

# Das Haupttheorem der linearen Programmierung

Autor(en): **Romer, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966789>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.





In einem verdienstvollen Aufsatz, betitelt «Approximative Reservenberechnung mit Hilfe der linearen Programmierung», hat Herr *M. Frischknecht* in dieser Zeitschrift erstmals gewisse Aufgaben und Lösungswege der linearen Programmierung im Versicherungswesen aufgezeigt; ein Passus dieses Aufsatzes (60. Bd., Heft 1, S. 103) bietet insofern Gelegenheit zu Missverständnis, als unterstellt wird, die Bedingungsgleichungen (3) seien nur lösbar, wenn  $n$  Veränderliche Null würden. Das gilt jedoch bloss im Zusammenhang mit der Extremalaufgabe; sonst aber lassen sich die Gleichungen (3) nach  $k$  Veränderlichen auflösen, wenn die übrigen beliebig vorgegeben sind; die ersteren werden dann eben lineare Funktionen der letzteren.

Das Haupttheorem wird im erwähnten Aufsatz für den Fall  $n = 2$ ,  $k = 3$  geometrisch bewiesen.

Wir gedenken hier einen Beweis zu geben, der auf geometrische Darstellung verzichtet. Er mag vielleicht etwas mühsamer sein, gestattet aber die Voraussetzungen und gedanklichen Schritte klar herauszustellen. Der Beweisgang vollzieht sich in drei Stufen:

- a) die Behandlung des einfachen Falles:  $n = 2$ ,  $k = 1$ ;
- b) die Behandlung des allgemeineren Falles:  $n$  beliebig,  $k = 1$ ;
- c) die Behandlung des allgemeinsten Falles:  $n$  beliebig,  $k$  beliebig.

*Der Fall  $n = 2$ ,  $k = 1$ .*

Wir haben

$$\begin{aligned} X' &= X - c = p_1 x_1 + p_2 x_2, \\ s &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir verlangen, dass mindestens ein  $p$  und ein  $a$  mit gleichem Index von Null verschieden sind und dass

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet (Vermeiden der Entartung). Dabei sind somit im Vergleich zu (2) die Voraussetzungen für  $p$  gelockert. Die Reihenfolge der Bezeichnungen richten wir so ein, dass  $D > 0$  ist.

Dann wird, weil  $x_1, x_2 \geq 0$  sind,

$$\begin{aligned} D x_1 &= X' a_2 - p_2 (s - x_3) \geq 0, \\ D x_2 &= p_1 (s - x_3) - X' a_1 \geq 0; \end{aligned} \tag{5}$$

daraus

$$\begin{aligned} X' a_2 &\geq p_2 (s - x_3), \\ X' a_1 &\leq p_1 (s - x_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Damit für  $X$  ein echtes Maximum vorhanden ist, muss unbedingt mindestens eine der Ungleichungen (6) eine endliche Obergrenze für  $X'$  liefern. Dabei spielen die Vorzeichen von  $a_1, a_2$  mit. Ergeben beide Ungleichungen (6) eine solche Obergrenze, so ist die kleinere davon massgebend; eine und dieselbe Obergrenze können sie nicht haben, weil sonst  $-p_2/a_2 = p_1/a_1$  sein müsste, was wegen  $D > 0$  verboten ist.

An der Maximalstelle muss  $x_3 = 0$  sein. Denn in der dafür massgebenden Ungleichung aus (6) ist rechts  $x_3$  die einzige freie Veränderliche, und die rechte Seite hängt linear von ihr ab. Das Maximum von  $X'$  muss somit entweder mit dem Maximum oder dann mit dem Minimum von  $x_3$  zugleich vorkommen. Nun hat  $x_3$  kein Maximum; sein Minimum (Null) und das Maximum von  $X'$  (und  $X$ ) treffen also zusammen.

Durch Rückgriff auf die Ungleichung in (5), von welcher die schliesslich massgebende in (6) stammt, erhält man ausserdem noch, dass dann entweder  $x_1$  oder  $x_2$  Null werden muss, während die dritte Variable sich aus der Nebenbedingung in (4) ergibt. Ist z. B.  $x_2$  «stärker», so wird für ihre Maximalstelle  $x_2 = s/a_2$  und des weiteren

$$\text{Max } X = \frac{p_2}{a_2} s + c.$$

Handelt es sich bei der Nebenbedingung um eine echte Gleichung, ist also die «überzählige» Variable  $x_3$  von vornherein Null, so ändert sich nichts an den darauffolgenden Schlüssen.

*Der Fall:  $n$  beliebig,  $k = 1$*

Jetzt liegt das System vor

$$\begin{aligned} X' &= X - c = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n, \\ s &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + x_{n+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir denken uns (7) dargestellt als

$$\begin{aligned}\xi &= X' - (p_3 x_3 + \dots + p_n x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2, \\ s' &= s - (a_3 x_3 + \dots + a_n x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_{n+1}.\end{aligned}\tag{8}$$

$x_3, x_4, \dots, x_n$  seien beliebig gewählt, aber vorläufig festgehalten; nur  $x_1, x_2$  und  $x_{n+1}$  seien beweglich. Damit haben wir den ersten Fall wieder vor uns. Wir werden, um  $\xi$  unter diesen Umständen zu maximieren,  $x_{n+1}$  sowie eine der Grössen  $x_1, x_2$  Null zu setzen haben. Beispielsweise möge dies für  $x_1, x_{n+1}$  der Fall sein. Folglich gilt für den erreichbaren Höchstwert von  $\xi$

$$p_2 x_2 = \frac{p_2}{a_2} [s - (a_3 x_3 + \dots + a_n x_n)] = \text{Max} [X - c - (p_3 x_3 + \dots + p_n x_n)].$$

Das bleibt gültig für jeden Wert, den  $x_3, x_4, \dots, x_n$  angenommen haben, also insbesondere auch für jenen, den sie annehmen, wenn sie sich am allfälligen Maximum von  $X$  beteiligen. Somit scheiden  $x_1$  und  $x_{n+1}$  aus der weiteren Betrachtung aus. Sie tragen zum Maximum von  $X$  nichts bei, wenn sie es nicht schon für das Maximum von  $\xi$  tun. Letztlich rührt dies davon her, dass es ausschliesslich von den Koeffizienten  $p$  und  $a$  abhängt, welche Veränderlichen zu verschwinden haben, und nicht etwa von  $X$  und  $s$  oder von  $\xi$  und  $s'$ . Wir dürfen den Gedanken- gang mit  $x_2, x_3, \dots, x_n$  allein fortsetzen. Mithin haben wir beispielsweise

$$\begin{aligned}\xi' &= X' - (p_4 x_4 + \dots + p_n x_n) = p_2 x_2 + p_3 x_3, \\ s'' &= s - (a_4 x_4 + \dots + a_n x_n) = a_2 x_2 + a_3 x_3.\end{aligned}$$

Die «überzählige» Veränderliche (Schlupfvariable) entfällt nun, was durchaus nicht stört. Wir scheiden weitere Variable aus; bei jedem Schritt verschwindet eine davon. Bei jedem Schritt müssen aber auch die im einfachen Fall erwähnten Bedingungen erfüllt bzw. erfüllbar sein, was wir nachdrücklich betonen.

Schliesslich bleibt genau eine nicht verschwindende Variable zurück, welche als «stärkste» allein zum Höchstwert von  $X$  in (7) beisteuert. Anders gesagt:

Bei  $(n+1)$  Veränderlichen mit einer einzigen Nebenbedingung wie (7) erreicht  $X$  sein Maximum, falls  $n$  Veränderliche (und darunter die Schlupfvariable) verschwinden.

Das entspricht der Aussage des Haupttheorems.

*Der Fall:  $n$  beliebig,  $k$  beliebig*

Wir kommen zu den Beziehungen (2) und (3) und setzen dabei voraus, dass mindestens eine der Determinanten  $k$ -ter Ordnung, welche sich aus der Matrix mit  $k$  Zeilen und  $(n+k)$  Spalten

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

gewinnen lassen, von Null verschieden sei (Vermeiden der Entartung). Diejenige, welche aus den  $k$  Zeilen und den letzten  $k$  Spalten entsteht (Koeffizienten der Schlupfvariablen), zählen wir dabei ausdrücklich nicht mit; sie ist ja gleich Eins.

Die Zahl der Nebenbedingungen drücken wir um eine herab, indem wir gleichzeitig  $x_i$  ausschalten;  $x_i$  muss zu denjenigen Variablen gehören, deren Koeffizienten in einer nichtverschwindenden Determinante vorkommen. Wir multiplizieren die erste Nebenbedingung derart, dass wir davon die zweite, dritte ... Nebenbedingung abziehen können und dabei in der jeweiligen Differenzgleichung der Koeffizient von  $x_i$  verschwindet. So kommen wir auf  $(n+k-1)$  Veränderliche (ohne  $x_i$ ) in  $(k-1)$  Nebenbedingungen.

Desgleichen errechnen wir  $x_i$  aus der ersten Nebenbedingung als lineare Funktion der übrigen Variablen und von  $s_1$ ; dies führen wir in (2) ein. Dadurch wird die Anzahl der massgebenden Veränderlichen dort nicht beeinflusst, weil  $x_i$  ersetzt wird durch dort bereits vertretene Variable und durch  $x_{n+1}$ . Wir erhalten

$$X = q_1 x_1 + \dots + q_{i-1} x_{i-1} + q_{i+1} x_{i+1} + \dots + q_{n+1} x_{n+1} + c + g_1 s_1 \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 - \frac{a_{11}}{a_{1i}} p_i \\ q_2 &= p_2 - \frac{a_{12}}{a_{1i}} p_i \\ &\vdots \\ q_{n+1} &= -\frac{p_i}{a_{1i}} \quad \text{und} \quad g_1 = \frac{p_i}{a_{1i}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Nimmt man als  $x_i$  die Schlupfvariable  $x_{n+1}$ , so wird (2) völlig in Ruhe gelassen, und von den Nebengleichungen (3) entfällt einfach die erste.

So schreiten wir weiter und setzen die Anzahl der Nebenbedingungen auf eine einzige sowie die der Veränderlichen auf  $(n+1)$  herab, während die Anzahl der Veränderlichen in (2) immer gleich  $n$  bleibt. Wird unterwegs eine Schlupfvariable ausgeschaltet, die nur in einer einzigen Nebenbedingung vorkommt, so lässt man diese Gleichung einfach beiseite.

Von da an unterwerfen wir das Restsystem den nämlichen Überlegungen und Bedingungen wie beim erledigten Fall:  $n$  beliebig,  $k = 1$ . Eliminieren wir die «stärkste» übriggebliebene Veränderliche (welche das Maximum erzeugt), indem wir die Nebenbedingung nach ihr auflösen und dies in  $X$  einsetzen, und schreiben wir die schliesslich dort verbleibenden  $n$  Veränderlichen als  $x'$ , ihre Koeffizienten als  $r$ , so bekommen wir

$$X = r_1 x'_1 + r_2 x'_2 + \dots + r_n x'_n + c + g'_1 s_1 + g'_2 s_2 + \dots + g'_k s_k. \quad (11)$$

Die  $g'$  hängen nur von den Koeffizienten  $a$  ab.

Drücken wir also auf Grund der Nebenbedingungen (3)  $k$  bestimmte Variable durch die übrigen aus und ersetzen wir in (2) diese  $k$  Veränderlichen – soweit sie dort überhaupt vorkommen – durch die übrigen, so nimmt  $X$  nur dann ein Maximum an (wenn überhaupt), sofern diese verbliebenen  $n$  Variablen Null werden.

$X$  in (11) geht dann über in

$$X^* = c + g'_1 s_1 + g'_2 s_2 + \dots + g'_k s_k. \quad (12)$$

Umgekehrt lassen sich aus (3) nach dem Nullsetzen die übrigen  $k$  Variablen ermitteln. Dadurch werden vernachlässigte Schlupfvariable und ihre Gleichungen wieder einbezogen. Sind allenfalls einzelne Lösungswerte darunter negativ, so ist dieses Lösungssystem zu streichen.

Wir können  $\left( \binom{n+k}{n} - 1 \right)$  verschiedene derartige Lösungssysteme zu bilden versuchen; von den  $\binom{n+k}{n}$  überhaupt möglichen Lösungen lassen wir diejenige weg, bei welcher  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Null gesetzt sind.



Welche Bewandtnis hat es mit den so erzielten Maxima? Wie steht es mit dem «allergrössten» erreichbaren Wert von  $X$ ? Durch unser Vorgehen stellen wir vorerst nichts anderes fest, als dass  $X$  durch eine wohlbestimmte «verbliebene» Gruppe von  $(n + 1)$  Veränderlichen  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1}$  erfasst werden kann, wobei diese Veränderlichen einer einzigen linearen Nebengleichung genügen. Unter den obwaltenden Umständen und für diese verbliebenen Veränderlichen erreicht zwar  $X$  ein Maximum auf die geschilderte Weise. Es handelt sich jedoch um einen bedingten Höchstwert – sofern es nicht gar ein unbrauchbarer ist, indem gewisse Veränderliche unter den  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+k}$  negativ werden. Um bedingte Höchstwerte handelt es sich, weil der «Wettbewerb» nur unter einer Auswahl aller Veränderlichen ausgetragen wird. Von den übrigen wird nicht Notiz, deshalb auf sie auch keine Rücksicht genommen. In (11) gelten dabei die von den  $x'$  freien Glieder, die in (12) wieder auftauchen, als additive Konstante; sie bleiben daher ohne Einfluss. Das trifft jedoch nur solange zu, als man es mit ein und derselben restlichen Gruppe  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$  zu tun hat. Geht man zu einer andern über, so fällt (12) anders aus. Das für die eine Gruppe gefundene Maximum sagt somit nichts aus über ein zweites, welches durch eine andere Variablen­gruppe entsteht.

Somit bleibt nichts anderes übrig, als die verschiedensten «falschen» verbliebenen Variablen­gruppen  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  Null zu setzen. Eine unter allen muss die «richtige» sein, d. h. das «allergrösste»  $X$  hervorbringen. Dass es keinen Sinn hat, alle denkbaren Stationen anzulaufen, ist klar. In den weiteren Verfahrensschritten der Simplexmethode folgt man planmässigen Abkürzungen.

Noch einige Worte zum Fall, dass  $X$  an zwei oder mehr verschiedenen Stellen den nämlichen Höchstbetrag erreicht; er ist zwar durch unsere Bedingungen ausgeschlossen. Nehmen wir an, sie seien in dieser Hinsicht nicht erfüllt. Ein Maximum sei erreicht gemäss den Gleichungen (11) und (12); ein zweites, gleich hohes entstehe so, dass alle oder einige der  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  von Null verschieden ausfallen; beispielsweise sei für dieses Maximum  $x'_1 = A_1, x'_2 = A_2, \dots, x'_m = A_m$ . Da (11) für jeden  $X$ -Wert gilt, haben wir für die beiden verschiedenen Fälle

$$X^* = r_1 A_1 + r_2 A_2 + \dots + r_m A_m + c + g'_1 s_1 + \dots + g'_k s_k = c + g'_1 s_1 + \dots + g'_k s_k.$$

Daraus folgt

$$r_1 A_1 + r_2 A_2 + \dots + r_m A_m = 0 \tag{13}$$

und desgleichen mit einem laufenden Parameter  $t$

$$t(r_1 A_1 + \dots + r_m A_m) = t r_1 A_1 + \dots + t r_m A_m = 0. \quad (14)$$

Mit  $A_1, A_2, \dots, A_m$  sind mithin auch  $tA_1, tA_2, \dots, tA_m$  – bei Gleichbleiben der übrigen  $(n+k-m)$  Stellen – maximierende Variablenwerte, mit beliebigem  $t$ .

### *Erweiterungen*

Wir schliessen hier einige Gedanken an, die sich in bezug auf die Lockerung der einengenden Bedingungen aufdrängen:

1. Geht man die einzelnen Überlegungen durch, so zeigt sich, dass der allgemeinere Fall, wo zwar (1) weiterhin erfüllt werden soll, die ursprünglichen Veränderlichen jedoch beliebig nach unten beschränkt sind

$$x_1 \geq \alpha_1, x_2 \geq \alpha_2, \dots, x_n \geq \alpha_n; \quad x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+k} \geq 0$$

sich zwanglos in die Gedankengänge einfügt. (5) und (6) werden etwas verallgemeinert, dasselbe gilt für (8) und (9).

$X$  nimmt sein Maximum nur dort an, wo  $n$  bestimmte Variable ihre untere Grenze erreichen. Der Fall der Gleichheit zweier solcher Maxima ist nun jedoch nicht mehr so einfach auszuschliessen.

2. Statt der  $k$  Ungleichungen können zum Teil oder ausschliesslich lineare Gleichungen zwischen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vorkommen. Den Fall der Überbestimmtheit – mehr Nebengleichungen als insgesamt Veränderliche – schliessen wir aus. Die Gleichungen betrachten wir als Sonderfall von Ungleichungen, indem wir uns einseitig gerichtete Ungleichungen wie bisher hingeschrieben denken. Beim Ermitteln des Maximums von  $X$  sind schliesslich alle diejenigen Lösungssysteme zu meiden, bei denen die betreffenden Schlupfvariablen von Null verschieden sind.
3. Alle Überlegungen gelten durch sinngemässe Umkehrung der Bedingungen und Beziehungen auch für die Aufgabe, ein Minimum zu finden. Die Variablen unterliegen dabei im sinngemäss «übersetzten» Beweisgang nach wie vor der Bedingung, nichtnegativ zu sein. Die Schlupfvariablen haben jedoch die Koeffizienten  $-1$  in den entsprechenden Gleichungen (3).

4. Wir brauchen, um die Überlegungen zu erweitern, nur daran zu denken, beispielsweise durch ein lineares Gleichungssystem eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einerseits und andern Veränderlichen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  andererseits zu schaffen wie folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{1n} y_n + h_1 \\ x_2 &= b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \dots + b_{2n} y_n + h_2 \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \dots + b_{nn} y_n + h_n. \end{aligned} \tag{15}$$

Dieser Zusammenhang sei hier nur angedeutet.

5. Sind die Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nach unten und nach oben beschränkt, so werden dadurch die Überlegungen eliminiert, welche für beliebig grosse Werte von ihnen gelten. Ob man dann vielleicht mit einer Kopplung von Überlegungen zum Maximum von  $X$  (für die Beschränkung der  $x$  nach unten) und solchen zum Minimum von  $(-X)$  (für die Beschränkung der  $x$  nach oben)  $\text{Max } X$  finden kann, ist als Problem noch offen. Gewiss: Bleiben die nach der Simplexmethode errechneten maximierenden bzw. minimierenden Werte für jedes  $x$  innerhalb seines zulässigen Bereiches, so ist die Aufgabe gelöst. Was aber, wenn das nicht zutrifft? Für diesen Fall reichen die hier geschilderten Überlegungen nicht aus.
6. Als allgemeines Kennzeichen des Haupttheorems darf wohl gelten, dass es beim Aufsuchen der Maximalstellen von  $X$  den Wertevorrat, bestehend aus einer einseitig beschränkten reellen Punktmenge im  $(n+k)$ -dimensionalen Raum, so auszudehnen gestattet, dass schliesslich nur noch eine endliche Anzahl diskreter Punkte zu prüfen ist.

### Literatur

- J. F. McCloskey / F. N. Trefethen*: Operations research for management, Baltimore 1956.
- W. Krelle*: Lineare Programmierung. Institut für Betriebswirtschaft an der Handelshochschule St. Gallen, 1956.

## Summary

If  $n$  variables assumed to be either non-negative or non-positive, are connected in a system of inequalities with a certain degree of freedom, this system can be transformed into a system of equations by introducing  $k$  new variables. The principal theorem on linear programming states that for determining the extremum of any linear combination of the original variables,  $n$  of the  $(n + k)$  variables must be set equal to zero. The author demonstrates the theorem by successive generalisation starting with  $n = 2, k = 1$ . Finally he discusses some specific generalisations.

## Résumé

Si  $n$  variables, pouvant être seulement ou non-négatives ou non-positives, sont liées entre elles par un système de  $k$  inéquations dont le rang est inférieur à  $n$ , l'introduction de  $k$  nouvelles variables permet de transformer ce système en un système d'équations. En vertu du théorème principal de la programmation linéaire pour déterminer la valeur extrême d'une combinaison linéaire quelconque des variables originales,  $n$  des  $(n + k)$  variables doivent être égales à zéro. L'auteur démontre le théorème par une généralisation progressive, en partant de  $n = 2, k = 1$ . Pour terminer il parle encore de généralisations déterminées.

## Riassunto

Se  $n$  variabili, che possono essere soltanto o non-negative oppure non-positiva, sono legate fra di loro in un sistema di  $k$  disequazioni con un grado di libertà definito, questo sistema può essere trasformato, introducendo  $k$  nuove variabili, in un sistema di equazioni. Il teorema principale sulla programmazione lineare dice che, per riuscire a determinare il valore estremo di una qualsiasi combinazione lineare delle variabili originali,  $n$  delle  $(n + k)$  variabili devono essere uguali a zero. L'autore dimostra il teorema con successiva generalizzazione, partendo da  $n = 2, k = 1$ . Infine commenta ancora determinate generalizzazioni.

