das Verteilungsgesetz des Schadens S durch die verallgemeinerte Poisson-Verteilung

$$f(S) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}\, s^{*r}(S) \tag{4}$$

gegeben. In dieser Formel bedeutet

t die erwartete Schadenzahl und

$s(S)$ die Verteilung der fälligen Schadensumme aus einem Schaden; $s^{*r}(S)$ entspricht der r-ten Faltungspotenz von $s(S)$.

Die Formel (4) stützt sich auf den homogenen stochastischen Risikoprozess. Muss Wahrscheinlichkeitsansteckung, schwankenden Schadenswahrscheinlichkeiten, dem Kumulrisiko und anderen störenden Einflüssen Rechnung getragen werden, so empfiehlt es sich, an Stelle von (4) mit der verallgemeinerten negativen Binomial-Verteilung

$$f(S) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{t}{t+h}\right)^r \left(\frac{h}{t+h}\right)^h s^{*r}(S) \tag{5}$$

zu rechnen, in der h einen Schwankungsparameter bedeutet, der um so niedriger angesetzt werden muss, je unstabiler das Risiko ist. Für $h \to \infty$ geht die Verteilung (5) in die einfachere Form (4) über.

Mittelwert und Varianz der Verteilungen (4) und (5) sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

Mittelwert: $P = tS_1$ (für beide Verteilungen)

Varianz:	Verteilung (4)	Verteilung (5)
$\sigma^2(S) =$	tS_2	$tS_2 + \frac{t^2}{h} S_1^2$.

In diesen Formeln bedeuten S_1 und S_2 die beiden ersten Momente um Null der Schadensummenverteilung $s(S)$. Wählt man die mittlere Schadensumme S_1 zur Rechnungseinheit, so wird der erwartete Schaden

P (= Bedarfsrisikoprämie) gleich gross wie die erwartete Schadenzahl t. Bezeichnet man ferner die entsprechende Summenvarianz mit σ^2, so erhält man

$$S_2 = S_1^2(1+\sigma^2).$$

Es lässt sich zeigen, dass der standardisierte Schaden

$$z = \frac{S-P}{\sigma(S)} \begin{cases} \dfrac{S-t}{\sqrt{t(1+\sigma^2)}} \\[2ex] \dfrac{S-t}{\sqrt{t\left(1+\sigma^2+\dfrac{t}{h}\right)}} \end{cases}$$

für grosse t gegen die Normalverteilung

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{6}$$

mit dem Mittelwert Null und der Streuung Eins strebt. Die Grenzverteilung (6) kann oft als Näherung an Stelle der Verteilungen (4) und (5) benützt werden.

Auf Grund dieser Modell-Verteilungen können die Auswirkungen der geschilderten Erfahrungstarifierungen risikotheoretisch untersucht werden. Zunächst gelingt es, sinnvolle Festsetzungen über die in den Formeln (2) und (3) auftretenden Parameter k', α' und β zu treffen, oder, mit anderen Worten, das Tarifierungsproblem der Rückgewährsformeln (2) und (3) zu lösen. In diesem Zusammenhang interessieren auch die Folgen allfälliger Fehltarifierungen der Nettoprämie P' sowohl vom Standpunkt des Kollektivversicherers als auch vom Standpunkt des versicherten Kollektivs aus, insbesondere weil die Befürchtung einer Fehltarifierung letzten Endes das Leitmotiv für die Methode der Erfahrungstarifierung ist. Weitere Untersuchungen befassen sich mit den Schwankungen der Prämienrückgewähr G und den Massnahmen, diese in annehmbaren Grenzen zu halten. Die hergeleiteten Ergebnisse gestatten es schliesslich, optimale Erfahrungstarifierungen zu umschreiben und numerisch festzulegen, die je nach den konkreten Risikoverhältnissen und nach bestimmten Gesichtspunkten gestaltet werden können.

II.

Das Tarifierungsproblem der Rückgewährsformel

Bei der praktischen Anwendung der Erfahrungstarifierung im Sinne der Formeln (2) oder (3) sind die auftretenden Parameter k', α' und β unter Berücksichtigung der risikotheoretischen Eigenschaften des zu versichernden Kollektivs passend festzusetzen, oder, mit anderen Worten, man stösst auf das Tarifierungsproblem der Rückgewährsformel. Dieses Problem wurde u.a. in früheren Arbeiten des Verfassers [1] [2] [3] [1]) und auch im bekannten Lehrbuch von Prof. Saxer [5] angeschnitten. Letzterer teilt die hier denkbaren Tarifierungsmethoden treffend in zwei Kategorien ein, nämlich in

a) die natürliche Methode,

b) die «vorsichtigen» Methoden.

Nach der natürlichen Methode werden die genannten Parameter so bestimmt, dass die Prämienrückgewähr G im Erwartungswert äquivalent ist der in der erhöhten Nettoprämie P' enthaltenen Tarifmarge λP. Bei den «vorsichtigen» Methoden wird überdies eine angemessene Sicherheitsspanne zugunsten des Kollektivversicherers eingerechnet. In der Arbeit [1] werden geeignete Methoden für die Bemessung dieser Sicherheitsspanne entwickelt. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfachheit halber von der Einrechnung solcher Margen abgesehen, d.h. es wird nur die natürliche Tarifierungsmethode berücksichtigt.

Die nachstehenden Ableitungen stützen sich auf die verallgemeinerte Rückgewährsformel (3a). Die Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf den in der Formel (3a) enthaltenen Spezialfall der Formel (2a) übertragen, indem man $\beta = 1$ setzt.

Die Rückgewähr G als Funktion des Schadens S sei mit $G(S)$ bezeichnet. Der Erwartungswert $E(G)$ der Prämienrückgewähr (3a) ist dann durch die Beziehung

$$E(G) = \int_0^{\frac{\alpha'}{\beta} P'} G(S)\, f(S)\, dS \tag{7a}$$

---

[1]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

gegeben. Nach der natürlichen Methode muss der Erwartungswert (7a) gleich gross sein wie die vorhandene Tarifmarge λP, d.h. die Parameter α' und β sind aus dem Ansatz

$$E(G) = \lambda P \tag{7b}$$

zu bestimmen. Werden die Parameter α' und β in dieser Weise ermittelt, so sagt man, die Prämienrückgewähr G sei in bezug auf die angenommene Tarifmarge λP erwartungstreu.

Im allgemeinen ist es nicht möglich, die Parameter α' und β in expliziter Form darzustellen. Diese Parameter lassen sich jedoch stets näherungsweise berechnen, indem man aus einer Reihe von versuchsweise angenommenen Werten die entsprechenden Erwartungswerte (7a) ausrechnet und nachher durch inverse Interpolation oder graphisch diejenigen Parameter ermittelt, welche der Bedingung (7b) genügen. Für kleinere Kollektivversicherungsbestände kann der Erwartungswert (7a) exakt nach Massgabe der Verteilungen (4) oder (5) bestimmt werden. Bei grösseren Beständen würde die Berechnung zu zeitraubend. In diesen Fällen bedient man sich mit Vorteil der Näherungsmethode von Esscher [4], die u.a. in der Arbeit [1] auf die Berechnung von Erwartungswerten von der Form (7a) verallgemeinert worden ist.

Eine Parameterdarstellung in expliziter Form ist möglich, wenn man von der Normalverteilung (6) ausgeht. Für den Schaden S setzt man dann zweckmässig

$$S = tS_1 + zS_1 \sqrt{t(1+\sigma^2)}\,,$$

worin σ^2 bei Annahme der negativen Binomial-Verteilung (5) passend zu interpretieren wäre. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $S_1 = 1$ setzen und die Abkürzungen

$$\bar{t} = \frac{t}{1+\sigma^2}\,,$$

$$a = \sqrt{\bar{t}}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \quad \text{mit}$$

$$\alpha = \alpha'(1+\lambda)$$

einführen.

An Stelle von $G(S)$ tritt dann die Grösse

$$G(z) = \frac{\beta t}{\sqrt{t}}(a-z). \tag{8}$$

Die Formel (8) führt für

$$0 < S < \frac{\alpha'}{\beta} P'$$

oder, standardisiert, für

$$-\sqrt{t} < z < a$$

zu positiven Schadensummen und Prämienrückgewähren. Es empfiehlt sich, den Bereich

$$z \leqq -\sqrt{t}$$

dem schadenfreien Verlauf mit einer Prämienrückgewähr $\alpha' P' = \alpha t$ zuzuordnen. Für $z \geqq a$ ist $G \equiv 0$.

Für den Erwartungswert $E(G)$ ergibt sich nunmehr

$$E(G) = \alpha t \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} \varphi(z)\, dz + \frac{\beta t}{\sqrt{t}} \int_{-\sqrt{t}}^{a} (a-z)\, \varphi(z)\, dz.$$

Unter Benützung der Abkürzungen

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\, dz$$

und

$$\psi(x) = x\, \Phi(x) + \varphi(x)$$

erhält man nach einigen einfachen Umformungen

$$E(G) = \frac{\beta t}{\sqrt{t}} \{\psi(a) - \psi(-\sqrt{t})\} \tag{9a}$$

$$= \frac{\alpha t}{a + \sqrt{t}} \{\psi(a) - \psi(-\sqrt{t})\}, \tag{9b}$$

aus denen sich die gesuchten Parameter $\alpha = \alpha'(1+\lambda)$ und β aus der Bedingung (7b) wie folgt ergeben:

$$\alpha = \frac{(a+\sqrt{\bar{t}})\,\lambda}{\psi(a)-\psi(-\sqrt{\bar{t}})}, \tag{10a}$$

$$\beta = \frac{\lambda\sqrt{\bar{t}}}{\psi(a)-\psi(-\sqrt{\bar{t}})}. \tag{10b}$$

Bemerkenswert ist, dass die Parameter α und β nicht von der erwarteten Schadenzahl t, sondern von der fiktiven Schadenzahl $\bar{t}$ abhängen, welche die Summenstreuung mitberücksichtigt und nur bei homogenen Schadensummen ($\sigma^2 = 0$) mit der erwarteten Zahl t übereinstimmt, mit zunehmender Summenstreuung aber immer mehr hinter t zurückbleibt. Diese Eigenschaft bedeutet, dass für die Tarifierung der Rückgewährsformel (3a) unter den getroffenen Annahmen wie mit homogenen Schadensummen gerechnet werden kann. Die Summenstreuung lässt sich indirekt durch die fiktive Schadenzahl $\bar{t}$ berücksichtigen.

Die in den Formeln (9) und (10) auftretende Funktion $\psi(x)$ strebt für grosse x gegen den Argumentwert x selbst. Wie aus der nachstehenden Tabelle 1 hervorgeht, darf schon für etwa $x > 2$ die Näherung $\psi(x) = x$ benützt werden. Für negative x strebt anderseits $\psi(x)$ gegen Null.

Tabelle 1

Einige Werte der Funktion $\psi(x)$

x	$\psi(x)$
— 3	0,000 382
— 2	0,008 49
— 1	0,083 32
0	0,398 94
+ 1	1,083 32
+ 2	2,008 49
+ 3	3,000 382
+ 4	4,000 006
+ 6	6,000 000

Für grosse Werte der fiktiven Schadenzahl $\bar{t}$ und des Hilfswertes a lassen sich demnach die Formeln (10) vereinfachen in

$$\alpha = \frac{(a + \sqrt{\bar{t}})\,\lambda}{a}, \tag{11a}$$

$$\beta = \frac{\lambda\sqrt{\bar{t}}}{a}. \tag{11b}$$

Bei der Berechnung der Parameterwerte α und β kann man von einem beliebigen Hilfswert a ausgehen. Daraus folgt, dass unendlich viele Wertepaare α' und β existieren, welche eine erwartungstreue Rückgewähr G in bezug auf die Tarifmarge λP ergeben. In der nachstehenden Tabelle 2 sind einige solche Wertepaare zusammengestellt, wobei von $\bar{t} = 10$ und $\lambda = 0{,}25$ ausgegangen wird.

Tabelle 2

Beispiele für Parameterwerte
mit erwartungstreuer Prämienrückgewähr
in bezug auf die Tarifmarge λP

a	α'	β
$-3{,}16\ (= -\sqrt{\bar{t}})$	255,428	—
— 3	192,045	4677,929
— 2	28,074	95,479
— 1	5,203	9,512
0	1,586	1,983
1	0,769	0,730
2	0,514	0,394
3	0,411	0,263
4	0,358	0,198
6	0,305	0,132
10	0,263	0,079
100	0,206	0,008
∞	0,200	0

Besonderes Interesse verdienen die nachstehenden Spezialfälle:

a) $a = -\sqrt{\bar{t}}$

Dieser Spezialfall würde auf $\beta = \infty$ führen, was – wie eine nähere Prüfung zeigt – eine besondere Rückgewährsformel ergibt, bei der nur bei schadenfreiem Verlauf eine Rückgewähr fällig wird. Im Beispiel würde wegen der sehr kleinen Wahrscheinlichkeit für einen schadenfreien Verlauf die 255fache Prämie rückvergütet.

b) $a = 0$

In diesem Fall wird $\alpha = \beta$. Für $a < 0$ ist stets $\alpha < \beta$, während für $a > 0$ stets $\alpha > \beta$ ausfällt.

c) $a = \lambda\sqrt{\bar{t}}$

Dieser Fall ergibt für hinreichend grosses a die Parameterwerte $\alpha' = \beta = 1$.

d) $a = \infty$

In diesem Grenzfall ist $\beta = 0$ und $\alpha' = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$, was einer Aufgabe des Grundprinzips der Erfahrungstarifierung gleichkommt, da der individuelle Schaden keine Rolle mehr spielt.

Die dargelegten Formeln, welche sich auf die Normalverteilung (6) stützen, erlauben eine exakte Parameterbestimmung und erleichtern die theoretischen Untersuchungen wesentlich. Es stellt sich jedoch die Frage, um wieviel sich die numerischen Resultate ändern, wenn an Stelle der Normalverteilung die den wirklichen Verhältnissen besser angepassten Verteilungen (4) oder (5) den Berechnungen zugrunde gelegt werden. Um dies abzuklären, werden die gleichen Beispiele wie in Tabelle 2 (in Kolonne A der Tabelle 3 übernommen) auch noch unter der Annahme einer Poisson-Verteilung (4) (Kol. B) und einer negativen Binomial-Verteilung (5) (Kol. C) unter der Voraussetzung homogener Schadensummen ausgewertet. Im letzteren Falle wird für den Schwankungsparameter $h = 16$ angenommen, was einer Grundstreuung der Schadenswahrscheinlichkeiten von 25 % entspricht. Die negative Binomial-Verteilung (5) wird ihrerseits durch eine Normalverteilung approximiert, welche in Mittelwert und Streuung mit der negativen Binomial-Verteilung übereinstimmt (Kol. A'). Um den Vergleich zu

erleichtern, wird der Parameter α' für alle vier Verteilungen stets einheitlich beibehalten, womit die durch die verschiedenen Verteilungen bedingten Unterschiede nur im Parameter β zum Ausdruck kommen.

Tabelle 3

Rückgewährsparameter α' und β für verschiedene Annahmen über die Verteilung des Schadens S

α'	β berechnet unter Annahme der Verteilung			
A B C A'	A	B	C	A'
28,074	95,479	75,131	107,443	1901,462
5,203	9,512	9,085	10,940	19,832
1,586	1,983	1,979	2,181	2,415
0,769	0,730	0,734	0,767	0,778
0,514	0,394	0,394	0,400	0,400
0,411	0,263	0,263	0,265	0,265
0,358	0,198	0,198	0,198	0,198
0,305	0,132	0,132	0,132	0,132
0,263	0,079	0,079	0,079	0,079
0,206	0,008	0,008	0,008	0,008
0,200	0	0	0	0

Ein Vergleich der in der Tabelle 3 ausgewiesenen Werte für β nach den verschiedenen in Betracht gezogenen Verteilungen gibt zu folgenden Bemerkungen Anlass:

Für nicht allzu grosse Werte des Faktors α' stimmen die zugehörigen β-Werte nach allen vier in Betracht gezogenen Verteilungen nahezu überein. Namhafte Unterschiede ergeben sich erst für hohe Werte des Faktors α', bei denen das Gewicht des fällig gewordenen Schadens verhältnismässig gross ist. Wie in Kapitel III gezeigt wird, führen jedoch hohe Faktorenwerte von α' und β zu unstabilen Prämienrückgewähren, bei denen ausserdem die Normalverteilung oft versagt, so dass ihnen keine grosse praktische Bedeutung zukommt. Man kann daher zusammenfassend feststellen, dass eine Approximation mit Hilfe

der Normalverteilung in überraschend vielen Fällen – insbesondere im Bereich der praktisch in Betracht kommenden Zone – zu numerisch durchaus brauchbaren Ergebnissen führt. Dies gilt auch für die Approximation der negativen Binomial-Verteilung durch die Normalverteilung (A').

III.

Schwankungen der Prämienrückgewähr

Die Erfahrungstarifierung weist den Nachteil auf, dass die Prämienrückgewähr G und damit auch die Nettobelastung des versicherten Kollektivs, je nach dem individuellen Schadenverlauf, Schwankungen unterworfen ist. Es ist daher notwendig, das Ausmass dieser Schwankungen näher zu untersuchen, wozu man zweckmässig die Streuung $\sigma^2(G)$ der als zufällige Variable aufgefassten Prämienrückgewähr G einführt. Dieses Schwankungsmass berechnet sich aus den Erwartungswerten der einfachen und der quadrierten Prämienrückgewähr G nach der Formel

$$\sigma(G) = \sqrt{E\{G^2\} - E^2\{G\}}\,. \tag{12}$$

Geht man von der Normalverteilung (6) aus, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} E(G^2) &= \alpha^2 t^2 \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} \varphi(z)\,dz + \frac{\beta^2 t^2}{t} \int_{-\sqrt{t}}^{a} (a-z)^2\,\varphi(z)\,dz \\ &= \frac{(\lambda t)^2 \left[\bar{\psi}(a) + \psi(-\sqrt{t}) - 2a\,\psi(-\sqrt{t}) - 2\Phi(-\sqrt{t})\right]}{\left[\psi(a) - \psi(-\sqrt{t})\right]^2}, \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung die Hilfsfunktion

$$\bar{\psi}(x) = x\,\psi(x) + \Phi(x)$$

eingeführt wurde. Schliesslich erhält man für die Varianz $\sigma^2(G)$ die Formel

$$\sigma^2(G) = (\lambda t)^2 \left\{ \frac{\bar{\psi}(a) + \bar{\psi}(-\sqrt{t}) - 2a\,\psi(-\sqrt{t}) - 2\Phi(-\sqrt{t})}{\left[\psi(a) - \psi(-\sqrt{t})\right]^2} - 1 \right\}. \tag{13}$$

Vernachlässigt man die gewöhnlich nicht ins Gewicht fallenden Glieder, welche von $-\sqrt{t}$ abhängen, so erhält man die einfachere Näherungsformel

$$\sigma^2(G) = \left(\frac{\lambda t}{\psi(a)}\right)^2 [\bar{\psi}(a) - \psi^2(a)], \tag{13'}$$

die für grosses a weiter vereinfacht werden kann in

$$\sigma^2(G) = \left(\frac{\lambda t}{a}\right)^2. \tag{13''}$$

In der nachstehenden Tabelle 4 sind die Streuungen der Prämienrückgewähr G für die in der Tabelle 2 zusammengestellten Parameterpaare α' und β angegeben.

Tabelle 4

Streuung $\sigma(G)$ der Prämienrückgewähr G als Funktion der Parameterwerte α' und β

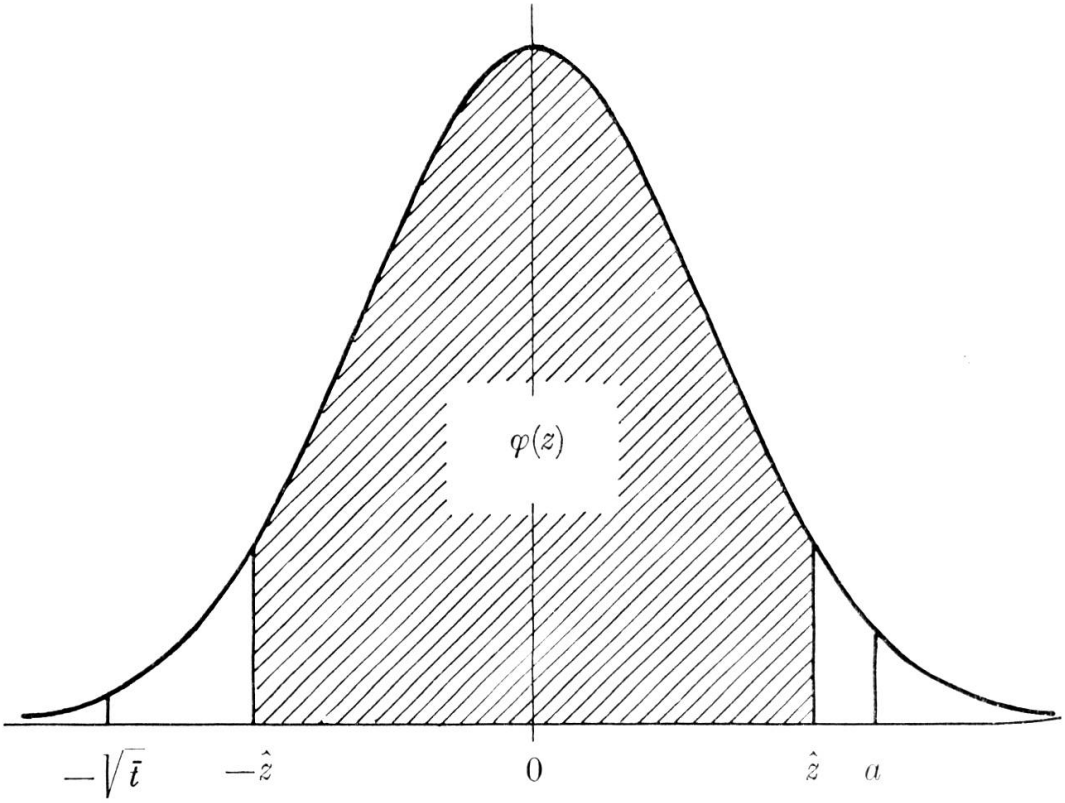
a	α'	β	$\sigma\{G\}$ in % der Bedarfsprämie t	$\sigma\{G\}$ in % der Streuung $\sqrt{t}$ des Gesamtschadens S
— 3,16	255,428	—	893	2824
— 3	192,045	4677,929	739	2337
— 2	28,074	95,479	216	683
— 1	5,203	9,512	78	247
0	1,586	1,983	37	117
1	0,769	0,730	20	63
2	0,514	0,394	12	38
3	0,411	0,263	8	26
4	0,358	0,198	6	20
6	0,305	0,132	4	13
10	0,263	0,079	2,5	8
100	0,206	0,008	0,2	0,6
∞	0,200	0,000	0,0	0

Der Tabelle 4 lässt sich entnehmen, dass die Streuung $\sigma(G)$ der Prämienrückgewähr mit wachsenden Parameterwerten α' und β stark ansteigt und schliesslich so gross wird, dass das versicherungstechnische Ausgleichsprinzip praktisch aufgehoben wird. Für Parameterwerte, welche einem negativen Wert von a zugeordnet sind, ist die Streuung der Prämienrückgewähr – wie die letzte Kolonne zeigt – sogar grösser als die Streuung des Gesamtschadens S, welche die Schwankungen charakterisiert, wenn für das versicherte Kollektiv das Bedarfsdeckungsverfahren (Umlageverfahren) angewendet würde.

Es stellt sich die Frage, ob eine obere Grenze für die Parameterwerte α' und β angegeben werden kann, welche gerade noch zu erträglichen Schwankungen der Prämienrückgewähr G führt. Zu einer solchen Grenze gelangt man beispielsweise auf Grund folgender Überlegung:

Die Verteilung der zufälligen Variablen G ist unter den getroffenen Annahmen eine gestutzte Normalverteilung (siehe Figur 1). Die

Zulässiger Schwankungsbereich der zufälligen Variablen G



Figur 1

Stutzung nach unten erfolgt bei der Abszisse $z = -\sqrt{t}$; nach oben ist die Verteilung bei $z = a$ gestutzt.

In der Figur 1 ist ein Bereich des standardisierten Schadens z schraffiert, welcher dem «normalen» Schwankungsbereich entspricht und durch die Bedingung

$$\text{Wahrscheinlichkeit für} \quad \{|z| \leqq \hat{z}\} = p$$

abgegrenzt ist. Dem «Normalbereich» sei beispielsweise eine Wahrscheinlichkeit $p = 90\,\%$ zugeordnet, was – wie aus der Tabelle des Wahrscheinlichkeitsintegrals $\Phi(z)$ leicht zu entnehmen ist – für $\hat{z} = 1{,}645$ ergäbe. Mit Hilfe von $\hat{z}$ kann man ohne weiteres die entsprechende Normalschwankungsbreite von G zu

$$\frac{\beta t}{\sqrt{t}}\,\hat{z}$$

festlegen und diese beispielsweise der Bedingung unterwerfen, dass sie nicht mehr als kt betragen soll. Würde man z.B. fordern, dass die Prämienrückgewähr G um höchstens $\pm\,25\,\%$ des erwarteten Gesamtschadens schwanken dürfe, so wäre $k = 0{,}25$ zu setzen. Man gelangt so zur Bedingung

$$\frac{\beta_{\max} t}{\sqrt{t}}\,\hat{z} = k t$$

oder

$$\beta_{\max} = c\sqrt{t} \quad \text{mit} \quad c = \frac{k}{\hat{z}}. \tag{14}$$

Für $p = 0{,}90$ und $k = 0{,}25$ ergibt sich $c \sim 0{,}15$, d.h., die gesuchte obere Grenze für β wäre durch

$$\beta_{\max} = 0{,}15\sqrt{t} \tag{14'}$$

gegeben.

Die dargelegte Überlegung, welche zu Formel (14) führt, lässt den Fall ausser acht, bei dem die Stutzabszissen $-\sqrt{t}$ und a innerhalb des Bereiches $\pm\,\hat{z}$ liegen. In solchen Fällen wäre jedoch der Schwankungsbereich von G durch die Stutzung zusätzlich eingeschränkt, so dass die Bedingung (14) ohnehin erfüllt wäre. In erster Näherung gelangt man somit durch die Formel (14) stets zu einem vernünftigen Höchstwert für β, der zu einer Prämienrückgewähr G führt, deren Schwankungen

mit dem Versicherungsprinzip gerade noch verträglich sind. Auf Grund der speziellen Annahme (14′) ergäben sich beispielsweise folgende Höchstwerte für β:

Tabelle 5

Höchstwerte für β, die zu einer mit dem Versicherungsprinzip verträglichen Schwankung der Prämienrückgewähr G führen

$\bar{t}$	β_{max}
1	0,15
5	0,34
10	0,47
20	0,67
50	1,06
100	1,50

Bemerkenswert ist, dass β_{max} von der fiktiven Schadenzahl $\bar{t}$ abhängt, welche sowohl den Umfang des Versicherungsbestandes, das Schadenniveau wie auch die Summenstreuung berücksichtigt. Abgesehen von sehr grossen Versicherungsbeständen, welche für die Erfahrungstarifierung ohnehin kaum mehr in Betracht fallen, liegen die brauchbaren Werte von β_{max} unter Eins.

IV.

Auswirkungen von Fehltarifierungen

Die Anwendung einer Erfahrungstarifierung wird gewöhnlich von der Befürchtung inspiriert, dass die angewendeten Tarifierungsgrundsätze für die erhöhte Nettoprämie P', welche sich auf objektive Risikomerkmale stützt, zu grob sind, um all den mannigfaltigen, in Wirklichkeit auftretenden Verhältnissen Rechnung tragen zu können. Es ist stets mit der Möglichkeit zu rechnen, dass die einzelnen Kollektive unrichtig tarifiert sind, insbesondere im Hinblick auf das subjektive Risiko, welches sich seiner Natur nach einer objektiven Messung entzieht.

Die Untersuchungen in den Kapiteln II und III gehen von der Annahme aus, dass die Verteilung des Gesamtschadens S bei einem bestimmten Kollektiv bekannt ist, was implizite auch die Kenntnis der Tarifmarge λP enthält. Wie wirkt sich aber die Methode der Erfahrungstarifierung aus, wenn die Schadenverhältnisse bei den einzelnen Kollektiven, auch bei gleichliegenden objektiven Risikomerkmalen, untereinander verschieden sind, so dass bei Anwendung einheitlicher Tarifierungsgrundsätze Fehltarifierungen vorkommen? Diese Fragestellung bedarf sowohl vom Standpunkt des Kollektivversicherers als auch vom Standpunkt des versicherten Kollektivs aus einer näheren Prüfung.

A. Standpunkt des Kollektivversicherers

Es empfiehlt sich, von folgender Modellbetrachtung auszugehen:

Die angewendeten Tarifierungsgrundsätze, welche auf die erwartete Schadenzahl t bei einem einzelnen Kollektiv führen, sind für das Gesamtportefeuille des Kollektivversicherers richtig, d.h., das Total aller erwarteten Schadenzahlen t ergibt den richtigen Erwartungswert

$$T = \sum\nolimits_{(i)} t_i$$

für das Gesamtportefeuille. Die Erwartungswerte t_i in den einzelnen Kollektiven sind jedoch im allgemeinen nicht richtig tarifiert; in einem bestimmten Kollektiv betrage beispielsweise die erwartete Schadenzahl in Wirklichkeit tq und weiche vom Erwartungswert t ab, der sich auf Grund der allgemeinen Tarifierungsgrundsätze ergibt. Nimmt man an, der Faktor q sei eine zufällige Variable, welche der Γ-Verteilung

$$dH(q) = \frac{h^h e^{-hq} q^{h-1} dq}{\Gamma(h)} \tag{15}$$

folgt, so geht die für das einzelne Kollektiv geltende Poisson-Verteilung

$$f(r) = \frac{e^{-tq} (tq)^r}{r!}$$

– wie in früheren Arbeiten des Verfassers, z.B. in [1], gezeigt wurde –

vom Standpunkt des Kollektivversicherers aus, der den Faktor q beim einzelnen Kollektiv nicht kennt, in die negative Binomial-Verteilung

$$f(r) = \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{t}{t+h}\right)^r \left(\frac{h}{t+h}\right)^h$$

über.

Der Kollektivversicherer, der mit Fehltarifierungen wegen inhomogener Schadenverhältnisse bei den einzelnen Kollektiven rechnen muss, ersetzt daher zweckmässig bei der Parameterbestimmung für die Prämienrückgewähr (3a) die Poisson-Verteilung (4) durch die negative Binomial-Verteilung (5). Aus der Tabelle 3 auf Seite 195 geht die Auswirkung dieser Massnahme auf den Parameter β (bei festem α') hervor. Wie der Vergleich der Kolonnen B (Poisson-Verteilung) und C (negative Binomial-Verteilung) zeigt, fällt der Parameter β auf Grund der negativen Binomial-Verteilung grösser aus als nach der Poisson-Verteilung. Nun bedeutet aber grösseres β eine kleinere Rückgewähr G.

Daraus lässt sich schliessen, dass die Nichtberücksichtigung des von Kollektiv zu Kollektiv verschiedenen Schadenniveaus dem Kollektivversicherer Verluste bringt, selbst wenn das Schadenniveau im Gesamtportefeuille als richtig tarifiert angenommen wird. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich leicht auf, wenn man bedenkt, dass die Prämienrückgewähr wohl bei den übertarifierten Kollektiven die Fehltarifierung weitgehend richtigzustellen vermag, nicht aber bei den untertarifierten Kollektiven, die dem Kollektivversicherer stets Verluste bringen. Daraus lässt sich schliessen, dass der Kollektivversicherer gut daran tut, stets mit einer gewissen Inhomogenität der Schadensätze von Kollektiv zu Kollektiv zu rechnen.

Obschon das geschilderte Modell seinerseits nur eine grobe Vereinfachung der Wirklichkeit bedeuten mag, so erlaubt es doch, in einfachster Weise durch eine sinnvolle Wahl des Schwankungsparameters h sich den wirklichen Verhältnissen zu nähern und Verluste des Kollektivversicherers zu vermeiden.

B. Standpunkt des versicherten Kollektivs

Vom Standpunkt des versicherten Kollektivs aus gesehen, geht die Verteilung der Schadenzahl r nicht in eine negative Binomial-Verteilung über, sondern bleibt, soweit ein homogener stochastischer

Risikoprozess ohne Wahrscheinlichkeitsansteckung usw. vorliegt, beim Poissonschen Typus, da nur die eigenen Schadenverhältnisse, nicht aber jene im Gesamtportefeuille des Kollektivversicherers von Bedeutung sind. Es stellt sich daher für das versicherte Kollektiv die Frage, wie sich eine Fehltarifierung der Parameter α' und β auf den Erwartungswert der Prämienrückgewähr G auswirkt. Zur Illustration wird zunächst folgendes Beispiel betrachtet:

Die Parameter α' und β werden auf Grund einer bestimmten Hypothese über die erwartete Schadenzahl t – sie sei als *Null-Hypothese* bezeichnet – bestimmt. Die erwartete Schadenzahl nach der Null-Hypothese sei mit t_0 bezeichnet. Das nachfolgende Beispiel stützt sich für die Null-Hypothese auf die gleichen Annahmen, wie sie für die Tabelle 2 auf Seite 193 gemacht wurden, d.h., es ist $t_0 = 10$ und $t_0' = (1+\lambda_0)$, $t_0 = 12{,}5$.

Die Verteilung der Schadenzahl r folgt jedoch in Wirklichkeit nicht der Null-Hypothese, sondern einer bestimmten *Gegenhypothese*, welche auf den Erwartungswert t_1 führt. Die vorhandene Tarifmarge beträgt dann in Wirklichkeit $M_{t_1} = t_0' - t_1$ und nicht $\lambda_0 t_0$. In der nachstehenden Tabelle 6 wird der Erwartungswert der Prämienrückgewähr G ausgewiesen, und zwar unter der Annahme, dass die Parameterwerte auf Grund der genannten Null-Hypothese ($t_0 = 10$) bestimmt wurden, dass aber die Gegenhypothesen $t_1 = 9$ oder $t_1 = 11$ zutreffen. Die Berechnung erfolgt auf Grund der Normalverteilung (6), welche mit der Poisson-Verteilung (4) in Mittelwert und Streuung übereinstimmt.

Aus der Tabelle 6 geht hervor, dass im grossen und ganzen der Erwartungswert der Prämienrückgewähr G sich um so mehr der wirklich vorhandenen Tarifmarge M_{t_1} nach der Gegenhypothese (siehe letzte Zeile) nähert, je grösser der Parameter β angenommen wird. Dieses Ergebnis ist durchaus plausibel, weil die Annäherung an die Gegenhypothese um so besser sein muss, je grösser das Gewicht β des beobachteten Schadens ist. Für ein bestimmtes β stimmt der Erwartungswert der Prämienrückgewähr G sogar genau sowohl nach der Null-Hypothese wie nach der Gegenhypothese mit der vorhandenen Tarifmarge M_{t_1} überein. Diese Koinzidenzpunkte ergeben sich

$$\text{bei} \quad t_1 = 9 \quad \text{für} \quad \beta \sim 2$$
$$t_1 = 11 \quad \text{für} \quad \beta \sim 80.$$

Tabelle 6

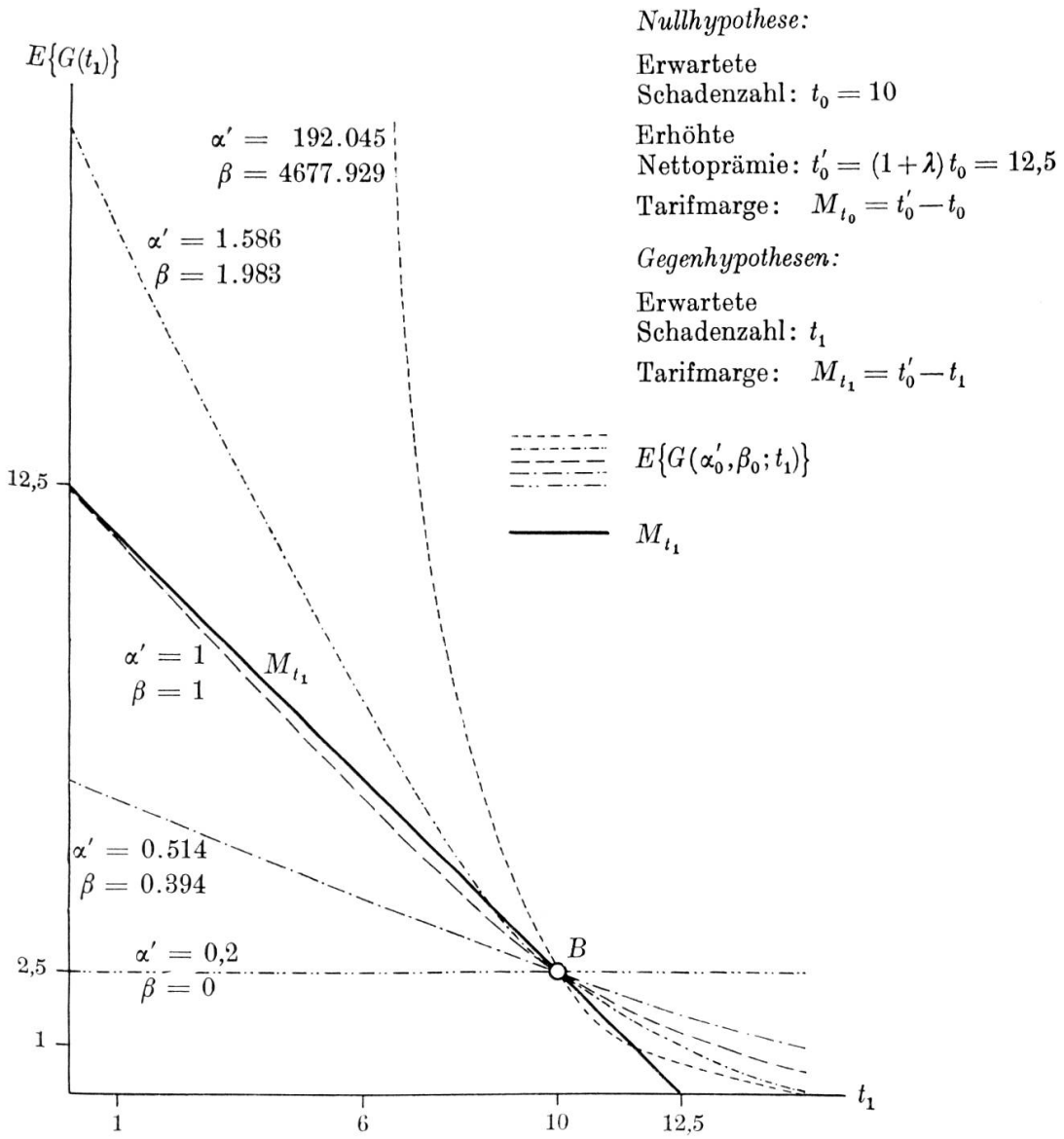
Parameterwerte		Erwartungswerte der Prämienrückgewähr auf Grund der		
α'	β	Null-Hypothese $t_0 = 10$	Gegenhypothese $t_1 = 9$	Gegenhypothese $t_1 = 11$
255,428	—	2,500	3,879	1,599
192,045	4677,929	2,500	4,280	1,458
28,074	95,479	2,500	4,244	1,474
5,203	9,512	2,500	3,923	1,575
1,586	1,983	2,500	3,488	1,749
0,769	0,730	2,500	3,123	1,957
0,514	0,394	2,500	2,882	2,121
0,411	0,263	2,500	2,770	2,246
0,358	0,198	2,500	2,693	2,297
0,305	0,132	2,500	2,625	2,361
0,263	0,079	2,500	2,576	2,418
0,206	0,008	2,500	2,503	2,487
0,200	0,000	2,500	2,500	2,500
Tarifmarge		2,500	3,500	1,500

Für β-Werte, welche über dem Koinzidenzpunkt liegen, entfernen sich die Erwartungswerte der Prämienrückgewähr G und die Tarifmarge M_{t_1} überraschenderweise wieder mehr und mehr; ebenso ergibt der Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ keine Übereinstimmung zwischen Marge und Erwartungswert (siehe erste Zeile).

Die Tabelle 6 beleuchtet die Auswirkungen von Fehltarifierungen der Rückgewährsformel nur für zwei bestimmte Gegenhypothesen. Es empfiehlt sich, die Betrachtung auf beliebige Gegenhypothesen auszudehnen. Einen anschaulichen Überblick über die allgemeinen Zusammenhänge vermittelt die Figur 2, in welcher in der Ordinate die Erwartungswerte $E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\}$ der Prämienrückgewähr $G(\alpha_0', \beta_0; t_1)$, deren Parameter α_0' und β_0 auf Grund der Null-Hypothese t_0 bestimmt sind, als Funktion der in der Abszisse aufgetragenen Gegenhypothese t_1 dargestellt sind. Die für bestimmte Parameterpaare α' und β gestrichelt

eingezeichneten Erwartungswertkurven beginnen für $t_1 = 0$ stets mit dem Anfangswert $E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1 = 0)\} = \alpha_0' t_0'$, sinken in der Folge mit wachsendem t_1 und nähern sich schliesslich asymptotisch der t_1-Achse. Einzig die unterste Erwartungswertkurve, die sich auf das Parameterpaar $\alpha' = 0{,}2$ und $\beta = 0$ stützt, verläuft horizontal, weil in diesem Grenzfall der beobachtete Schaden keine Rolle spielt, so dass gar keine

Erwartungswerte der Prämienrückgewähr G als Funktionen der erwarteten Schadenzahl t_1



Figur 2

Erfahrungstarifierung vorliegt. Alle Erwartungswertkurven schneiden sich im übrigen im Büschelpunkt B mit den Koordinaten $t_1 = 10$, $E\{G\} = 2{,}5$, weil die Parameterpaare α_0', β_0 stets auf Grund der Null-Hypothese $t_0 = 10$ mit der Tarifmarge $M_{t_0} = \lambda_0 t_0 = 2{,}5$ bestimmt sind.

Die dick ausgezogene Gerade $M_{t_1} = t_0' - t_1$ stellt die auf Grund der Gegenhypothese t_1 jeweils vorhandene Tarifmarge dar. Diese Margengerade enthält naturgemäss ebenfalls den Büschelpunkt B.

Schnittpunkte zwischen den Erwartungswertkurven und der Margengeraden bedeuten, dass der Erwartungswert der Prämienrückgewähr G mit der vorhandenen Marge genau übereinstimmt. Die Prämienrückgewähr ist dann für die entsprechende Gegenhypothese erwartungstreu. Die Figur 2 zeigt, dass für Parameterpaare mit $\alpha' < 1$ stets nur ein einziger Schnittpunkt auftritt, nämlich der Büschelpunkt B, welcher der Null-Hypothese entspricht. Daraus folgt, dass Parameterpaare mit $\alpha' < 1$ nur in bezug auf die Null-Hypothese erwartungstreue Prämienrückgewähren erzeugen können. Für $\alpha' \geqq 1$ ergibt sich jedoch neben dem Büschelpunkt B ein zweiter Schnittpunkt mit der Margengeraden M_{t_1}, und zwar liegt der Schnittpunkt – wenn man wachsende Werte des Parameters α' betrachtet – zunächst im Bereich $t_1 < t_0$ und später im Bereich $t_1 > t_0$. Parameterpaare mit $\alpha' \geqq 1$ sind daher im allgemeinen erwartungstreu in bezug auf zwei Hypothesen über die erwartete Schadenzahl t_1. Diese theoretisch bedeutungsvolle Eigenschaft wird leider durch die im Kapitel III geschilderten übermässigen Schwankungen bei Parameterwerten mit $\alpha' > 1$ etwas entwertet.

Aus der Figur 2 gehen zwei wichtige Spezialfälle hervor, die im folgenden näher erörtert seien:

1. Im Kapitel II wurde gezeigt, dass für hinreichend grosse Werte von $a = \lambda\sqrt{\bar{t}}$ die besondere Parameterkonstellation $\alpha' = \beta = 1$ resultiert; für $a \geqq 2$ ist diese besondere Konstellation praktisch hinreichend genau erreicht.

   Nach Figur 2 fällt für $\alpha' = \beta = 1$ die Erwartungswertkurve im ganzen Bereich $t_1 \leqq t_0$ nahezu mit der Margengeraden M_{t_1} zusammen. Die spezielle Rückgewährsformel

$$G = P' - S \tag{16}$$

ist somit für sämtliche im einseitig offenen Intervall $t_1 \leqq t_0$ enthaltenen Gegenhypothesen in erster Näherung *gleichmässig erwartungstreu.*

2. Für eine bestimmte Parameterkonstellation (α_0', β_0) fallen beide Schnittpunkte der Erwartungswertkurve mit der Margengeraden M_{t_1} zusammen, d.h., die Margengerade tangiert die betreffende Erwartungswertkurve im Büschelpunkt B. In diesem Spezialfall ist der Erwartungswert der Prämienrückgewähr nie kleiner als die Tarifmarge M_{t_1}, so dass bei beliebiger Gegenhypothese t_1 – mit Ausnahme der Null-Hypothese – stets eine Verlusterwartung für den Kollektivversicherer besteht.

Der geschilderte Spezialfall kann numerisch festgelegt werden aus der Bedingung

$$\frac{dE\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\}}{dt_1} = -1. \tag{17}$$

Gestützt auf die Formel (9a) und unter Benützung des Parameterwertes β_0 nach der Null-Hypothese gemäss Formel (10b) sowie unter Vernachlässigung des Gliedes $\psi(-\sqrt{t})$ ergibt sich der Hilfswert a_0 durch inverse Interpolation aus der Beziehung

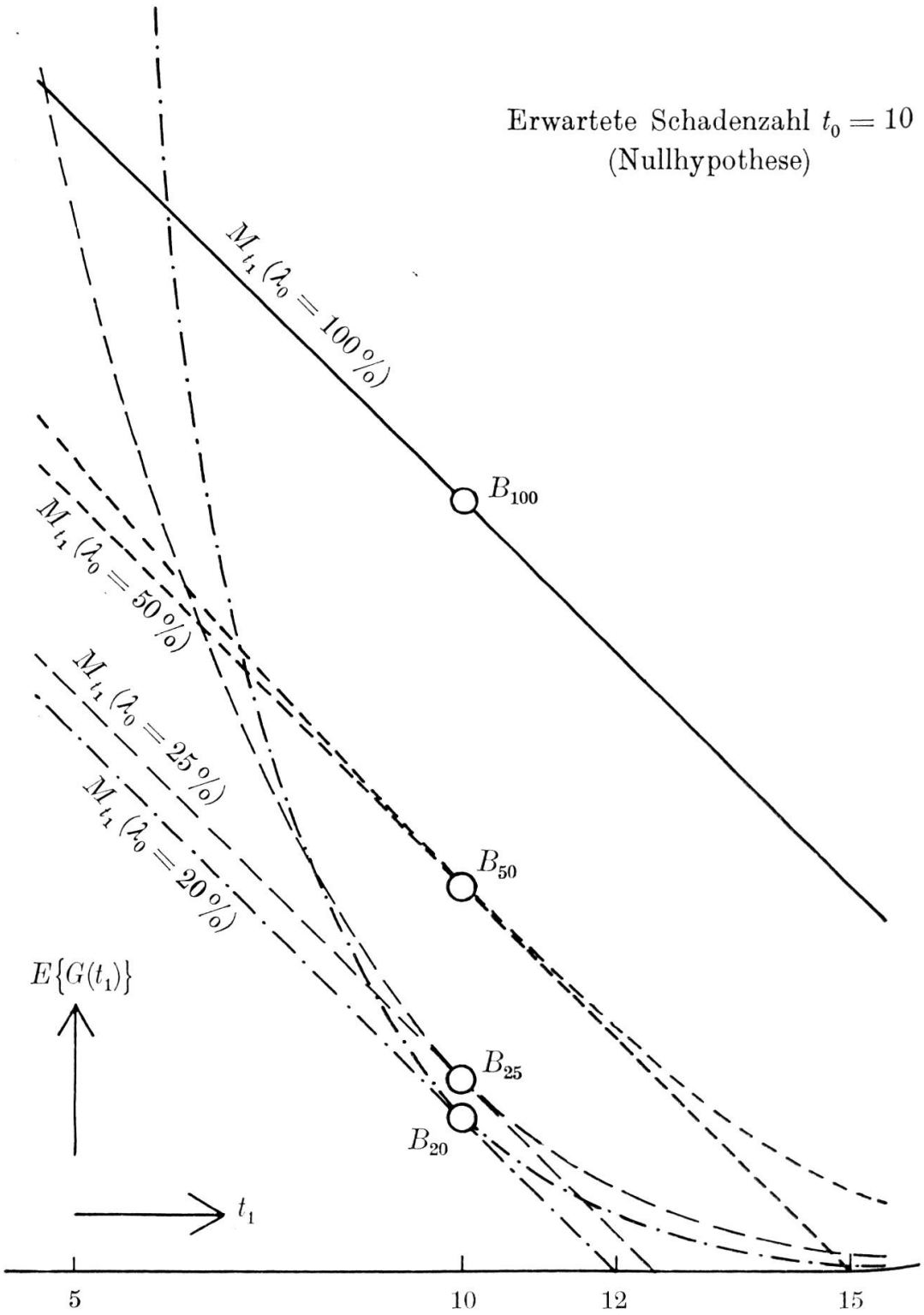
$$\frac{\varphi(a_0)}{\Phi(a_0)} = \frac{\lambda_0 \sqrt{t} - a_0}{1 + \frac{\lambda_0}{2}} \tag{17'}$$

die in Verbindung mit den Formeln (10) schliesslich auf die gesuchten Parameterwerte α_0' und β_0 führt. Im vorliegenden Beispiel $(t_0 = 10,\ t_0' = 12{,}5)$ ergibt sich: $a_0 = -0{,}462$; $\alpha_0' = 2{,}574$; $\beta_0 = 3{,}769$.

Es ist nützlich, die durch Formel (17′) gegebene Tangenten-Konstellation noch näher zu untersuchen für variierendes λ_0 und t_0. Zunächst sei der Fall mit festem t_0, aber veränderlichem λ_0 betrachtet.

In der Figur 3 sind für $t_0 = 10$ und für verschiedene Werte von λ_0 die Margengeraden M_{t_1} und die zugehörigen Erwartungswertkurven $E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\}$ eingezeichnet, welche im jeweiligen Büschelpunkt $B(t_0, \lambda_0 t_0)$ die Margengerade tangieren. Vorerst ist festzustellen, dass

Tangenten-Konstellation der Prämienrückgewähr G
je nach dem Niveau des Sicherheitszuschlages λ_0



Figur 3

eine Tangenten-Konstellation nur möglich ist, wenn λ_0 einen bestimmten Minimalwert erreicht; dieser ergibt sich, wenn für a_0 der kleinstmögliche Wert, das ist $a_0 = -\sqrt{\bar{t}_0}$, eingesetzt wird. Für diesen Minimalwert des Sicherheitszuschlags λ_0 gilt dann die Formel

$$\lambda_{\min} = \frac{\Theta_0 + \sqrt{\bar{t}_0}}{\sqrt{\bar{t}_0} - \frac{\Theta_0}{2}}, \tag{18}$$

worin zur Abkürzung der Hilfswert

$$\Theta_0 = \frac{\varphi(-\sqrt{\bar{t}_0})}{\Phi(-\sqrt{\bar{t}_0})}$$

eingeführt wird. Man erhält so beispielsweise folgende Minimalwerte für λ_0:

$$\bar{t}_0 = 10 \qquad \lambda_{\min} = 18{,}9\,\%$$
$$\bar{t}_0 = 100 \qquad \lambda_{\min} = 3{,}3\,\%.$$

Mit wachsendem $\bar{t}_0$ ergibt sich somit ein immer niedrigerer Wert für $\lambda_{\min}$.

Der Figur 3 lässt sich weiter entnehmen, dass für kleine Werte des Sicherheitszuschlags λ_0 die Erwartungswertkurven $E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\}$ vom jeweiligen Berührungspunkt mit der zugehörigen Margengeraden M_{t_1} steil ansteigen. Je grösser jedoch der Sicherheitszuschlag λ_0 angenommen wird, desto flacher verlaufen die zugehörigen Erwartungswertkurven. In der Figur 3 ergibt sich schon für $\lambda_0 = 50\,\%$ ein sehr enger Anschluss an die zugehörige Margengerade. Für $\lambda_0 = 100\,\%$ fällt die Margengerade innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit mit der Erwartungswertkurve zusammen. Diese Eigenschaft lässt sich auch erkennen, wenn man die aus Formel (17′) für verschiedene Werte von λ_0 sich ergebenden Parameterwerte verfolgt (siehe Tabelle 7).

Wachsende Sicherheitsmargen $\lambda_0 t_0$ führen nach Tabelle 7 und Formel (17′) zu steigenden Werten des Hilfswertes a_0. Die Funktion

$$\Theta(a) = \frac{\varphi(a)}{\Phi(a)},$$

welche auf der linken Seite von Formel (17′) auftritt, strebt jedoch mit wachsendem a gegen Null. Die rechte Seite von Formel (17′) kann

Tabelle 7

Parameterwerte mit Tangenten-Konstellation für verschiedene Werte des Sicherheitszuschlags λ_0

λ_0 %	a_0	α'	β
$t_0 = 10$:			
20 %	— 1,501	9,454	21,595
25 %	— 0,462	2,574	3,769
50 %	1,367	1,073	1,124
100 %	3,158	1,001	1,001
$t_0 = 100$:			
5 %	— 1,403	11,239	13,726
10 %	0,423	1,468	1,549
15 %	1,294	1,099	1,119

anderseits diesen Grenzwert nur erreichen, wenn der Zähler verschwindet, was auf die bereits bekannte Beziehung

$$a_0 = \lambda_0 \sqrt{t_0}$$

führt und – wie in Kapitel II (siehe Seite 194) erwähnt wurde – die besondere Parameter-Konstellation $\alpha' = \beta = 1$ bewirkt. Unter Ziffer 1 des vorliegenden Kapitels wurde für diese Parameter-Konstellation die gleichmässige Erwartungstreue im einseitig offenen Intervall $t_1 \leqq t_0$ festgestellt. Man kommt somit zum bemerkenswerten Ergebnis, dass auch die Tangenten-Konstellation der Parameterwerte (α_0', β_0) im Grenzfall grosser Sicherheitsmargen gegen eine gleichmässige Erwartungstreue strebt.

Mit Rücksicht auf die Tangierung der Margengeraden im Büschelpunkt B ergibt sich jedoch auch bei kleineren λ immer eine gleichmässige Erwartungstreue in einem lokalen Bereich um den Büschelpunkt herum, während der unter Ziffer 1 besprochene Fall zu einer gleichmässigen Erwartungstreue im einseitig offenen Intervall $t_1 \leqq t_0$ geführt hat.

Der untere Teil der Tabelle 7 illustriert die Verhältnisse bei grossen Werten von t_0. Man sieht, dass grundsätzlich die gleichen Tendenzen auftreten wie bei kleinen t_0-Werten, nur dass mit wachsendem λ_0 die Grenz-Konstellation $\alpha_0' = \beta_0 = 1$ wesentlich schneller erreicht wird als bei kleinem t_0.

V.

Optimale Erfahrungstarifierung

Die Anrechnung einer zweiparametrigen Prämienrückgewähr vom Typus (3a) gestattet es grundsätzlich, bei der Parameterbestimmung zwei Bedingungen zu stellen. Dies erlaubt, Verbindungen von Bedingungsgleichungen zu suchen, welche von einem gewissen Standpunkt aus optimale Lösungen ergeben. Je nach den vorliegenden technischen Verhältnissen werden dabei verschiedenartige Gesichtspunkte wegleitend sein. Im folgenden werden drei verschiedene Optimallösungen entwickelt.

1. Stabilität und Erwartungstreue

Im allgemeinen kann man feststellen, dass die Erwartungstreue gegenüber beliebigen Gegenhypothesen um so mehr gewährleistet ist, je grösser der Parameter β gewählt wird. Die Tabelle 6 auf Seite 204 und auch die Figur 2 auf Seite 205 zeigen zwar, dass ganz grosse β unter Umständen über das Ziel hinausschiessen. Grosse β-Werte führen aber – wie die Untersuchungen im Kapitel III ergeben haben – zu stark schwankenden Prämienrückgewähren, welche das versicherungstechnische Ausgleichsprinzip illusorisch machen können. Zu einem beide Gesichtspunkte – Stabilität und Erwartungstreue – befriedigenden Optimum gelangt man, wenn man von dem durch Formel (14) gegebenen Höchstwert für β ausgeht, der mit dem Versicherungsprinzip gerade noch verträglich ist. Bestimmt man unter Verwendung dieses β-Wertes nach der Null-Hypothese den zugehörigen Wert von α', der zu einer erwartungstreuen Prämienrückgewähr führt, so ergibt sich ein Parameterpaar (α', β), das dem gesuchten Optimum entspricht.

Das geschilderte Verfahren ist vor allem zu empfehlen für Kollektive von kleinerem Umfang, insbesondere bei verhältnismässig bescheidener Sicherheitsspanne $\lambda_0 P_0$. Für grössere Kollektive ist eine hinreichende Stabilität in der Regel zum voraus gewährleistet; man kann daher auf eine besondere Stabilitätsbedingung verzichten und eine möglichst ausgedehnte gleichmässige Erwartungstreue anstreben.

2. Gleichmässige Erwartungstreue im einseitig offenen Intervall $t_1 \leqq t_0$

Im Kapitel IV wurde anhand der Figur 2 gezeigt, dass im Spezialfall mit

$$a = \lambda \sqrt{\bar{t}}\,,$$

was näherungsweise auf die besondere Parameter-Konstellation

$$\alpha' = \beta = 1$$

führt, eine gleichmässig erwartungstreue Prämienrückgewähr im einseitig offenen Gegenhypothesen-Intervall $t_1 \leqq t_0$ auftritt. Das bedeutet, dass bei beliebiger Gegenhypothese im angegebenen Intervall stets näherungsweise die Bedingung

$$E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\} \sim t_0' - t_1$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist um so strenger erfüllt, je grösser der Hilfswert $a = \lambda \sqrt{\bar{t}}$ gewählt wird. Streng erfüllt ist sie, wenn sowohl $\psi(-\sqrt{\bar{t}}) = 0$ als auch $\psi(a) = a$ wäre. Praktisch ist das der Fall, wenn $\bar{t}$ grösser als 5 ist und der Hilfswert a mindestens den Wert 2 erreicht. Man kann das Gültigkeitsintervall $t_1 \leqq t_0$ für die gleichmässige Erwartungstreue auch über die Grenze t_0 hinaus steigern, indem man als Null-Hypothese mit einer erwarteten Schadenzahl $t_1 > t_0$ rechnet, wodurch indirekt die Sicherheitsmarge $\lambda_0 t_0$ erhöht wird. Damit ist eine gewissermassen ideale Erfahrungstarifierung gefunden, welche bei praktisch beliebiger Gegenhypothese gerecht funktioniert.

Man kann die für $\alpha' = \beta = 1$ geltende gleichmässige Erwartungstreue dazu benützen, den Sicherheitszuschlag λ_0 so zu bestimmen, dass die dafür geltenden Bedingungen erfüllt sind, d.h. dass $a_0 = \lambda_0 \sqrt{\bar{t}_0} \geqq 2$

ist. Auf diese Weise käme man beispielsweise zu folgenden minimalen Werten für den Sicherheitszuschlag λ_0:

Tabelle 8

Erwartete Schadenzahl t_0	Sicherheitszuschlag λ_0	
	$\sigma^2 = 0$	$\sigma^2 = 1$
1	2,00	2,83
10	0,63	0,89
50	0,28	0,40
100	0,20	0,28

Der Tabelle 8 lässt sich entnehmen, dass das Prinzip der gleichmässigen Erwartungstreue nur für verhältnismässig grosse Kollektive mit etwa $\bar{t} > 50$ zu einem praktisch brauchbaren Ergebnis führt. Für kleinere Versicherungsbestände müsste hingegen eine unplausibel hohe Sicherheitsspanne eingerechnet werden, welche praktisch nicht durchsetzbar wäre. Es erscheint daher für kleine Versicherungsbestände als besser, das Verfahren gemäss Ziffer 1 dieses Kapitels anzuwenden.

3. Gleichmässige Erwartungstreue in einem beidseitig begrenzten lokalen Intervall $t_0 \pm \Delta t_1$

Oft liegen die Verhältnisse so, dass zwar Unsicherheit über die wirkliche Erwartungszahl t_1 besteht, jedoch nur in einem lokal verhältnismässig eng umgrenzten Intervall in der Umgebung der Null-Hypothese t_0. Es wäre daher erwünscht, eine Parameter-Konstellation (α', β) zu suchen, bei welcher gleichmässige Erwartungstreue in der Nähe der Null-Hypothese gewährleistet wäre. Zu einer solchen gelangt man in folgender Weise:

Im Kapitel IV wurde auf den Spezialfall hingewiesen, bei dem die Erwartungswertkurve die Margengerade M_{t_1} im Büschelpunkt B mit den Koordinaten $(t_0, t_0' - t_0)$ tangiert. Bei dieser Tangenten-Konstellation nähert sich die Erwartungswertkurve in der Umgebung von t_0 zweifellos am stärksten der Margengeraden. Man könnte daher von

dieser Tangenten-Konstellation ausgehen und – um eine hinreichende Annäherung an die Margengerade zu gewährleisten – weiterhin $a_0 = 2$ postulieren. Man käme dann unter Berücksichtigung von $\frac{\varphi(2)}{\Phi(2)} \sim 0{,}055$ und von Formel (17′) zur Bestimmungsgleichung

$$\lambda_0 = \frac{2{,}055}{\sqrt{\bar{t}} - 0{,}0275},$$

die für grössere Werte von $\bar{t}$ praktisch auf die gleichen Werte für λ_0 führt, die in der Tabelle 8 ausgewiesen sind.

Es ist jedoch kaum notwendig, an den Sicherheitszuschlag λ_0 so hohe Anforderungen zu stellen, wenn Gegenhypothesen in einem lokal eng umgrenzten Intervall $t_0 \pm \Delta t_1$ in Betracht zu ziehen sind. Man könnte z.B. an Stelle des aus Tabelle 8 hervorgehenden Wertes $\lambda_0 = 20\,\%$ für $\bar{t}_0 = 100$ sich mit $\lambda_0 = 15\,\%$ begnügen und die Tangenten-Konstellation für die Rückgewährsparameter

$$\alpha' = 1{,}099 \quad \text{und} \quad \beta = 1{,}119$$

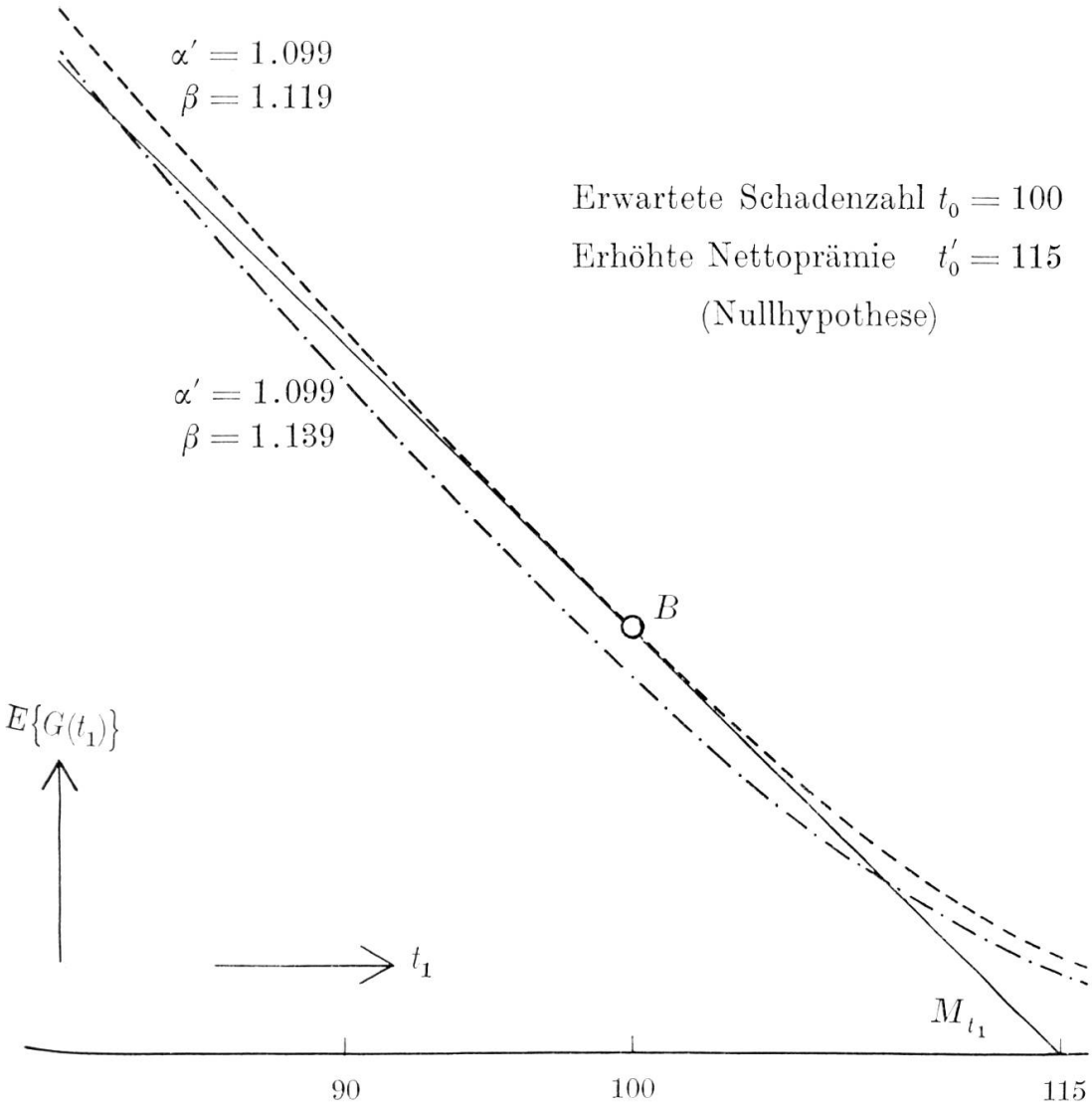
benützen. Leider läge bei dieser Lösung die Erwartungswertkurve $E\{G(\alpha_0', \beta_0; t_1)\}$ mit Ausnahme der Null-Hypothese stets über der Margengeraden, oder, mit anderen Worten, jede Gegenhypothese würde für den Kollektivversicherer zu Verlusten führen. Diesem Übelstand lässt sich abhelfen, indem man von der natürlichen Parameterbestimmung abweicht und eine kleine Sicherheitsmarge zugunsten des Kollektivversicherers einführt. Am zweckdienlichsten ist es, den Parameter β passend etwas zu erhöhen, in der Weise, dass eine gegenüber der Tangentialkurve etwas verschobene Erwartungswertkurve entsteht, die im gewünschten Intervall hinreichend nahe der Margengeraden verläuft. In der Figur 4 ist die Erwartungswertkurve für $t_0 = 100$ und $\lambda_0 = 15\,\%$ graphisch dargestellt, die sich für die Tangenten-Konstellation der Parameter ergibt; ausserdem ist die verschobene Kurve eingezeichnet, wenn der Parameter β um den Betrag 0,02 erhöht wird.

Die Figur 4 zeigt, dass auf die geschilderte Weise ein lokales Intervall 100 ± 15 entsteht, in dem eine für praktische Zwecke hinreichend gleichmässige Erwartungstreue auftritt. Ein Schönheitsfehler des Verfahrens liegt vielleicht darin, dass gerade für die Null-Hypothese inner-

halb des Intervalls die grösste Abweichung von der genauen Erwartungstreue auftritt. Anderseits ist der Vorteil zu beachten, dass mit einer weniger grossen Marge $\lambda_0 t_0$ gerechnet werden muss als bei dem unter Abschnitt V, 2, geschilderten Verfahren mit einem einseitig begrenzten, offenen Gültigkeitsintervall ($\lambda_0 = 15\,\%$ statt $20\,\%$).

Erwartungswertkurve der Prämienrückgewähr G
nach dem Optimalprinzip 3

(Gleichmässige Erwartungstreue in einem lokalen Intervall)



Figur 4

Schlussbemerkungen

1. Die in der vorliegenden Arbeit dargelegten Untersuchungen über die Erfahrungstarifierung haben zu einer Reihe von Ergebnissen geführt, welche ohne die benützten risikotheoretischen Modelle kaum erkennbar wären. Insbesondere sei an die zentrale Stellung der Parameter-Konstellation $\alpha' = \beta = 1$ erinnert, welche zu gleichmässig erwartungstreuen Prämienrückgewähren für ganze Klassen von Gegenhypothesen führt. Diese Ergebnisse lassen die Nützlichkeit der Risikotheorie einmal mehr erkennen.

2. Die wichtigsten Resultate der vorliegenden Untersuchungen stützen sich auf die Annahme einer Normalverteilung für die fälligen Schäden S. Diese besondere Annahme erleichtert die Untersuchungen wesentlich, wird aber anderseits den wirklichen Verhältnissen kaum immer gerecht. Trotzdem können die auf Grund der Normalverteilung gefundenen numerischen Werte sehr oft als brauchbare Näherungswerte benützt werden.

3. Die Vermutung liegt nahe, dass einige der wichtigsten Resultate dieser Arbeit, insbesondere die Eigenschaften der besonderen Parameter-Konstellation $\alpha' = \beta = 1$, nicht an die Voraussetzung einer Normalverteilung gebunden sind, sondern unter weit allgemeineren Voraussetzungen gelten. Die Frage bleibt offen, inwieweit diese Voraussetzungen erweitert werden dürfen.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Ammeter:* Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage. «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker», 57. Band, Heft 2.

[2] – A Rational Experience Rating Technique for Group Insurance on the Risk Premium Basis. XV. Internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, New York 1957.

[3] – Stop Loss Cover and Experience Rating. XVI. Internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, Brüssel 1960.

[4] *F. Esscher:* On the probability function in the collective theory of risk. «Skandinavisk Aktuarietidskrift» 1932.

[5] *W. Saxer:* Versicherungsmathematik, Zweiter Teil, 1958.

Résumé

Au moyen d'exemples tirés de la théorie du risque, l'auteur examine une méthode de tarification expérimentale des assurances collectives. Cette méthode s'appuie sur une prime de base découlant d'expériences non individuelles et, à l'aide d'un remboursement des primes de la forme $G = \alpha' P' - \beta S$, elle est adaptée à l'expérience individuelle des sinistres de chaque collectivité. Tout d'abord, l'auteur détermine les paramètres α' et β de la formule de remboursement des primes de telle façon que l'espérance mathématique de celui-ci concorde avec la marge de tarif disponible. Puis il examine les écarts du remboursement G ainsi que les répercussions de tarifications erronées. On arrive ainsi à des méthodes optimum, dans lesquelles le remboursement des primes G est conforme à l'espérance mathématique, non seulement si l'on fait une hypothèse nulle au sujet de la marge de tarif disponible, mais encore dans certains domaines d'hypothèses alternatives.

Summary

The theory of risk leads the author to the examination of a method of experience rating for group assurances with basic premiums derived from overall group observations. The premium refund formula $G = \alpha' P' - \beta S$ allows to adapt this method to the individual claims experience for every single group. The author determines firstly the parameters α' and β of the premium refund, such that the expectation of the latter coincides with the loadings of the rates. Furthermore, he examines the fluctuations of the premium refund G and the consequences of erroneous rating. These considerations lead to optimum methods where the premium refund G is unbiassed not only for a given null hypothesis, but also uniformely unbiassed for certain sets of alternatives.

Riassunto

Con l'aiuto di esempi basati sulla teoria del rischio, l'autore esamina un metodo di tarificazione sperimentale di assicurazioni collettive a un premio di base derivato da esperienze non individuali. Per mezzo di un rimborso dei premi della forma $G = \alpha' P' - \beta S$, questo metodo è adattato all'esperienza individuale dei sinistri di ogni singola collettività. In primo luogo l'autore fissa i parametri α' e β della formola del rimborso dei premi, affinchè la speranza matematica dello stesso concordi con il margine di tariffa disponibile. In seguito esamina le deviazioni del rimborso dei premi G, nonchè gli effetti di tarificazioni erronee. Queste considerazioni conducono all'esposizione di metodi ottimi per i quali il rimborso dei premi G non è solamente conforme alla speranza matematica in relazione a una data ipotesi nulla, ma è pure uniformemente conforme alla speranza matematica per determinati campi di ipotesi alternative.