

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 60 (1960)

Artikel: Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Autor: Iff, Paul

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966788>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Von Paul Iff, Zürich

Zusammenfassung

Es handelt sich um ergänzende Ausführungen zu der in Bd. 59, Heft 2, erschienenen Arbeit über zwei Reihenentwicklungen, die in ihrer Anwendung bekannte Darstellungen versicherungstechnischer Werte ergeben.

1.

In einer gleichbetitelten Arbeit (MSVM Bd. 59, Heft 2) hat der Verfasser auf zwei Reihen hingewiesen, die als Anwendung bekannte Darstellungen versicherungstechnischer Werte ergeben:

$$(A) \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = f_1(a) \int_a^b + f_1'(a) \int_a^b + f_1''(a) \int_a^b + \dots + f_1^{(r)}(a) \int_a^b + \dots,$$

wo \int_a^b für $\underbrace{\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b f_2(x) dx^{r+1}}_{(r+1)}$ steht.

$$(B) \sum_0^b f_1(x) f_2(x) = \sum_{x=0}^b \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(0)}{(x+\varrho)!} x! \sum_{x_1=x}^b f_2(x_1) \right\},$$

wo $\sum_r^{(r+1)} f_2(x_1)$ für $\underbrace{\sum_r^b \sum_r^b \dots \sum_r^b f_2(x_1)}_{(r+1)}$ steht,

mit der Bestimmung, dass im praktischen Beispiel die Summen $\sum_r^{(r+1)}$ schrittweise ausgehend vom höhern Index in Richtung des niedrigeren Index zu bilden sind, d. h. in Richtung von b nach r , wenn $b > r$. Die Faktoren α sind Stirlingsche Zahlen zweiter Art.

Es mag nun bemängelt werden, dass die beiden Reihen (A) und (B) sich hinsichtlich der Grenzen der Integration bzw. der Summation nicht voll entsprechen. Um dies zu erreichen, setzen wir:

$$\sum_a^b f_1(x) f_2(x) = \sum_0^{b-a} f_1(x+a) f_2(x+a)$$

und entwickeln nach (B). Mit $f_1(0) = f_1(a)$, $f_1'(0) = f_1'(a)$ usw. erhalten wir

$$(B_1) \sum_a^b f_1(x) f_2(x) = \sum_0^{b-a} f_1(x+a) f_2(x+a) = \sum_{x=0}^{b-a} {}^{(1)} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(a)}{(x+\varrho)!} x! \sum_{x_1=x+a}^b {}^{(x+1)} f_2(x_1) \right\}$$

mit $\sum_{x_1=x}^{b-a} {}^{(x+1)} f_2(x_1+a) = \sum_{x_1=x+a}^b {}^{(x+1)} f_2(x_1)$.

Damit ist die Übereinstimmung erreicht.

2.

Wir führen nun die Reihe (B₁) in die Reihe (A) über. Anstatt in $(b-a)$ «Schritten 1» summieren wir in $\frac{b-a}{m}$ «Schritten m ». Es wird dann:

$$(B_2) \sum_0^{\frac{b-a}{m}} f_1(mx+a) f_2(mx+a) m = \sum_{x=0}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(1)} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(a) m^{x+\varrho}}{(x+\varrho)!} mx! \sum_{x_1=x}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(x+1)} f_2(mx_1+a) \right\}$$

Betrachten wir zunächst die linke Seite dieser Gleichung. Wir können sie auch so lesen: Die Funktion $f_1(x) f_2(x) m$ wird zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ in $\frac{b-a}{m}$ «Schritten m » aufsummiert. Mit $m \rightarrow 0$ erfolgt die Summation in unendlich vielen, unendlich kleinen Schritten. Setzen wir in der üblichen Weise dx an Stelle von $m \rightarrow 0$ und das Integralzeichen an Stelle des Summenzeichens, dann wird die linke Seite

zum Integral $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$.

Das $(r+1)$ -te Glied der Summe rechts schreibt sich:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_r^{r+\varrho} \frac{f_1^{(r+\varrho)}(a) m^{r+\varrho}}{(r+\varrho)!} m r! \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(r+1)} f_2(mx_1+a)$$

oder

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_r^{r+\varrho} \frac{f_1^{(r+\varrho)}(a) m^{\varrho}}{(r+\varrho)!} r! \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(r+1)} f_2(mx_1+a) m^{r+1}.$$

Beim Grenzübergang $m \rightarrow 0$ verschwinden alle Summanden mit $\varrho > 0$ und es bleibt, da $\alpha_r^r = 1$:

$$f_1^{(r)}(a) \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} \sum_{x_1=r}^{(r+1)} f_2(mx_1+a) m^{r+1} \quad \text{oder} \quad f_1^{(r)}(a) \sum_{x_1=0}^n \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(mx_1+mr+a) m^{r+1}$$

mit $n = \frac{b-a-mr}{m}; \quad n > 0.$

Die Summe $\sum_{x_1=0}^n \sum_{x_1=0}^{(r+1)}$ ist schrittweise ausgehend vom höheren Index zu bilden.

Dies gilt auch für $r = 0$. Die Summation erfolgt also in umgekehrter Richtung, wie bei der Summe auf der linken Seite von (B₂). Wir schreiben also für diesen Grenzübergang:

$$f_1^{(r)}(a) \underbrace{\sum_n^{x_1=0} \sum_n^{x_1=0} \dots \sum_n^{x_1=0}}_{(r+1)} f_2(mx_1+mr+a) m^{r+1}.$$

Wir können die mehrfache Summe auch so interpretieren: Die Funktion $f_2(x_1) m^{r+1}$ wird zwischen den Grenzen b und $a + mr$ in n «Schritten m » $(r+1)$ mal aufsummiert. Mit $m \rightarrow 0$ erfolgt die Summation in unendlich vielen, unendlich kleinen Schritten, die entgegengesetzt gerichtet sind, wie die Schritte bei der Summe links von (B₂). Wir setzen also unter dem Summenzeichen $m \rightarrow 0 = -dx$, und erhalten für obigen Ausdruck:

$$f_1^{(r)}(a) \int_b^{a+r dx_1} \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x_1) (-dx_1)^{r+1} = f_1^{(r)}(a) \int_{a+r dx_1}^b \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x_1) dx_1^{r+1}.$$

Nun haben wir nur noch über alle r von $r = 0$ bis $r = \infty$ zu summieren und erhalten, wenn wir für die Variable x an Stelle von x_1 setzen:

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{(1)} f_1^{(r)}(a) \int_{a+r dx}^b \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x) dx^{r+1}.$$

Wenn wir uns mit einer endlichen Zahl von Summengliedern begnügen können, so reduziert sich die untere Grenze der Integration rechts: $a + r dx$ auf a und wir erhalten die Reihe (A). Wir verweisen auf die bereits früher erwähnte Arbeit von O. W. Spring: «Analytische Betrachtungen zur Änderung des Rechnungszinsfusses und der Sterbetafel bei Versicherungswerten» (MSVM Bd. 50, Heft 2).

3.

Das Integral

$$\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r = \underbrace{\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b}_{(r)} f(x) dx^r$$

ist also hinsichtlich der Integrationsgrenzen in dem durch die Schreibweise angedeuteten Sinne zu bilden.

Es ist natürlich $\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b f(x) dx^r = \pm \int_b^a \int_b^x \dots \int_b^x f(x) dx^r$ je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Dagegen besteht zwischen $\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r$ und $\int_b^{a^{(r)}} f(x) dx^r$ die Beziehung:

$$\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r + \int_b^{a^{(r)}} f(x) dx^r = - \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r-1} \binom{r-1}{\varrho} \frac{(a-b)^\varrho}{\varrho!} \int_a^b f(x) dx^{r-\varrho} \right\}.$$

4.

(B₂) liefert mit $m < 1$ als Anwendung die Reihen für Renten, zahlbar in unterjährigen Raten.

Für das Makehamsche Sterbegesetz erhalten wir mit $(\ln g)^r = 0$ für alle $r > 1$ neben den bereits mitgeteilten Näherungsformeln für die Rentenbarwerte

$$a) \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{1 - (sv)^n}{1 - sv} + c^x \ln g \frac{1 - (scv)^n}{1 - scv}$$

und

$$b) \quad \bar{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{(sv)^n - 1}{\ln(sv)} + c^x \ln g \frac{(scv)^n - 1}{\ln(scv)}$$

die Darstellung für die in $\frac{1}{m}$ Raten zahlbare Rente:

$$c) \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{1 - (sv)^n}{1 - (sv)^{\frac{1}{m}}} + c^x \ln g \frac{1 - (scv)^n}{1 - (scv)^{\frac{1}{m}}}.$$

Diese Formeln liefern für moderne Frauensterbetafeln, die durch «*g* sehr nahe 1» ausgezeichnet sind, die entsprechenden Rentenbarwerte mit sehr grosser Annäherung. Die Formel *c*) basiert nicht auf speziellen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit innerhalb des Jahres. Sie eignet sich gut zu Untersuchungen über die Bewertung solcher vereinfachender Annahmen zur näherungsweise Bestimmung des Rentenbarwertes $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Die für eine spezielle Tafel (*s, c, g*) ermittelten Resultate dürften weitgehend allgemeine Geltung haben.

5.

Mit $f_1(t) = t$ erhalten wir

$$\text{nach (B):} \quad b) \quad \sum_0^{n-1} t f_2(t) = \sum_1^{n-1} {}^{(2)}f_2(t)$$

und

$$\text{nach (A):} \quad a) \quad \int_0^n t f_2(t) dt = \int_0^n {}^{(2)}f_2(t) dt^2.$$

Als Anwendung dieser einfachen Formeln wählen wir folgendes Beispiel in Anlehnung an die Arbeit von E. Zwinggi: «Methodische Bemerkungen zur Berechnung der Prämien, Deckungskapitalien und Gewinne in der Lebensversicherung» (MSVM Bd. 59, Heft 2).

Unter der Voraussetzung, dass für die Verzinsung und die Auszahlung der Versicherungsleistungen der «stetige» Ablauf gilt, die Prämien aber jährlich oder unterjährig zu entrichten sind, wird dort für den Rentenbarwert folgender Ansatz gemacht:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{v^{\frac{\tau}{m}} l_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t}} \right\}; \quad m = 2, 4, 12.$$

Unter der Annahme des linearen Verlaufes der Zahl der Lebenden innerhalb eines Jahres schreibt sich dieser Rentenbarwert wie folgt:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{v^{\frac{\tau}{m}} [l_{x+t+\frac{\tau}{m}} (l_{x+t+1} - l_{x+t})]}{l_{x+t}} \right\},$$

oder unter Berücksichtigung von b):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} - v q_{x+t} \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau} \right\}$$

oder:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} - {}_nA_x \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau}.$$

Es ist:

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} = \frac{1}{m} \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \ddot{a}_{1|}^{(m)}.$$

Wenn wir für die Darstellung von $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ obige Form beibehalten, so deshalb, weil sie sich unseres Erachtens für die praktische Rechnung gut eignet. Die Faktoren

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau}.$$

lassen sich für die gebräuchlichen i und m leicht berechnen und tabellarisch festhalten. Sie können dann an jede beliebige Tafel angelegt werden. Die Berechnung neuer Kommutationszahlen, wie sie in der erwähnten Arbeit empfohlen wird, erübrigt sich dann.

Für den Übergang $m \rightarrow \infty$ d. h. $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ schreiben wir die beiden Faktoren in der Form

$$\sum_{\tau=0}^{\frac{m-1}{m}} v^{\tau} \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad (1+i) \sum_{\tau=0}^{\frac{m-1}{m}} v^{\tau} \frac{1}{m^2},$$

die dann mit $v = e^{-\delta}$ zu

$$\int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau \quad \text{und} \quad (1+i) \int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau^2$$

werden. Nun ist:

$$\int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \quad \text{und} \quad \int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau^2 (1+i) = \frac{1+i}{\delta} \left(\frac{1-e^{-\delta}}{\delta} - e^{-\delta} \right) = \frac{i-\delta}{\delta^2}.$$

Der Rentenbarwert geht damit über in

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} |_{m \rightarrow \infty} = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i-\delta}{\delta^2} {}_nA_x.$$

Summary

The author deals with a complement to the work appeared in volume 2, 1959 about two developments of series, giving, in their application, known representations of actuarial values.

Résumé

Il s'agit d'un complément au travail paru dans le cahier 2, 1959 sur deux développements de séries, qui, en les appliquant, donnent des représentations connues de valeurs actuarielles.

Riassunto

Si tratta di un complemento al lavoro apparso nel fascicolo 2, 1959 su due sviluppi di serie, che, applicandoli, risultano rappresentazioni conosciute di valori attuariali.

