

Sur le rendement des obligations amortissables par annuités constantes

Autor(en): **Chuard, Jules**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966786>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur le rendement des obligations amortissables par annuités constantes

Par Jules Chuard, Pully (VD)

Résumé

L'auteur, après s'être occupé dans le cahier N° 2, 1959 de l'évaluation du taux de rendement des obligations remboursables au pair à échéance fixe, examine ici, de manière analogue, l'évaluation du taux de rendement à l'aide d'une formule pratique telle qu'elle est utilisée pour les emprunts amortissables. Les résultats sont comparés aux taux exacts dans de nombreux exemples numériques.

Si l'on se préoccupe uniquement de leur mode de remboursement, on peut classer les emprunts en deux groupes distincts :

a) Les emprunts dont tous les titres sont remboursés à la même époque que nous dénommons *emprunts remboursables à échéance fixe*.

b) Les *emprunts amortissables*.

Disons d'emblée que ce que nous entendons par titres, ce sont des obligations. Nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre de ces dénominations. Dans les emprunts amortissables, les titres sont remboursés par tranches, à la suite de tirages au sort, à des époques qui sont généralement fixées par le prospectus d'émission de l'emprunt.

Les emprunts amortissables peuvent à leur tour être subdivisés en diverses catégories suivant le mode de leur amortissement. Les amortissements peuvent en effet être constants. Dans ce cas, ils demeurent les mêmes d'une année à l'autre. Mais ils peuvent aussi constituer une progression arithmétique. Enfin il peut arriver que l'annuité qui comporte le service de l'intérêt de l'emprunt et de l'amortissement demeure constante. Dans une telle éventualité, comme il n'y a pas d'intérêt à payer sur les titres qui ont été remboursés, la part de l'annuité qui est consacrée au service des intérêts diminue d'année en année, par suite

celle de l'amortissement augmente. Or on sait que dans ce cas les amortissements constituent une progression géométrique, d'où leur nom *d'amortissements progressifs*. C'est précisément ce cas qui va retenir notre attention.

Ajoutons enfin que nous désignons sous le nom de rente toute suite de paiements effectués à des intervalles de temps égaux. Les annuités, aussi bien que les intérêts ou les amortissements constituent des rentes, les unes étant à termes constants, les autres à termes variables.

Dans une récente étude ¹⁾, nous avons examiné le problème de la recherche du taux résultant de l'achat d'une obligation dont on connaît l'époque de son remboursement. Nous avons alors admis une notation, conforme à la notation actuarielle internationale, à laquelle nous nous conformerons ici.

Rappelons donc que nous désignerons par: i_0 le taux nominal de l'emprunt, c son cours et n sa durée (c'est-à-dire le nombre d'années pendant lesquelles s'effectue l'amortissement). Le cours c n'est pas autre chose que le prix d'une obligation dont la valeur nominale serait l'unité de capital. En général la valeur nominale d'une obligation est caractérisée par C , son prix par P . Le cours c n'est autre que le rapport $\frac{P}{C}$. Il est tout d'abord fixé par le prospectus d'émission de l'emprunt. Plus tard c'est la cote de la bourse qui l'indique.

Une remarque préalable s'impose. Admettons que le nombre total des titres dont se composait l'emprunt à l'origine soit désigné par N , que D_1 titres soient remboursés à la fin de la première année, D_2 à la fin de la seconde, . . . , D_n à la fin de la dernière. Il va de soi que l'on a :

$$D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = N.$$

L'acheteur d'une obligation ignore l'époque de son remboursement puisque celui-ci résulte d'un tirage au sort et qu'il peut se produire indifféremment à la fin de la première, de la seconde, . . . , de la dernière année. Si l'on raisonne comme nous l'avons fait dans notre précédente étude, on est amené à calculer n taux successifs suivant que le remboursement du titre a lieu au bout d'un an, de 2 ans, . . . , de n années. Le taux cherché sera l'un des taux ainsi calculés, mais lequel ? on l'ignore.

¹⁾ Voir: volume 59, fascicule 2, page 261.

S'il n'y avait qu'un seul souscripteur pour l'ensemble des titres de l'emprunt, on serait tout naturellement conduit au calcul d'un *taux moyen*. Or c'est précisément ce taux moyen que nous nous proposons de chercher.

Il convient encore de remarquer que le possesseur d'un petit nombre de titres d'un emprunt déterminé ne réalisera pas nécessairement un taux effectif égal au taux moyen. Il y aura en général un écart entre ces deux taux. Mais on constate, et la théorie le prouve également, que cet écart tend à diminuer si l'on possède un nombre de titres de plus en plus grand de l'emprunt considéré. Mais le problème ainsi envisagé est du ressort du calcul des probabilités. Nous ne l'aborderons pas ici. Il a fait du reste l'objet d'une étude particulière à laquelle nous renvoyons le lecteur ¹⁾. Sa solution s'obtient à l'aide des «Inégalités de Tchebichef».

Solution rationnelle

Voici le problème que nous devons résoudre :

Un emprunt comporte N titres de valeur nominale C, son taux nominal est i_0 . Il est amortissable en n années par le paiement de n annuités toutes égales à une somme A. Sachant que ces obligations se remboursent à leur valeur nominale C, que leur prix est P, quel est le taux moyen de l'opération ?

Les annuités forment une rente à termes constants dont la valeur initiale, calculée au taux nominal i_0 est égale à la valeur nominale NC de l'emprunt. Ainsi :

$$NC = A a_{\overline{n}|(i_0)}. \quad (1)$$

Si i est le taux moyen cherché, la valeur de la même rente, calculée au taux i donne NP . Par suite :

$$NP = A a_{\overline{n}|(i)} = A_1 a_{\overline{n}|}. \quad (2)$$

En rappelant que le quotient $\frac{P}{C} = c$ la division de (2) par (1) conduit à

$$c = \frac{a_{\overline{n}|(i)}}{a_{\overline{n}|(i_0)}}. \quad (3)$$

¹⁾ Jules Chuard: Les emprunts et les Inégalités de Tchebichef Publication du IV^e centenaire de l'Université de Lausanne. 1937.

La quantité $a_{\overline{n}|}$ est la valeur initiale, calculée au taux i , d'une rente de n termes égaux à l'unité, payables à terme échu. La quantité $a_{\overline{n}|}(i_0)$ est la valeur initiale de la même rente, calculée au taux i_0 .

De l'expression (3) on déduit que :

$$a_{\overline{n}|} = c a_{\overline{n}|}(i_0). \quad (4)$$

La recherche du taux i s'effectue maintenant à l'aide de tables financières. Il y a en librairie une grande variété qui portent des noms différents: Tables de l'intérêt composé, des annuités et de l'amortissement ou simplement Tables d'intérêts et d'annuités. Ces tables donnent les valeurs de $a_{\overline{n}|}$ pour un très grand choix de taux allant de $\frac{1}{2}\%$ à 15% et pour des valeurs de la durée n comprises entre 1 et 100 et parfois davantage. Le taux nominal i_0 , qui est un taux usuel, est certainement contenu dans une de ces tables. Une simple lecture donne la valeur de $a_{\overline{n}|}(i_0)$. Le calcul se termine alors par le moyen d'une interpolation linéaire. C'est ce que nous montrons dans les exemples qui suivent.

Exemple I. Un emprunt dont le taux nominal est 3% est coté 90% ($c = 0,9$). Il est amortissable par annuités constantes en 18 ans. Quel est son taux moyen ?

La table financière donne

$$3\% \quad a_{\overline{18}|} = 13,7535.$$

Le taux i cherché est solution de l'équation

$$a_{\overline{18}|} = 0,9 \cdot 13,7535 = 12,3782.$$

On lit dans la même table

$$4,25\% \quad a_{\overline{18}|} = 12,4059,$$

$$4,30\% \quad a_{\overline{18}|} = 12,3561.$$

Il s'en suit que le taux i est compris entre $4,25\%$ et $4,30\%$. L'interpolation linéaire conduit à $4,27\%$ avec une approximation qui est largement suffisante.

Exemple II. Même donnée que dans l'exemple I, mais avec une durée de 48 ans.

La table financière donne

$$3\% \quad a_{\overline{48}|} = 25,2667.$$

Le taux i est solution de l'équation

$$a_{\overline{48}|} = 0,9 \cdot 25,2667 = 22,7400.$$

On lit dans la table financière

$$3,55\% \quad a_{48|} = 22,8898,$$

$$3,60\% \quad a_{48|} = 22,6912.$$

Le taux i est compris entre les taux 3,55 % et 3,60 %. L'interpolation linéaire conduit à 3,59 %.

Solution pratique

La méthode dont nous venons de rappeler le principe est simple. Elle nécessite, cela va de soi, l'usage d'une table financière. Toutefois elle est loin d'être généralement utilisée dans les banques. On lui préfère le plus souvent une méthode empirique dont nous allons exposer la substance.

Dans notre précédente étude sur les emprunts remboursables au pair, à échéance fixe, d'une durée de n années, nous avons vu que l'on calcule pratiquement le rendement d'une obligation par la formule

$$i' = \frac{i_0}{c} + \frac{1-c}{n} = \frac{i_0}{c} - \frac{c-1}{n}. \quad (5)$$

Lorsque l'emprunt est amortissable par annuités constantes, i' devient un taux moyen qui se calcule par la formule

$$i' = \frac{i_0}{c} + \frac{1-c}{\frac{2}{3}n} = \frac{i_0}{c} - \frac{c-1}{\frac{2}{3}n}. \quad (6)$$

La justification de la formule (6) ne semble pas à première vue très heureuse. Pourtant son utilisation, comme nous allons le voir, donne des résultats satisfaisants. Son avantage réside dans le fait qu'elle ne nécessite l'emploi d'aucune table financière. Elle se justifie par le raisonnement suivant :

On admet tout d'abord que l'emprunt amortissable considéré est remplacé par un emprunt fictif de même montant et de même taux nominal mais dont tous les titres seraient remboursés à la même époque. Le cours étant également inchangé il s'agit de déterminer la durée de cet emprunt fictif. Or on admet que celle-ci coïncide avec l'échéance moyenne des amortissements de l'emprunt considéré et l'on fixe, arbitrairement, cette échéance moyenne aux deux tiers (67 %) de la durée de l'emprunt.

Nous avons rappelé plus haut que dans un emprunt amortissable par annuités constantes, les amortissements forment une progression géométrique. Nous pouvons préciser maintenant que si i désigne le taux, la raison de cette progression géométrique est $u = 1 + i$. Nous verrons plus loin que son échéance moyenne dépend à la fois du taux i et de la durée n . Il peut arriver qu'elle atteigne les deux tiers de n , mais le plus souvent ce n'est pas le cas.

Comme nous ne pensons pas faire une étude algébrique de cette méthode, nous nous bornerons tout d'abord à l'examen des deux exemples que nous avons examinés plus haut.

Exemple I. L'emprunt amortissable par annuités constantes en 18 ans a pour taux nominal 3%. Il est coté 90%. Quel est le taux moyen i' ?

La formule (6) donne

$$i' = \frac{0,03}{0,90} + \frac{0,1}{12} = 0,03\ 333 + 0,00\ 833 = 0,04\ 166.$$

Le taux i' est donc égal à 4,17%. Il est inférieur de 0,10% au taux i obtenu plus haut.

Exemple II. Dans l'emprunt ci-dessus, seule la durée a changé. Elle est devenue 48 ans.

La formule (6) donne

$$i' = \frac{0,03}{0,90} + \frac{0,1}{32} = 0,03\ 333 + 0,00\ 312 = 0,03\ 645.$$

Le taux i' est ici égal à 3,65%. Il est maintenant supérieur de 0,06% au taux i obtenu plus haut.

Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes

Il est bien évident que l'on ne saurait comparer d'une façon analytique les expressions qui conduisent soit au taux i , soit au taux i' . Les formules (4) et (6) sont trop différentes dans leur forme et dans leur nature. La meilleure manière d'agir, nous semble-t-il, consiste à traiter numériquement quelques exemples, judicieusement choisis, comme nous l'avons du reste fait dans notre précédente étude. Il sera alors possible d'en déduire des conclusions de caractère général.

Nous admettons donc que le cours c et le taux nominal i_0 sont fixes. Nous envisageons des durées n de plus en plus grandes et nous déterminons les valeurs correspondantes des taux i et i' . Il convient enfin de distinguer les cas où le cours c est supérieur à l'unité de ceux où c est inférieur à l'unité. Dans le premier cas on dit que l'emprunt est coté au dessous du pair tandis que la cotation se fait au dessus du pair dans le second.

a) Titres cotés au dessous du pair

Taux nominal 3%

n	i	i'	$i - i'$
Cours $c = 0,90 = 90\%$			
10	5,12 %	4,83 %	0,29 %
20	4,17 %	4,08 %	0,09 %
30	3,84 %	3,83 %	0,01 %
40	3,67 %	3,71 %	—0,04 %
50	3,57 %	3,63 %	—0,06 %
60	3,51 %	3,58 %	—0,07 %

Cours $c = 0,80 = 80\%$

10	7,63 %	6,75 %	0,88 %
20	5,55 %	5,25 %	0,20 %
30	4,83 %	4,75 %	0,08 %
40	4,47 %	4,50 %	—0,03 %
50	4,26 %	4,35 %	—0,09 %
60	4,11 %	4,25 %	—0,14 %

Cours $c = 0,70 = 70\%$

10	10,67 %	8,79 %	1,88 %
20	7,22 %	6,54 %	0,68 %
30	6,03 %	5,79 %	0,24 %
40	5,41 %	5,41 %	0,00 %
50	5,09 %	5,19 %	—0,10 %
60	4,86 %	5,04 %	—0,18 %

Taux nominal 4%

n	i	i'	$i - i'$
Cours $c = 0,90 = 90\%$			
10	6,17 %	5,94 %	0,23 %
20	5,22 %	5,19 %	0,03 %
30	4,89 %	4,96 %	— 0,07 %
40	4,73 %	4,82 %	— 0,09 %
50	4,64 %	4,74 %	— 0,10 %
60	4,58 %	4,69 %	— 0,11 %

Cours $c = 0,80 = 80\%$

10	8,78 %	8,00 %	0,78 %
20	6,67 %	6,50 %	0,17 %
30	5,95 %	6,00 %	— 0,05 %
40	5,60 %	5,75 %	— 0,15 %
50	5,40 %	5,60 %	— 0,20 %
60	5,27 %	5,50 %	— 0,23 %

Cours $c = 0,70 = 70\%$

10	11,88 %	10,21 %	1,67 %
20	8,43 %	7,96 %	0,47 %
30	7,25 %	7,21 %	0,04 %
40	6,67 %	6,84 %	— 0,17 %
50	6,34 %	6,61 %	— 0,27 %
60	6,14 %	6,46 %	— 0,32 %

Analyse de ces résultats

L'examen des tableaux qui précèdent montre que, le taux nominal et le cours d'un emprunt étant fixés, la valeur du taux i est supérieure à celle du taux i' si la durée de l'emprunt est petite. Si cette durée devient grande, c'est l'inverse qui se produit. Nous n'avons envisagé ici que les taux 3% et 4%. Il est évident que l'on aurait fait les mêmes constatations si l'on avait choisi d'autres taux nominaux. Il y a donc une durée pour laquelle les deux valeurs sont égales. Cette durée dépend à la fois

du taux nominal et du cours de l'emprunt. Si donc on reprend les deux cas étudiés plus haut, on constate que cette égalité se produit lorsque :

3 %		
$c = 0,9$	$n = 31$ ans	$i = i' = 3,82$ %
$c = 0,8$	$n = 37$ ans	4,56 %
$c = 0,7$	$n = 40$ ans	5,41 %

4 %		
$c = 0,9$	$n = 23$ ans	5,10 %
$c = 0,8$	$n = 27$ ans	6,11 %
$c = 0,7$	$n = 31$ ans	7,17 %

Ainsi cette durée, pour un taux nominal donné, change avec le cours. Elle grandit au fur et à mesure que le cours baisse. Le taux correspondant grandit également.

Si le taux nominal augmente, cette valeur particulière est atteinte pour des durées plus faibles, mais naturellement avec des taux plus élevés.

On constate au surplus que pour des emprunts de très grande durée les deux valeurs de i et de i' tendent à se rapprocher. Les écarts $i - i'$ entre ces deux taux qui étaient tout d'abord positifs deviennent négatifs en passant par zéro. Ils commencent alors par s'accroître, se stabilisent puis diminuent en tendant vers zéro. C'est ce que nous allons montrer par un nouvel exemple.

	$i_0 = 3\frac{1}{2}$ %		$c = 0,85$	
n	i	i'	$i - i'$	
10	6,86 %	6,37 %	0,49 %	
20	5,37 %	5,24 %	0,13 %	
29	4,89 %	4,89 %	0,00 %	
50	4,45 %	4,57 %	— 0,12 %	
80	4,24 %	4,40 %	— 0,16 %	
100	4,18 %	4,34 %	— 0,16 %	
1000	4,10 %	4,10 %	0,00 %	

C'est assez curieux que l'on retrouve ici, avec des amplitudes différentes, il est vrai, des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus pour les emprunts remboursables à échéance fixe.

b) Titres cotés au dessus du pair

Alors que dans notre précédente étude, ce cas ne soulevait aucune difficulté, il n'en est plus de même dans celle-ci. C'est ce qui nous oblige à présenter plusieurs tableaux distincts.

Nous adopterons le cours de 106 %, soit $c = 1,06$ et examinerons successivement les taux nominaux de 3 %, 4 %, 5 % et 6 %. Les calculs donnent les résultats suivants :

		$i_0 = 3\%$	$c = 1,06$	
n	i	i'	$i - i'$	
4	0,61 %	0,58 %	0,03 %	
6	1,27 %	1,33 %	— 0,06 %	
8	1,63 %	1,70 %	— 0,07 %	
10	1,87 %	1,93 %	— 0,06 %	
20	2,38 %	2,38 %	0,00 %	
50	2,70 %	2,65 %	0,05 %	

		$i_0 = 4\%$	$c = 1,06$	
5	2,00 %	1,97 %	0,03 %	
6	2,25 %	2,27 %	— 0,02 %	
8	2,60 %	2,64 %	— 0,04 %	
10	2,85 %	2,87 %	— 0,02 %	
14	3,13 %	3,13 %	0,00 %	
20	3,35 %	3,32 %	0,03 %	
50	3,67 %	3,59 %	0,08 %	

		$i_0 = 5\%$	$c = 1,06$	
3	1,90 %	1,72 %	0,18 %	
5	2,93 %	2,92 %	0,01 %	
6	3,21 %	3,22 %	— 0,01 %	
8	3,58 %	3,59 %	— 0,01 %	
10	3,82 %	3,82 %	0,00 %	
20	4,32 %	4,27 %	0,05 %	
50	4,63 %	4,54 %	0,09 %	

n	$i_0 = 6\%$ $c = 1,06$		$i - i'$
	i	i'	
3	2,91 %	2,66 %	0,25 %
4	3,50 %	3,41 %	0,09 %
5	3,89 %	3,86 %	0,03 %
7	4,39 %	4,37 %	0,02 %
9	4,68 %	4,66 %	0,02 %
10	4,79 %	4,76 %	0,03 %
20	5,30 %	5,21 %	0,09 %
50	5,59 %	5,48 %	0,11 %

n	$i_0 = 6\%$ $c = 1,10$		$i - i'$
	i	i'	
3	1,00 %	0,45 %	0,55 %
5	2,60 %	2,45 %	0,15 %
7	3,39 %	3,31 %	0,08 %
8	3,65 %	3,58 %	0,07 %
9	3,86 %	3,78 %	0,08 %
17	4,71 %	4,57 %	0,14 %
20	4,85 %	4,70 %	0,15 %
50	5,34 %	5,15 %	0,19 %
100	5,44 %	5,30 %	0,14 %
500	5,45 %	5,42 %	0,03 %

L'examen de ces différents tableaux est suggestif. Il fait constater tout d'abord que si la durée n de l'emprunt est petite, le taux i est toujours supérieur au taux i' . La différence $i - i'$ diminue lorsque la durée augmente. Si le taux nominal est petit, elle devient égale à zéro pour une valeur particulière de n puis prend des valeurs négatives. Elle passe de nouveau par zéro pour une autre valeur de n pour demeurer ensuite positive. Les écarts entre i et i' ne sont jamais très importants si l'on excepte les petites valeurs de n dont le caractère théorique ne présente aucun intérêt dans la pratique des affaires.

Lorsque le taux nominal est élevé, la différence $i - i'$ demeure constamment positive. Elle diminue jusqu'à un certain minimum qui dépend à la fois du taux nominal et du cours de l'emprunt puis reprend de l'ampleur pour diminuer une fois encore jusqu'à tendre vers zéro.

L'écart qui apparaît ainsi demeure de faible amplitude, c'est la raison pour laquelle nous ne nous sommes pas attardés à rechercher l'époque à laquelle se produit son maximum.

Conclusions

L'étude à laquelle nous venons de nous livrer montre que si la formule pratique qui conduit au taux i' ne peut s'appuyer sur un raisonnement théorique valable, elle n'en conduit pas moins à des résultats satisfaisants.

Il y a lieu, cela va de soi, d'exclure les petites valeurs de n , comme aussi du reste les très grandes que la pratique des affaires élimine sans autre. Les écarts que l'on retient dans ces conditions demeurent dans des limites fort rapprochées et sont même moins importants que ceux que l'on rencontre dans le cas des emprunts remboursables à échéance fixe.

Ceci dit, il nous paraît tout indiqué de terminer cette étude par l'examen, du point de vue théorique, de la recherche de l'échéance moyenne d'une rente en progression géométrique.

Echéance moyenne d'une rente en progression géométrique

Soit donc i un taux d'intérêt: $u = 1 + i$. Nous considérons une rente dont le premier terme est A , le second Au , le troisième Au^2 , ..., le terme de rang n , Au^{n-1} . La somme des termes de la rente vaut

$$A + Au + Au^2 + \dots + Au^{n-1} = A s_{\overline{n}|}$$

si comme nous l'avions fait on adopte la notation actuarielle. Si V_0 est la valeur initiale de la rente, escomptée à intérêts composés au taux i , l'on a:

$$V_0 = Av + Auv^2 + \dots + Au^{n-1}v^n = nAv.$$

Si maintenant nous désignons par k la durée de l'échéance moyenne, l'on doit avoir

$$nAvu^k = A s_{\overline{n}|}$$

car l'échéance moyenne d'une rente est l'époque à laquelle la rente a précisément pour valeur la somme des valeurs nominales de ses termes. On voit immédiatement que A disparaît, ce qui signifie que le montant

du premier terme de la rente ne joue aucun rôle dans le calcul de k . Il s'en suit finalement que

$$u^{k-1} = \frac{s_{\overline{n}|}}{n}.$$

Telle est la formule qui permet de calculer l'échéance moyenne d'une rente dont les termes forment une progression géométrique de raison u . Dès que le taux i et le nombre n de termes de la rente sont donnés, il est aisé, à l'aide d'une table financière, d'obtenir le nombre k . Pour ne pas allonger, nous n'en donnerons qu'un exemple, en admettant que le taux i est le $4\frac{1}{2}\%$.

$i = 4\frac{1}{2}\%$		
n	k	$\frac{k}{n}$ en %
5	3,04	61 %
10	5,68	57 %
15	8,41	56 %
20	11,23	56 %
30	17,12	57 %
40	23,36	58 %
50	29,91	60 %
100	66,54	67 %

Pour des durées supérieures à 100 ans, on aurait obtenu des valeurs de k telles que le rapport $\frac{k}{n}$ serait demeuré supérieur à 67 %.

Il est entendu que l'on aurait pu envisager d'autres taux, soit inférieurs, soit supérieurs à $4\frac{1}{2}\%$. On aurait obtenu des résultats de même nature que ceux qui sont donnés par le tableau ci-dessus. On constate alors que si le taux est inférieur à $4\frac{1}{2}\%$, l'échéance moyenne n'atteindra le 67 % de la durée de la rente que si celle-ci dépasse 100 ans. Il faut que le taux soit supérieur à 5 % pour que ce fait se produise avant 100 ans. C'est ce qui nous permet d'affirmer qu'en général l'échéance moyenne d'une rente en progression géométrique est inférieure aux deux tiers de la durée de celle-ci.

Ajoutons encore, pour être complet, que cette coïncidence a lieu pour de très petites valeurs de n (inférieures à 3), valeurs qui ne sauraient retenir notre attention. Il valait donc la peine de fixer ces différents points.

Zusammenfassung

Nachdem der Verfasser in Heft 1959, 2 sich mit der Renditenbestimmung von Wertpapieren mit festem Verfall befasst hat, untersucht er in vorliegender Arbeit in analoger Weise die Renditenbestimmung mittels einer Arbeitsformel bei Annuitätenleihen. Die Ergebnisse der Arbeitsformel werden in zahlreichen numerischen Beispielen mit den genauen Werten in Vergleich gestellt.

Summary

The author, after his work in volume 2, 1959 concerning the method for determining the yield of securities with fixed maturity date, deals in the present work, by analogy, with the determination of the yield by means of a practical formula of loans with progressive amortisation. The results obtained are compared with the exact yields.

Riassunto

L'autore, dopo essersi occupato nel fascicolo 2, 1959 della valutazione del tasso di rendimento delle obbligazioni a scadenza fissa esamina, con il presente lavoro, in modo analogo la valutazione del tasso di rendimento con l'aiuto di una formola pratica usata in caso di prestiti ad ammortamento progressivo. I risultati ottenuti sono paragonati ai tassi esatti con molti esempi numerici.