

# Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Autor(en): **Iff, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966788>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Von Paul Iff, Zürich

### Zusammenfassung

Es handelt sich um ergänzende Ausführungen zu der in Bd. 59, Heft 2, erschienenen Arbeit über zwei Reihenentwicklungen, die in ihrer Anwendung bekannte Darstellungen versicherungstechnischer Werte ergeben.

#### 1.

In einer gleichbetitelten Arbeit (MSVM Bd. 59, Heft 2) hat der Verfasser auf zwei Reihen hingewiesen, die als Anwendung bekannte Darstellungen versicherungstechnischer Werte ergeben:

$$(A) \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = f_1(a) \int_a^b + f_1'(a) \int_a^b + f_1''(a) \int_a^b + \dots + f_1^{(r)}(a) \int_a^b + \dots,$$

wo  $\int_a^b$  für  $\underbrace{\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b f_2(x) dx^{r+1}}_{(r+1)}$  steht.

$$(B) \sum_0^b f_1(x) f_2(x) = \sum_{x=0}^b \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(0)}{(x+\varrho)!} x! \sum_{x_1=x}^b f_2(x_1) \right\},$$

wo  $\sum_r^{(r+1)} f_2(x_1)$  für  $\underbrace{\sum_r^b \sum_r^b \dots \sum_r^b f_2(x_1)}_{(r+1)}$  steht,

mit der Bestimmung, dass im praktischen Beispiel die Summen  $\sum_r^{(r+1)}$  schrittweise ausgehend vom höhern Index in Richtung des niedrigeren Index zu bilden sind, d. h. in Richtung von  $b$  nach  $r$ , wenn  $b > r$ . Die Faktoren  $\alpha$  sind Stirlingsche Zahlen zweiter Art.

Es mag nun bemängelt werden, dass die beiden Reihen (A) und (B) sich hinsichtlich der Grenzen der Integration bzw. der Summation nicht voll entsprechen. Um dies zu erreichen, setzen wir:

$$\sum_a^b f_1(x) f_2(x) = \sum_0^{b-a} f_1(x+a) f_2(x+a)$$

und entwickeln nach (B). Mit  $f_1(0) = f_1(a)$ ,  $f_1'(0) = f_1'(a)$  usw. erhalten wir

$$(B_1) \sum_a^b f_1(x) f_2(x) = \sum_0^{b-a} f_1(x+a) f_2(x+a) = \sum_{x=0}^{b-a} {}^{(1)} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(a)}{(x+\varrho)!} x! \sum_{x_1=x+a}^b {}^{(x+1)} f_2(x_1) \right\}$$

mit  $\sum_{x_1=x}^{b-a} {}^{(x+1)} f_2(x_1+a) = \sum_{x_1=x+a}^b {}^{(x+1)} f_2(x_1)$ .

Damit ist die Übereinstimmung erreicht.

2.

Wir führen nun die Reihe (B<sub>1</sub>) in die Reihe (A) über. Anstatt in  $(b-a)$  «Schritten 1» summieren wir in  $\frac{b-a}{m}$  «Schritten  $m$ ». Es wird dann:

$$(B_2) \sum_0^{\frac{b-a}{m}} f_1(mx+a) f_2(mx+a) m = \sum_{x=0}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(1)} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(a) m^{x+\varrho}}{(x+\varrho)!} mx! \sum_{x_1=x}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(x+1)} f_2(mx_1+a) \right\}$$

Betrachten wir zunächst die linke Seite dieser Gleichung. Wir können sie auch so lesen: Die Funktion  $f_1(x) f_2(x) m$  wird zwischen den Grenzen  $x = a$  und  $x = b$  in  $\frac{b-a}{m}$  «Schritten  $m$ » aufsummiert. Mit  $m \rightarrow 0$

erfolgt die Summation in unendlich vielen, unendlich kleinen Schritten. Setzen wir in der üblichen Weise  $dx$  an Stelle von  $m \rightarrow 0$  und das Integralzeichen an Stelle des Summenzeichens, dann wird die linke Seite

zum Integral  $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$ .

Das  $(r+1)$ -te Glied der Summe rechts schreibt sich:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_r^{r+\varrho} \frac{f_1^{(r+\varrho)}(a) m^{r+\varrho}}{(r+\varrho)!} m r! \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(r+1)} f_2(mx_1+a)$$

oder

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} {}^{(1)} \alpha_r^{r+\varrho} \frac{f_1^{(r+\varrho)}(a) m^{\varrho}}{(r+\varrho)!} r! \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} {}^{(r+1)} f_2(mx_1+a) m^{r+1}.$$

Beim Grenzübergang  $m \rightarrow 0$  verschwinden alle Summanden mit  $\varrho > 0$  und es bleibt, da  $\alpha_r^r = 1$ :

$$f_1^{(r)}(a) \sum_{x_1=r}^{\frac{b-a}{m}} \sum_{x_1=r}^{(r+1)} f_2(mx_1+a) m^{r+1} \quad \text{oder} \quad f_1^{(r)}(a) \sum_{x_1=0}^n \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(mx_1+mr+a) m^{r+1}$$

mit  $n = \frac{b-a-mr}{m}; \quad n > 0.$

Die Summe  $\sum_{x_1=0}^n \sum_{x_1=0}^{(r+1)}$  ist schrittweise ausgehend vom höheren Index zu bilden.

Dies gilt auch für  $r = 0$ . Die Summation erfolgt also in umgekehrter Richtung, wie bei der Summe auf der linken Seite von (B<sub>2</sub>). Wir schreiben also für diesen Grenzübergang:

$$f_1^{(r)}(a) \underbrace{\sum_n \sum_n \dots \sum_n}_{(r+1)} f_2(mx_1+mr+a) m^{r+1}.$$

Wir können die mehrfache Summe auch so interpretieren: Die Funktion  $f_2(x_1) m^{r+1}$  wird zwischen den Grenzen  $b$  und  $a + mr$  in  $n$  «Schritten  $m$ »  $(r+1)$ mal aufsummiert. Mit  $m \rightarrow 0$  erfolgt die Summation in unendlich vielen, unendlich kleinen Schritten, die entgegengesetzt gerichtet sind, wie die Schritte bei der Summe links von (B<sub>2</sub>). Wir setzen also unter dem Summenzeichen  $m \rightarrow 0 = -dx$ , und erhalten für obigen Ausdruck:

$$f_1^{(r)}(a) \int_b^{a+r dx_1} \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x_1) (-dx_1)^{r+1} = f_1^{(r)}(a) \int_{a+r dx_1}^b \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x_1) dx_1^{r+1}.$$

Nun haben wir nur noch über alle  $r$  von  $r = 0$  bis  $r = \infty$  zu summieren und erhalten, wenn wir für die Variable  $x$  an Stelle von  $x_1$  setzen:

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{(1)} f_1^{(r)}(a) \int_{a+r dx}^b \sum_{x_1=0}^{(r+1)} f_2(x) dx^{r+1}.$$

Wenn wir uns mit einer endlichen Zahl von Summengliedern begnügen können, so reduziert sich die untere Grenze der Integration rechts:  $a + r dx$  auf  $a$  und wir erhalten die Reihe (A). Wir verweisen auf die bereits früher erwähnte Arbeit von O. W. Spring: «Analytische Betrachtungen zur Änderung des Rechnungszinsfusses und der Sterbetafel bei Versicherungswerten» (MSVM Bd. 50, Heft 2).

3.

Das Integral

$$\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r = \underbrace{\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b}_{(r)} f(x) dx^r$$

ist also hinsichtlich der Integrationsgrenzen in dem durch die Schreibweise angedeuteten Sinne zu bilden.

Es ist natürlich  $\int_a^b \int_x^b \dots \int_x^b f(x) dx^r = \pm \int_b^a \int_b^x \dots \int_b^x f(x) dx^r$  je nachdem  $r$  gerade oder ungerade ist.

Dagegen besteht zwischen  $\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r$  und  $\int_b^{a^{(r)}} f(x) dx^r$  die Beziehung:

$$\int_a^{b^{(r)}} f(x) dx^r + \int_b^{a^{(r)}} f(x) dx^r = - \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r-1} \binom{r-1}{\varrho} \frac{(a-b)^\varrho}{\varrho!} \int_a^b f(x) dx^{r-\varrho} \right\}.$$

4.

(B<sub>2</sub>) liefert mit  $m < 1$  als Anwendung die Reihen für Renten, zahlbar in unterjährigen Raten.

Für das Makehamsche Sterbengesetz erhalten wir mit  $(\ln g)^r = 0$  für alle  $r > 1$  neben den bereits mitgeteilten Näherungsformeln für die Rentenbarwerte

$$a) \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{1 - (sv)^n}{1 - sv} + c^x \ln g \frac{1 - (scv)^n}{1 - scv}$$

und

$$b) \quad \bar{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{(sv)^n - 1}{\ln(sv)} + c^x \ln g \frac{(scv)^n - 1}{\ln(scv)}$$

die Darstellung für die in  $\frac{1}{m}$  Raten zahlbare Rente:

$$c) \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{1 - (sv)^n}{1 - (sv)^{\frac{1}{m}}} + c^x \ln g \frac{1 - (scv)^n}{1 - (scv)^{\frac{1}{m}}}.$$

Diese Formeln liefern für moderne Frauensterbetafeln, die durch «*g* sehr nahe 1» ausgezeichnet sind, die entsprechenden Rentenbarwerte mit sehr grosser Annäherung. Die Formel *c*) basiert nicht auf speziellen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit innerhalb des Jahres. Sie eignet sich gut zu Untersuchungen über die Bewertung solcher vereinfachender Annahmen zur näherungsweise Bestimmung des Rentenbarwertes  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ . Die für eine spezielle Tafel (*s, c, g*) ermittelten Resultate dürften weitgehend allgemeine Geltung haben.

5.

Mit  $f_1(t) = t$  erhalten wir

$$\text{nach (B):} \quad b) \quad \sum_0^{n-1} t f_2(t) = \sum_1^{n-1} {}^{(2)}f_2(t)$$

und

$$\text{nach (A):} \quad a) \quad \int_0^n t f_2(t) dt = \int_0^n {}^{(2)}f_2(t) dt^2.$$

Als Anwendung dieser einfachen Formeln wählen wir folgendes Beispiel in Anlehnung an die Arbeit von E. Zwinggi: «Methodische Bemerkungen zur Berechnung der Prämien, Deckungskapitalien und Gewinne in der Lebensversicherung» (MSVM Bd. 59, Heft 2).

Unter der Voraussetzung, dass für die Verzinsung und die Auszahlung der Versicherungsleistungen der «stetige» Ablauf gilt, die Prämien aber jährlich oder unterjährig zu entrichten sind, wird dort für den Rentenbarwert folgender Ansatz gemacht:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{v^{\frac{\tau}{m}} l_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t}} \right\}; \quad m = 2, 4, 12.$$

Unter der Annahme des linearen Verlaufes der Zahl der Lebenden innerhalb eines Jahres schreibt sich dieser Rentenbarwert wie folgt:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{v^{\frac{\tau}{m}} [l_{x+t+\frac{\tau}{m}} (l_{x+t+1} - l_{x+t})]}{l_{x+t}} \right\},$$

oder unter Berücksichtigung von  $b$ ):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} - v q_{x+t} \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau} \right\}$$

oder:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} - {}_nA_x \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau}.$$

Es ist:

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} = \frac{1}{m} \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \ddot{a}_{1|}^{(m)}.$$

Wenn wir für die Darstellung von  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  obige Form beibehalten, so deshalb, weil sie sich unseres Erachtens für die praktische Rechnung gut eignet. Die Faktoren

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} v^{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{1+i}{m^2} \sum_{\tau=1}^{m-1} v^{\tau}.$$

lassen sich für die gebräuchlichen  $i$  und  $m$  leicht berechnen und tabellarisch festhalten. Sie können dann an jede beliebige Tafel angelegt werden. Die Berechnung neuer Kommutationszahlen, wie sie in der erwähnten Arbeit empfohlen wird, erübrigt sich dann.

Für den Übergang  $m \rightarrow \infty$  d. h.  $\frac{1}{m} \rightarrow 0$  schreiben wir die beiden Faktoren in der Form

$$\sum_{\tau=0}^{\frac{m-1}{m}} v^{\tau} \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad (1+i) \sum_{\tau=0}^{\frac{m-1}{m}} v^{\tau} \frac{1}{m^2},$$

die dann mit  $v = e^{-\delta}$  zu

$$\int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau \quad \text{und} \quad (1+i) \int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau^2$$

werden. Nun ist:

$$\int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \quad \text{und} \quad \int_0^1 e^{-\delta\tau} d\tau^2 (1+i) = \frac{1+i}{\delta} \left( \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} - e^{-\delta} \right) = \frac{i-\delta}{\delta^2}.$$

Der Rentenbarwert geht damit über in

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} |_{m \rightarrow \infty} = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i-\delta}{\delta^2} {}_nA_x.$$

### Summary

The author deals with a complement to the work appeared in volume 2, 1959 about two developments of series, giving, in their application, known representations of actuarial values.

### Résumé

Il s'agit d'un complément au travail paru dans le cahier 2, 1959 sur deux développements de séries, qui, en les appliquant, donnent des représentations connues de valeurs actuarielles.

### Riassunto

Si tratta di un complemento al lavoro apparso nel fascicolo 2, 1959 su due sviluppi di serie, che, applicandoli, risultano rappresentazioni conosciute di valori attuariali.



