Hyperbolische Interpolation mit Restglied

Autor(en): **Rufener, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **61 (1961)**

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966736

Hyperbolische Interpolation mit Restglied

Von E. Rufener, Zürich

Herrn Prof. Dr. H. Jecklin zum 60. Geburtstag

Zusammenfassung

Für die Ermittlung der Koeffizienten der einer Funktion $y = f(x)$ zugeordneten Interpolationshyperbel wird ein Algorithmus entwickelt; ausserdem wird eine formelmässige Darstellung für das Restglied bei hyperbolischer Interpolation hergeleitet.

1. Algorithmische Darstellung der Koeffizienten der Interpolationshyperbel

In der von *H. Jecklin* und Mitarbeitern entwickelten Methode der hyperbolischen Interpolation[1]) wird eine Funktion $y = f(x)$ durch eine Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten ersetzt. Da nach *Steiners* Hauptsatz über die projektive Erzeugung der Kegelschnitte die aus den unendlichfernen Berührpunkten der Asymptoten nach den Hyperbelpunkten gezogenen Strahlen zwei projektive Büschel bilden, lässt sich die Gleichung der Interpolationshyperbel in formal einfachster Gestalt durch

$$(y_0 y_1 y_2 y) = (x_0 x_1 x_2 x) \tag{1}$$

wiedergeben. (x_0/y_0), (x_1/y_1), (x_2/y_2) sind Punkte der zu ersetzenden Funktionskurve $y = f(x)$.

Durch (1) wird die linear gebrochene Funktion

$$y = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x} \tag{2}$$

mit drei wesentlichen Koeffizienten bestimmt. Wir stellen uns die Aufgabe, (2) derart zu modifizieren, dass als Koeffizienten symmetrische Funktionen der Interpolationsargumente auftreten, welche durch übersichtliche Rechnung bestimmbar sind.

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis am Schlusse dieser Arbeit.

Ist
$$y = f^*(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x} = \frac{g^*(x)}{l^*(x)}$$
die durch die Stützstellen x_0, x_1 und x_2 sowie die zu ihnen gehörenden Funktionswerte $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, 2)$ bestimmte Interpolationshyperbel, so gelten die Beziehungen
$$f(x_0) = \frac{g^*(x_0)}{l^*(x_0)}, \quad f(x_1) = \frac{g^*(x_1)}{l^*(x_1)}, \quad f(x_2) = \frac{g^*(x_2)}{l^*(x_2)}$$
oder
$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 &= (b_0 + b_1 x_0)\, f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 &= (b_0 + b_1 x_1)\, f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 &= (b_0 + b_1 x_2)\, f(x_2) \end{aligned} \tag{3}$$
welche in Verbindung mit
$$a_0 + a_1 x = (b_0 + b_1 x)\, f^*(x)$$
die Elimination der Koeffizienten a_0, a_1, b_0 und b_1 ermöglichen:
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) & x_0 f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & x_1 f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) & x_2 f(x_2) \\ 1 & x & f(x) & x\, f(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Die in (4) gefundene Determinantenform der Interpolationshyperbel birgt die Möglichkeit einer übersichtlichen Darstellung ihrer Koeffizienten in sich. Erlaubtes Umformen der Determinante (4) führt zunächst auf
$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} & 1 & x_1 \\ \dfrac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)} & 1 & x_2 \\ \dfrac{x - x_0}{f^*(x) - f(x_0)} & 1 & x \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Definiert man die Grössen
$$A_1(x_1, x_0) = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}, \quad A_1(x_2, x_0) = \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)}, \tag{6}$$

so lässt sich (5) weiter auf

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x - x_0}{f^*(x) - f(x_0)} & x - x_1 \\ 1 & \dfrac{x_2 - x_1}{A_1(x_2,x_0) - A_1(x_1,x_0)} \end{vmatrix} = 0$$

reduzieren, woraus mit

$$A_2(x_2,x_1,x_0) = \frac{x_2 - x_1}{A_1(x_2,x_0) - A_1(x_1,x_0)}, \tag{7}$$

$$\boxed{f^*(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1(x_1,x_0) + \cfrac{x - x_1}{A_2(x_2,x_1,x_0)}}} \tag{8}$$

erhalten wird.

Nach (6) kann $A_1(x_1,x_0)$ trivialerweise als Quotient zweier Determinanten geschrieben werden:

$$A_1(x_1,x_0) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Um $A_2(x_2,x_1,x_0)$ in Determinantenform zu kleiden, beachte man, dass aus

$$f^*(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x} = f(x_0) = \cfrac{x - x_0}{A_1 + \cfrac{x - x_1}{A_2}}$$

$$a_1 = A_2(x_2,x_1,x_0) \quad \text{und} \quad b_1 = 1$$

folgt und löse hierauf das in a_0, a_1 und b_0 lineare System (3) nach a_1:

$$a_1 = A_2(x_2,x_1,x_0) = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0 f(x_0) \\ 1 & f(x_1) & x_1 f(x_1) \\ 1 & f(x_2) & x_2 f(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}. \tag{9'}$$

$A_1(x_1,x_0)$ und $A_2(x_2,x_1,x_0)$ sind mithin symmetrische Funktionen der Interpolationsargumente. (9) und (9′) vermitteln überdies einen Zusammenhang mit den durch

$$\gamma_0 f(x) = [x_0] = f(x_0)$$

$$\gamma_1 f(x) = [x_1,x_0] = \frac{[x_1]-[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}$$

$$\gamma_2 f(x) = [x_2,x_1,x_0] = \frac{[x_2,x_1]-[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}$$

definierten Steigungen [1]). Es ist nämlich

$$A_1(x_1,x_0) = \frac{1}{\gamma_1 f(x)} = \frac{1}{[x_1,x_0]},$$

$$A_2(x_2,x_1,x_0) = -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 f(x) & \gamma_1\, x f(x) \\ \gamma_2 f(x) & \gamma_2\, x f(x) \end{vmatrix}}{\gamma_2 f(x)} = -\frac{\begin{vmatrix} [x_1,x_0] & [x_1 f(x_1),\, x_0 f(x_0)] \\ [x_2,x_1,x_0] & [x_2 f(x_2),\, x_1 f(x_1),\, x_0 f(x_0)] \end{vmatrix}}{[x_2,x_1,x_0]}.$$

Im Sonderfall gleicher Argumentsintervalle $x_0 = x$, $x_1 = x+h$, $x_2 = x+2h$ ist wegen $\gamma_\nu f(x) = \dfrac{1}{\nu!}\,\dfrac{\Delta^\nu f(x)}{h^\nu}$

$$A_1(x+h,\,x) = \frac{h}{\Delta f(x)}, \quad A_2(x+2h,\,x+h,\,x) = -\frac{1}{h\,\Delta^2 f(x)} \begin{vmatrix} \Delta f(x) & \Delta\, x f(x) \\ \Delta^2 f(x) & \Delta^2\, x f(x) \end{vmatrix},$$

so dass sich für $h \to 0$ die Grenzwertrelationen

$$A_1(x,x) = \frac{1}{D f(x)} \quad \text{und} \quad A_2(x,x,x) = -\frac{1}{D^2 f(x)} \begin{vmatrix} D f(x) & D\, x f(x) \\ D^2 f(x) & D^2\, x f(x) \end{vmatrix} \qquad (10)$$

mit $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ abzeichnen.

---

[1]) Vgl. etwa *R. Zurmühl:* «Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker», Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg (1953), S. 174 ff.

2. Spezielle gleichseitige Interpolationshyperbeln mit achsenparallelen Asymptoten

a) Hyperbel durch (x_0/y_0), welche $y = f(x)$ in (x_1/y_1) berührt.

Ihre Gleichung ist durch

$$f^*(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1(x_1,x_0) + \cfrac{x - x_1}{A_2(x_1,x_1,x_0)}}$$

bestimmt; darin ist

$$A_2(x_1,x_1,x_0) = -\lim_{x_2 \to x_1} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0 f(x_0) \\ 1 & f(x_1) & x_1 f(x_1) \\ 1 & f(x_2) & x_2 f(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0 f(x_0) \\ 1 & f(x_1) & x_1 f(x_1) \\ 0 & D f(x_1) & D\, x_1 f(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 0 & 1 & D f(x_1) \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 f(x_0) & \gamma_1 x_0 f(x_0) \\ D\, f(x_1) & D\, x_1 f(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 f(x_0) \\ 1 & D\, f(x_1) \end{vmatrix}}.$$

b) Hyperbel, deren Krümmung mit $y = f(x)$ in (x_0/y_0) übereinstimmt.

Aus (8) erhält man für die cartesische Darstellung dieser «Krümmungshyperbel»

$$f^*(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1(x_0,x_0) + \cfrac{x - x_1}{A_2(x_0,x_0,x_0)}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x}.$$

Es ist

$$A_1(x_0,x_0) = \frac{1}{D f(x_0)};$$

aus

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 &= \beta_0 f(x_0) + \beta_1 x_0 f(x_0) \\ \alpha_1 &= \beta_0 D f(x_0) + \beta_1 D\, x_0 f(x_0) \\ 0 &= \beta_0 D^2 f(x_0) + \beta_1 D^2\, x_0 f(x_0) \end{aligned}$$

folgt unter Berücksichtigung von $\alpha_1 = A_2(x_0,x_0,x_0)$ und $\beta_1 = 1$

$$A_2(x_0,x_0,x_0) = -\frac{1}{D^2 f(x_0)} \begin{vmatrix} D f(x_0) & D\, x_0 f(x_0) \\ D^2 f(x_0) & D^2\, x_0 f(x_0) \end{vmatrix}$$

in Übereinstimmung mit (10).

3. Beispiele

a)
$$y = r^x = e^{\delta x}.$$

– *Interpolationshyperbel durch drei aequidistante Punkte.*

Zufolge
$$A_1(x+1,x) = \frac{r^{-x}}{r-1}, \quad A_1(x+2,x) = \frac{2r^{-x}}{r^2-1},$$
$$A_2(x+2,x+1,x) = -(r+1)\,r^x$$
ergibt sich:

Interpolationsstellen	*Interpolationshyperbel*
$0,\ 1,\ 2$	$f^*(x) = 1 + \cfrac{(r-1)\,x}{1 - \cfrac{(r+1)\,(x-1)}{r-1}}$
$\xi,\ \xi+1,\ \xi+2$	$f^*(x) = r^\xi \left[1 + \cfrac{(r-1)\,(x-\xi)}{1 - \cfrac{(r+1)\,(x-\xi-1)}{r-1}} \right]$

– *Interpolationshyperbel durch drei zusammenfallende Kurvenpunkte* (Krümmungshyperbel)
$$A_1(x,x) = \frac{1}{\delta e^{\delta x}}, \quad A_2(x,x,x) = -e^{\delta x}.$$

Interpolationsstelle	*Krümmungshyperbel*
0	$f^*(x) = 1 + \cfrac{\delta x}{1-\delta x}$
ξ	$f^*(x) = e^{\delta\xi} \left[1 + \cfrac{\delta\,(x-\xi)}{1-\delta\,(x-\xi)} \right]$

b)
$$\underline{\psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt,\ R(x) > 0.}$$

Da
$$\psi(x+1) - \psi(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x},$$
folgt
$$A_1(x+1,x) = x,\ A_1(x+2,x) = \frac{2\,x\,(x+1)}{2\,x+1}$$
und
$$A_2(x+2,x+1,x) = 2 + \frac{1}{x},$$

somit unter Berücksichtigung von

$$\psi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) dt = -\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) = -C$$

$$= -0.577\,215\ldots$$

für die zu den Stützstellen 1, 2 und 3 gehörende Interpolationshyperbel

$$f^*(x) = -C + \cfrac{x-1}{1+\cfrac{x-2}{3}}.$$

c)

$$\psi'(x) = -\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}}\,dt,\quad R(x) > 0.$$

$\psi'(x)$ erfüllt die Differenzengleichung

$$\psi'(x+1) - \psi'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

so dass für

$$A_1(x+1, x) = -x^2,\quad A_1(x+2, x) = -\frac{2x^2(x+1)^2}{x^2+(x+1)^2}$$

und

$$A_2(x+2, x+1, x) = -\left(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

erhalten wird. Da

$$\psi'(1) = -\int_0^\infty \frac{1}{1-e^{-t}}\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

hat die den Interpolationsstellen 1, 2 und 3 zugeordnete Hyperbel die Gleichung

$$f^*(x) = \frac{\pi^2}{6} - \cfrac{x-1}{1-\cfrac{x-2}{5}}.$$

4. Die Restgliedfunktion bei hyperbolischer Interpolation

Falls die hyperbolisch zu interpolierende Funktion $y = f(x)$ nicht selber gleichseitige Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten ist, weicht die Interpolationskurve $y = f^*(x)$ ausser in den Stützstellen x_0, x_1 und x_2 von ihr ab. Um eine Aussage über die Grösse dieser Abweichung in Abhängigkeit des Interpolationsargumentes x machen zu können, setzen wir voraus, dass $f(x)$ im Interpolationsintervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$, das x_0, x_1 und x_2 enthält, hinreichend regulär sei und eventuell vorhandene Pole nicht in x_0, x_1 oder x_2 fallen. Die zu approximierende Funktion $y = f(x)$ wird durch

$$f(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1(x_1,x_0) + \cfrac{x - x_1}{A_2(x_2,x_1,x_0) + \cfrac{x - x_2}{A(x;x_2,x_1,x_0)}}} = \frac{g(x)}{l(x)}$$

dargestellt.

$$f^*(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1(x_1,x_0) + \cfrac{x - x_1}{A_2(x_2,x_1,x_0)}} = \frac{g^*(x)}{l^*(x)}$$

ist Ersatzhyperbel; $l(x)$ und $l^*(x)$ sind in x linear.

Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten $\dfrac{z_{k-1}}{n_{k-1}}$ und $\dfrac{z_k}{n_k}$ des Kettenbruches

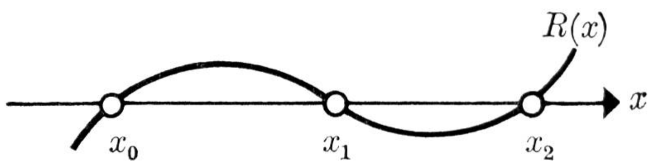
$$w = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 +}}}} \ \cdots$$

die Beziehung

$$\frac{z_k}{n_k} - \frac{z_{k-1}}{n_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}\, a_1\, a_2 \ldots a_k}{n_k\, n_{k-1}}$$

besteht, ergibt sich für die Restgliedfunktion (Fig. 1)

$$R(x) = f(x) - f^*(x)$$



die Relation

$$R(x) = \frac{g(x)}{l(x)} - \frac{g^*(x)}{l^*(x)} = \Lambda \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{l(x)l^*(x)},$$

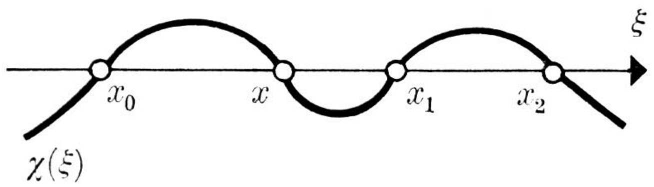
durch welche das Darstellungsproblem für $R(x)$ auf das Ermitteln der Konstanten Λ zurückgeführt wird.

Die Funktionen

$$\Phi(\xi) = \frac{g(\xi)}{l(\xi)} - \frac{g^*(\xi)}{l^*(\xi)} - \Lambda \frac{(\xi-x_0)\,(\xi-x_1)\,(\xi-x_2)}{l(\xi)\,l^*(\xi)}$$

und

$$\chi(\xi) = l(\xi)\,l^*(\xi)\Phi(\xi) = g(\xi)\,l^*(\xi) - g^*(\xi)\,l(\xi) - \Lambda(\xi-x_0)\,(\xi-x_1)\,(\xi-x_2)$$



(Fig. 2) verschwinden in den Interpolations- und Stützstellen x und x_0, x_1, x_2; $\chi(\xi)$ hat demnach im Intervall $[\alpha,\beta]$ vier Nullstellen. Nach dem Satz von *Rolle* liegt für eine beliebige stetige und differenzierbare Funktion zwischen zwei Nullstellen mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung. Bei der als hinreichend vorausgesetzten Regularität der Funktion $f(x)$ gibt es daher im Intervall (α,β) mindestens eine Stelle ξ_0, in welcher $\chi'''(\xi)$ zu Null wird:

$$\chi'''(\xi_0) = [g(\xi_0)\,l^*(\xi_0)]''' - [g^*(\xi_0)\,l(\xi_0)]''' - 3!\,\Lambda = 0.$$

In der so erhaltenen linearen Bestimmungsgleichung für Λ ist das mittlere Glied als dritte Ableitung einer quadratischen Funktion Null, so dass als Lösung

$$\Lambda = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{d}{d\xi}\right)^3 g(\xi)\,l^*(\xi)\right]_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{d}{d\xi}\right)^3 l(\xi)\,l^*(\xi)\,f(\xi)\right]_{\xi=\xi_0}$$

und damit für die Restgliedfunktion

$$\boxed{R(x) = \frac{1}{6}\,\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{l(x)\,l^*(x)}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^3 l(x)\,l^*(x)\,f(x)\right]_{x=\xi_0}} \qquad (11)$$

resultiert. Bleibt $f(x)$ in $[\alpha,\beta]$ endlich, ist die Annahme $l(x) \equiv l^*(x)$ zulässig.

5. Ausblick

Der gewählte Ansatz für die interpolierende Hyperbel legt die Verallgemeinerung der von *Jecklin* eingeführten Interpolationsmethode durch Funktionen

$$f^*(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{A_1 + \cfrac{x - x_1}{A_2 + \cfrac{x - x_2}{A_3 +} \cdots}}, \tag{12}$$

d.h. durch Kettenbrüche oder äquivalente gebrochene rationale Funktionen nahe. Die hisher nur im Zusammenhang mit dem Leibrentenproblem für spezielle Funktionen in Erscheinung getretenen Kettenbrüche könnten in erweitertem Rahmen für die Bedürfnisse der praktischen Versicherungsmathematik nutzbringend eingeführt werden. Eine auf Funktionen (12) basierende F-Methode zur globalen Reserveberechnung dürfte hinreichend geschmeidig sein, um auch den für temporäre Versicherungen typischen Reserveverlauf zu erfassen.

Literaturhinweise

H. Jecklin: «Hyperbolische Interpolation», Elemente der Mathematik, Band IV/2 (1949).

H. Jecklin und *H. Zimmermann:* «Eine praktische Interpolationsformel», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 48 (1948).

H. Jecklin: «A new Method for the group calculation of reserves», Journal of the Institute of Actuaries Student's Society, Vol. X, No. 2 (1951).

H. Jecklin: «Nouvelle méthode pour le calcul par groupes des réserves mathématiques en assurance-Vie», Boletim do Instituto dos Actuarios Portugueses, ano V, no. 5 (1950).

M. T. L. Bizley and *A. E. Lacey:* «Approximate Valuation of Life Assurance and Annuity Contracts», Cambridge University Press (1954), p. 93–97.

Résumé

Pour déterminer les coefficients de l'hyperbole d'interpolation relative à la fonction $y = f(x)$, on a recours à un algorithme. On peut d'autre part, en cas d'interpolation hyperbolique, représenter la partie restante à l'aide d'une formule.

Summary

To determine the coefficient of the interpolation hyperbola applied to a function $y = f(x)$ an algorithmus is developped. Moreover, the author derives a formula representing the remainder in case of hyperbolic interpolation.

Riassunto

Per determinare i coefficienti della iperbole d'interpolazione coordinata alla funzione $y = f(x)$ si ricorre ad un algoritmo. Inoltre si deriva una formola per rappresentare il resto nel caso dell'interpolazione iperbolica.