Approximative Reservenberechnung mit Hilfe der linearen Programmierung

Approximative Reservenberechnung mit Hilfe der linearen Programmierung

Von M. Frischknecht, Zürich

Zusammenfassung

Anhand eines Beispieles für eine approximative Reservenberechnung, bei dem durch Ermittlung von Maximal- und Minimalwerten ein zuverlässiges Ergebnis eingegabelt werden kann, wird gezeigt, dass sich die lineare Programmierung auch in versicherungstechnischen Berechnungen anwenden lässt.

Die lineare Programmierung hat in den letzten Jahren, insbesondere in den angelsächsischen Ländern, im Rahmen der Wirtschaftstheorie und der betrieblichen und volkswirtschaftlichen Planung grosse Bedeutung erlangt. Bei uns ist ihre Theorie wie auch ihre Anwendung noch wenig bekannt; mit Rücksicht darauf sollen hier einige ihrer Wesenszüge vorgängig dargestellt werden, soweit dies zum besseren Verständnis der nachfolgend behandelten Anwendung auf die Reservenberechnung dienlich ist [1]).

I.

Das Charakteristikum der linearen Programmierung lässt sich am einfachsten anhand von zwei praktischen Anwendungsbeispielen darlegen:

Erstes Beispiel

Das Fabrikationsprogramm einer Firma umfasst eine Auswahl von verschiedenen Erzeugnissen, zu deren Herstellung grundsätzlich die gleichen Rohmaterialien, Maschinen, Apparate, Belegschaften usw., aber für jedes Fabrikat in verschiedener Menge oder Zahl benötigt werden. Die Verkaufspreise der verschiedenen Produkte sind ebenfalls

[1]) Literaturhinweise finden sich am Schlusse dieser Arbeit.

verschieden. Mit Hilfe der linearen Programmierung ist es nun möglich, das Fabrikationsprogramm dieser Firma so festzusetzen, dass ihr unter der Annahme, dass alle Erzeugnisse verkauft werden können, innerhalb einer Fabrikationsperiode ein maximaler Verkaufserlös erwächst.

Zweites Beispiel

Der menschliche Körper benötigt zu seinem normalen Fortbestehen u.a. eine bestimmte Mindestmenge an Kalorien und Vitaminen. Dieser Mindestbedarf ist durch die tägliche Nahrungsmittelaufnahme, bei der die einzelnen verfügbaren Nahrungsmittel die Kalorien und Vitamine in verschiedenen Mengen enthalten, zu decken. Hier erlaubt die lineare Programmierung die Aufstellung eines minimalen Ernährungsplanes, durch den einerseits der Bedarf an Kalorien und Vitaminen innerhalb eines Zeitabschnittes gerade gedeckt wird, und bei dem anderseits die Ernährungskosten ein Minimum werden.

Als Zusammenfassung der beiden Beispiele kann gesagt werden:

«Die lineare Programmierung ist eine wissenschaftliche Methode, die erlaubt, auf Grund von linearen Beziehungen ein maximal günstiges Programm festzulegen.»

Zur Lösung von solchen Aufgaben, in denen also ein maximaler Erfolg oder ein minimaler Aufwand erstrebt wird, wurden verschiedene Methoden, unter anderem die sogenannte *Simplexmethode*, entwickelt. Diese beruht auf einem System von linearen Ungleichungen, als formelmässiger Darstellung von linear veränderlichen Elementen. Für ein Maximumproblem hat das erwähnte System folgendes Aussehen:

$$\begin{matrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \leqq S_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n \leqq S_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \dots + a_{kn}\,x_n \leqq S_k, \end{matrix}$$

worin die a_{ij} die einzelnen Elemente, die S_i die maximal zur Verfügung stehende Menge dieser Elemente und die x_j die Variablen darstellen. Das zu maximierende Ergebnis der Programmierung lässt sich seinerseits in eine lineare Gleichung bringen, von der Form:

$$y_1\,x_1 + y_2\,x_2 + \dots + y_n\,x_n = Y.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, bei den vorgegebenen, empirisch bestimmten a_{ij}, S_i und y_j, die Variablen x_j so zu bestimmen, dass Y ein Maximum wird.

Die Lösung der Aufgabe geht so vor sich, dass vorerst durch Einführung von Hilfsvariablen, den sogenannten Schlupfvariablen, die Ungleichungen in Gleichungen verwandelt werden, womit sich dann folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \dots + & a_{1n}\,x_n & + & x_{n+1} & = & S_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \dots + & a_{2n}\,x_n & + & x_{n+2} & = & S_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}\,x_1 & + & a_{k2}\,x_2 & + \dots + & a_{kn}\,x_n & + & x_{n+k} & = & S_k\,. \end{array}$$

Die zu den Schlupfvariablen x_{n+1} bis x_{n+k} gehörenden y sind selbstverständlich Null, so dass die Lösungsgleichung die Form erhält:

$$y_1\,x_1 + y_2\,x_2 + \dots + y_n\,x_n + 0\,x_{n+1} + \dots + 0\,x_{n+k} = Y\,.$$

Das System der Bedingungsgleichungen in dieser Form ist nicht lösbar, da darin mehr Variablen als Gleichungen vorkommen; um die Lösbarkeit zu erreichen, müssen n Variablen Null gesetzt werden. Der Kernpunkt des Verfahrens der Simplexmethode besteht nun darin, die Auswahl der grösser als Null gesetzten Variablen (oder Schlupfvariablen) so zu treffen, dass Y ein Maximum wird. In der Praxis hat sich dabei folgendes Vorgehen als am zweckmässigsten erwiesen:

In erster Linie werden die ursprünglichen Variablen x_1 bis x_n Null und die Schlupfvariablen grösser Null gesetzt, Y wird dadurch vorerst ein Minimum. Nachher wird systematisch eine der Null gesetzten Variablen nach der andern gegen eine der grösser Null gesetzten ausgetauscht. Der Austausch erfolgt dabei in der Weise, dass der Wertzuwachs von Y jedesmal möglichst gross wird. Das Vorgehen wird dabei so lange wiederholt, bis Y ein Maximum erreicht.

Anhand einer graphischen Darstellung lässt sich das Verfahren in einem Beispiel mit zwei Variablen und drei Ungleichungen anschaulich zeigen:

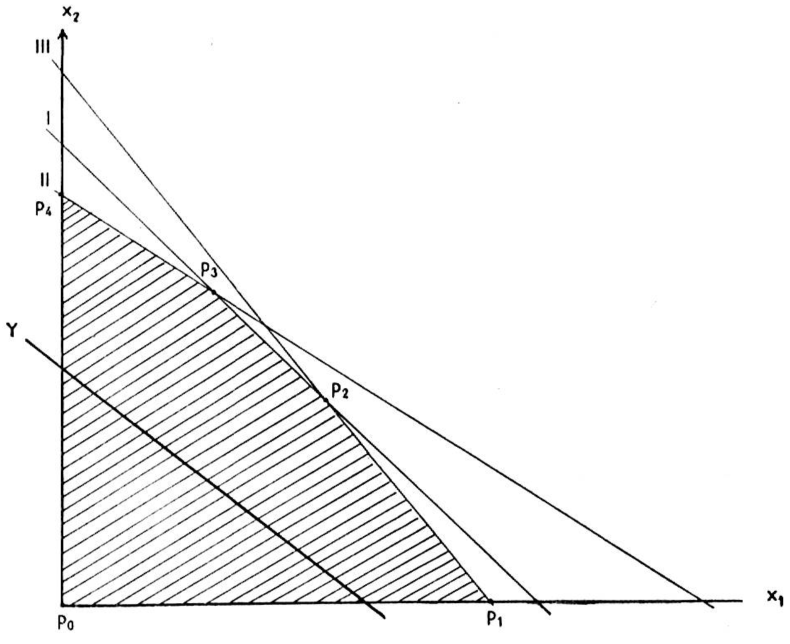
Gegeben sind die drei Bedingungs-Ungleichungen:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \leqq S_1 \qquad \text{(I)}$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \leqq S_2 \qquad \text{(II)}$$
$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 \leqq S_3\,, \qquad \text{(III)}$$

welche nach Einführung der Schlupfvariablen die Form erhalten:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + x_3 &= S_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + x_4 &= S_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + x_5 &= S_3\,. \end{aligned}$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit x_1 und x_2 als Ordinaten grenzt jede der drei Ungleichungen einen Bereich ab, innerhalb dem die betreffende Ungleichung erfüllt ist. Da x_1 und x_2 nicht negativ sein können, sind diese drei Bereiche je ein rechtwinkliges Dreieck im zweiten Quadranten mit den Gleichungen $\sum a_{ij}\,x_j = S_i$ (in denen also die zugehörige Schlupfvariable Null ist) als Hypotenuse (vgl. Fig. 1).



Figur 1

Der Bereich, in welchem alle drei Ungleichungen erfüllt sind, liegt im schraffierten Gebiet, mit den Eckpunkten P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4. Im Sprachgebrauch der linearen Programmierung wird ein solches Polygon als konvexes Gebiet bezeichnet. Die Lösungsgleichung

$$y_1\,x_1 + y_2\,x_2 = Y$$

liegt ebenfalls auf einer Geraden, der Lösungsgeraden, die sich mit zunehmendem Wert von Y nach oben verschiebt. Das Maximum für Y

wird nun offensichtlich dann erreicht, wenn die Lösungsgerade das konvexe Gebiet gerade noch berührt, was hier im Punkt P_3 der Fall ist; je nach Neigung der Geraden könnte dies aber auch im Punkt P_1, P_2 oder P_4 sein.

Der weiter oben geschilderte Lösungsvorgang mit dem Austausch der Variablen geht in diesem Beispiel folgendermassen vor sich:

Von den insgesamt fünf Variablen können drei als grösser Null vorbestimmt werden, und die zwei andern müssen Null gesetzt werden. Als erstes werden nun die drei Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5 grösser Null gesetzt, so dass die eigentlichen Variablen x_1 und x_2 Null sind. Die Lösungsgerade geht damit durch den Punkt P_0, und Y ist Null. Als nächstes wird die Schlupfvariable x_4 Null und an ihrer Stelle x_2 grösser Null gesetzt, worauf jetzt die beiden Variablen x_1 und x_4 Null sind. Der Punkt, in dem dies zutrifft, ist P_4, und die Lösungsgerade geht demzufolge durch diesen Punkt, so dass Y jetzt grösser Null ist. Im nächsten Schritt wird die Schlupfvariable x_3 Null und dafür x_1 grösser Null gesetzt; jetzt sind die beiden Schlupfvariablen x_3 und x_4 Null. Diese Bedingung trifft für P_3 zu, und die Lösungsgerade geht durch diesen Punkt, wobei, wie oben erwähnt wurde, Y jetzt den grössten Wert erreicht hat. Im vorliegenden Beispiel macht es den Anschein, dass das Vorgehen vereinfacht werden könnte dadurch, dass nicht im Punkt P_0 begonnen wird, sondern in einem dem Maximum näher liegenden. In der Praxis hat sich jedoch das hier geschilderte Verfahren als zweckmässiger erwiesen.

Der Lösungsvorgang bleibt sich für Minimum-Aufgaben und für Beispiele mit mehr als zwei Variablen grundsätzlich gleich, und die gesuchte Maximum- oder Minimumbedingung kann stets als Berührungspunkt eines mehrdimensionalen konvexen Gebietes mit einer Hyperebene aufgefasst werden.

II.

Im folgenden soll nun die Anwendung der linearen Programmierung in einer versicherungstechnischen Berechnung gezeigt werden; es handelt sich um die approximative Berechnung der Prämienreserve nach t Jahren, in einem Versicherungsbestand, dessen altersmässige Struktur nicht bekannt ist. Das Anwendungsbeispiel stützt sich auf die Arbeit der beiden Engländer S. Benjamin und C. W. Benett im «Journal of the Institute of Actuaries». Es wird dabei vom Gedanken ausgegangen, dass bei der Durchführung von derartigen oder ähnlichen Approximationsberechnungen vielfach Näherungsmethoden verwendet werden, deren Güte oft nicht genau beurteilt werden kann. Die lineare Programmierung dagegen erlaubt es, nicht nur ein befriedigendes Ergebnis zu erzielen, sondern auch, weil in der Rechnung jeweils ein Maximal- und ein Minimalwert ermittelt wird, ein Fehlermass zu berechnen. Es kann auch gezeigt werden, wie die Leistungsfähigkeit der Methode und dadurch die Genauigkeit der Approximation sukzessive gesteigert werden kann, dadurch dass im Verlaufe der Rechnung immer weitere Unterlagen herangezogen werden. So werden der Reihe nach folgende Annahmen getroffen:

1. Vom Bestand ist lediglich das Total der Versicherungssummen bekannt,
2. zusätzlich ist noch das Total der Bruttoprämien bekannt,
3. und ausserdem steht die Summenverteilung des letzten Eintrittsjahrganges im Detail zur Verfügung.

Für die Durchführung der einzelnen Berechnungen wird aus der Theorie der linearen Programmierung das System der linearen Gleichungen

$$\sum a_{ij}\, x_j = S_i, \tag{0.1}$$

mit der Lösungsgleichung

$$\sum y_j\, x_j = Y \tag{0.2}$$

übernommen sowie das Prinzip, einzelne der Variablen Null und andere grösser Null zu setzen und die Auswahl so zu treffen, dass Y ein Maximum oder ein Minimum wird. Im hier vorliegenden Spezialfall sind von Anfang an mehr Variablen als Ungleichungen vorhanden; es kann darum hier direkt von Gleichungen anstelle von Ungleichungen ausgegangen werden, und die Einführung von Schlupfvariablen erübrigt sich demzufolge.

Im einzelnen wird den Berechnungen ein Bestand an gemischten Versicherungen auf Schlussalter 65 zugrunde gelegt, der im Rahmen eines Gruppenversicherungsvertrages auf den 1. Januar 1955 abgeschlossen worden ist. Das niedrigste Eintrittsalter beträgt 25 Jahre, das höchste 53, und gesucht ist die Prämienreserve am 31. Dezember 1959, d.h. nach $t = 5$ Jahren, für den noch vorhandenen Bestand, nach den Rechnungsgrundlagen TG 1953, $2\frac{1}{2}\,\%$.

1. Rechnung mit dem Summentotal als einzige Bestandesangabe

In Anwendung des Gleichungssystems (0.1) ergibt sich hier bei nur einer Bestandesangabe nur eine einzige Bedingungsgleichung, nämlich

$$x_{25} + x_{26} + \dots + x_{53} = S, \tag{1.1}$$

und daneben die Lösungsgleichung

$$y_{25}\, x_{25} + y_{26}\, x_{26} + \dots + y_{53}\, x_{53} = Y. \tag{1.2}$$

Die Variablen x_j bedeuten hier die auf die einzelnen Alter 25 bis 53 entfallenen Versicherungssummen, S die Totalsumme, y_j die Einheitswerte der Reserven und Y das Total der Reserve, für welches ein Minimal- und ein Maximalbetrag gesucht wird.

Bei nur einer Bedingungsgleichung ist es offensichtlich, dass nur eine Variable grösser als Null sein kann, so dass also die ganze Versicherungssumme in einem einzigen Alter zusammengefasst ist. Ebenso offensichtlich ist, dass sich der kleinste Wert von Y dann ergibt, wenn die ganze Versicherungssumme auf das Alter 25 und der grösste dann, wenn die Summe auf das Alter 53 gelegt wird. Bei einem Summentotal von Fr. 953 093 hat sich so ergeben:

Minimum	Fr. 75 942
Maximum	Fr. 350 176.

Um für die weiteren Vergleiche ein Mass für den Bereich des maximalen Fehlers zu erhalten, wird noch ein standardisierter Fehler ermittelt und als solcher definiert:

$$\frac{\text{Maximum} - \text{Minimum}}{\text{Maximum} + \text{Minimum}}.$$

In der ersten Rechnung ergibt sich:

Standardisierter Fehler = 64,36 %.

Im praktischen Gebrauch werden nun wahrscheinlich weniger die Extremwerte interessieren als irgendein plausibler Zwischenwert, beispielsweise der Mittelwert, der sich hier auf

Fr. 213 059

stellt, und schliesslich wird noch für diesen Mittelwert ein Fehlermass ermittelt, als prozentuale Abweichung gegenüber dem hier zu Vergleichszwecken eruierten genauen Betrag der Reserve von Fr. 126 205; dieser Fehler stellt sich hier auf 70,17 %.

Alle diese ersten Ergebnisse zeigen, dass sich auf Grund der einzigen Bestandesangabe keine befriedigende Approximation ergibt. Diese erste Berechnung wurde auch mehr aus Gründen der Systematik als zur Erzielung von brauchbaren Resultaten durchgeführt.

2. Rechnung mit dem Summentotal und dem Bruttoprämientotal als Bestandesangaben

Dadurch, dass jetzt zwei Bestandeselemente vorliegen, führt die Anwendung des Gleichungssystems (0.1) der linearen Programmierung auf zwei Bedingungsgleichungen, es sind dies

$$\begin{aligned} x_{25} + x_{26} + \ldots + x_{53} &= S \\ p_{25}\, x_{25} + p_{26}\, x_{26} + \ldots + p_{53}\, x_{53} &= P, \end{aligned} \tag{2.1}$$

und die Lösungsgleichung

$$y_{25}\, x_{25} + y_{26}\, x_{26} + \ldots + y_{53}\, x_{53} = Y, \tag{2.2}$$

in denen p_j die Einheitswerte der Prämien und P das Prämientotal des Bestandes, im Betrage von Fr. 29 924 darstellen.

Bei zwei Bedingungsgleichungen können zwei Variablen als grösser Null bestimmt werden, so dass sich die Gleichungen (2.1) wie folgt reduzieren:

$$\begin{aligned} x_u + x_v &= S \\ p_u\, x_u + p_v\, x_v &= P, \end{aligned} \tag{2.3}$$

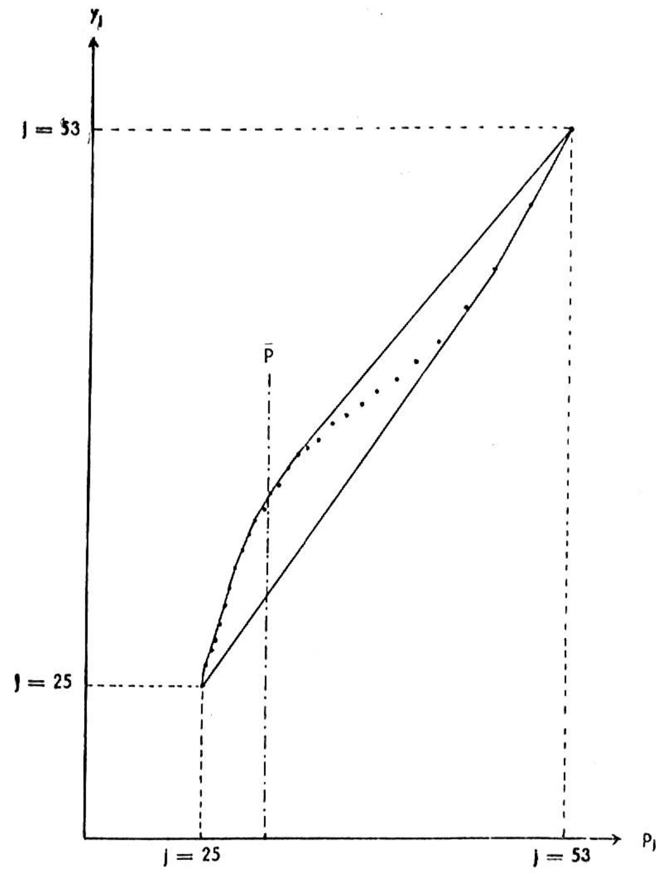
und es sind die beiden Alter u und v so zu wählen, dass sich in der Lösungsgleichung

$$y_u\, x_u + y_v\, x_v = Y, \tag{2.4}$$

für Y in einem Fall ein Minimum und im andern Fall ein Maximum ergibt.

Die Lösung lässt sich hier, in Anbetracht dessen, dass nur zwei Variablen auftreten, auf graphischem Wege am schnellsten finden:

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit p und y als Koordinaten werden die 29 Punkte p_j/y_j eingetragen und alsdann ein Streckenzug so durch diese Punktfolge gelegt, dass in dem daraus entstehenden Polygon, welches als konvexes Gebiet bezeichnet werden kann, keine Winkel von über 180° entstehen und alle Punkte entweder im Innern oder am Rande des konvexen Gebietes liegen (vgl. Fig. 2).



Figur 2

Wenn nun die Aufgabe als physikalisches Problem aufgefasst wird, so können je für das Minimum und das Maximum die auf die zwei zu bestimmenden Alter u und v entfallenden Versicherungssummen als entsprechende Gewichte in zwei Punkten der graphischen Darstellung angesehen werden. Werden diese beiden Gewichte dann ihrerseits durch ihren Schwerpunkt ersetzt, so ist augenscheinlich, dass sich dann ein Minimum oder ein Maximum für die Reserve ergibt, wenn dieser Schwerpunkt an den Rand des konvexen Gebietes zu liegen kommt. Da nun seine Abszisse gleich der Durchschnittsprämie $\bar{p}$ des Bestandes sein muss $\left(\bar{p} = \frac{P}{S}\right)$, werden durch die beiden Schnittpunkte der Senkrechten $\bar{p}$ mit dem Rande des konvexen Gebietes die zwei extremsten Lagen des Schwerpunktes bestimmt, und die Alter u und v ergeben sich aus den den beiden Schnittpunkten benachbarten Eckpunkten des konvexen Gebietes. Im vorliegenden Bestand sind es die Alter 25 und 51 für das Minimum bzw. 35 und 37 für das Maximum.

Nach Auflösen der beiden Bedingungsgleichungen (2.3) und Einsetzen der erhaltenen Werte von x_u und x_v in die Lösungsgleichung (2.4), ergibt sich:

Minimum.	Fr. 123 512
Maximum	Fr. 128 309
Standardisierter Fehler. . . .	1,91 %
Mittelwert	Fr. 125 910
Fehler des Mittelwertes. . . .	—0,23 %.

3. Rechnung mit dem Summentotal, dem Prämientotal und der Summenverteilung des letzten Eintrittsjahrganges als Bestandesangaben

Die Kenntnis der altersmässigen Summenverteilung im Neuversicherungsbestand führt nicht auf eine dritte Bedingungsgleichung im Gleichungssystem; dagegen lässt sie sich für die Erweiterung der Bedingungsgleichungen (2.1) durch Nebenbedingungen verwenden.

a) Wird angenommen, die auf die einzelnen Eintrittsalter entfallenden Beträge an Versicherungssummen seien im Altbestand vom 1. Januar 1955 nie grösser als im Neubestand vom 1. Januar 1959, so lauten die Nebenbedingungen, wenn x_j^0 die einzeln bekannten Summen des Neubestandes darstellen:

$$\begin{aligned} x_{25} &\leqq x_{25}^0 \\ x_{26} &\leqq x_{26}^0 \\ \vdots\;\; & \quad\; \vdots \\ x_{53} &\leqq x_{53}^0 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Als Folge dieser Nebenbedingungen ergeben sich jetzt folgende neuen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_a^0 + x_b^0 + \dots + \varphi x_q^0 + \lambda x_r^0 &= S \\ p_a x_a^0 + p_b x_b^0 + \dots + \varphi p_q x_q^0 + \lambda p_r x_r^0 &= P , \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\text{mit } 0 < \varphi < 1 \text{ und } 0 < \lambda < 1,$$

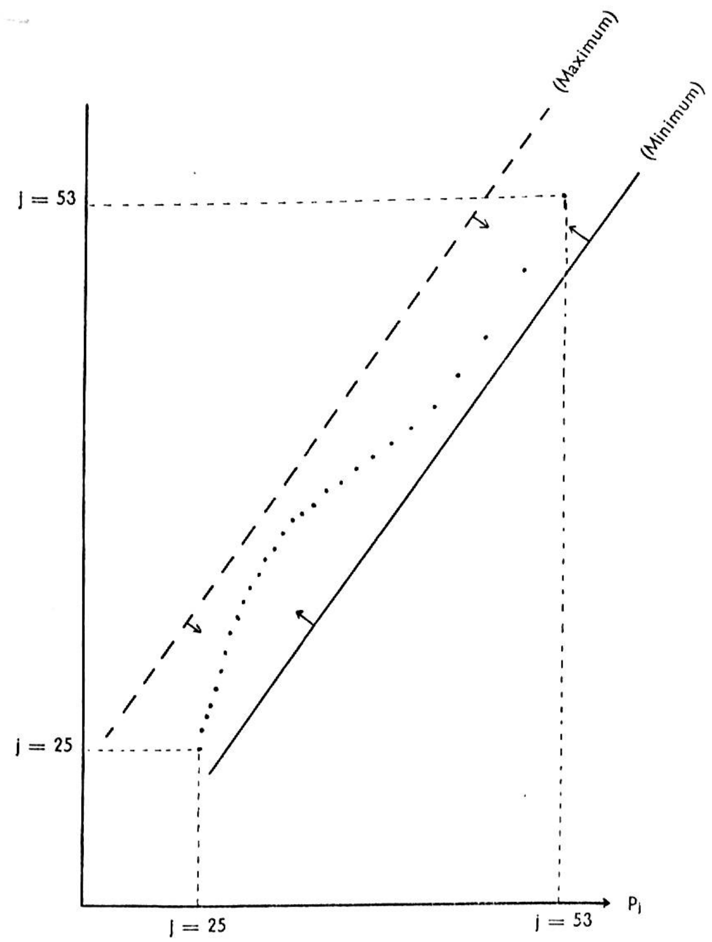
und es sind wiederum die Alter a bis r so auszusuchen, dass in der Lösungsgleichung

$$y_a x_a^0 + y_b x_b^0 + \dots + \varphi y_q x_q^0 + \lambda y_r x_r^0 = Y, \tag{3.3}$$

Y ein Minimum oder ein Maximum wird.

Auch in diesem Fall führt die graphische Darstellung mit den 29 Punkten p_j/y_j am schnellsten zum Ziel:

Neben die Punktefolge wird in ungefähr gleicher Richtung zu deren Verlauf eine Gerade gelegt und diese alsdann parallel zu sich selbst gegen die Punkte hin verschoben, bis sie den ersten Punkt trifft (vgl. Fig. 3).



Figur 3

Diesem Punkt wird die Versicherungssumme x_j^0 im betreffenden Alter j zugelegt. Nachher wird die Gerade weiter verschoben und die durch sie getroffenen Punkte fortlaufend mit den in den betreffenden Altern vorhandenen Summen des Neubestandes versehen, solange, bis sich bei je einer Teilsumme in den letzten zwei Punkten, die Gesamtsumme des Altbestandes ergibt. Die Richtung der Geraden ist dabei gegebenenfalls soweit zu ändern, bis auch das Prämientotal des Altbestandes erreicht werden kann.

Im vorliegenden Bestand waren für die Berechnung des Minimums die Alter 25–28 und 41–53 mit den vollen Summen und die Alter 29 und 40 mit Teilsummen zu belegen, während für die Berechnung des Maximums die vollen Summen auf die Alter 30–45 und die Teilsummen auf die Alter 29 und 46 zu legen waren.

Die Durchrechnung hat sodann ergeben:

Minimum.	Fr. 125 099
Maximum	Fr. 127 210
Standardisierter Fehler. . . .	0,84 %
Mittelwert	Fr. 126 154
Fehler des Mittelwertes. . . .	—0,04 %.

b) Das Ergebnis dieser Rechnung lässt sich noch dadurch verbessern, dass anstelle der Nebenbedingungen (3.1) die folgenden gelten:

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}2\,x_{25}^0 & \leqq & x_{25} & \leqq & 0{,}8\,x_{25}^0 \\ 0{,}2\,x_{26}^0 & \leqq & x_{26} & \leqq & 0{,}8\,x_{26}^0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0{,}2\,x_{53}^0 & \leqq & x_{53} & \leqq & 0{,}8\,x_{53}^0 . \end{array} \tag{3.4}$$

In Berücksichtigung des Umstandes, dass die Gesamtsumme des Altbestandes 58,6 % derjenigen des Neubestandes beträgt, dürften diese Nebenbedingungen einigermassen erfüllt sein.

Sinngemäss zu (3.2) ergeben sich ohne weiteres die zwei modifizierten Bedingungsgleichungen, und auch die Lösung mit Hilfe der 29 Punkte p_j/y_j und der Geraden kann analog wie bei *a)* angewendet werden, so dass sich folgende Werte ergeben:

Minimum.	Fr. 125 676
Maximum	Fr. 126 679
Standardisierter Fehler. . . .	0,40 %
Mittelwert	Fr. 126 178
Fehler des Mittelwertes. . . .	—0,02 %.

Der rückwirkende Vergleich aller ermittelten Ergebnisse lässt die Auswirkung der sukzessiven Verfeinerung der Methode deutlich in Erscheinung treten, wie auch die einzelnen Resultate zeigen, dass die lineare Programmierung ein ebenso einfach zu handhabendes wie flexibles Instrument auch im Bereiche versicherungstechnischer Berechnungen darstellt.

Literaturhinweise

Benjamin, S., and *Benett, C.W.*: The application of elementary linear programming to approximate valuation. (Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 84, 1958.)

Ferguson, Robert O., and *Sargent, Lauren F.*: Linear Programming, Fundamentals and Applications.

Krelle, Wilhelm, und *Künzi, Hans Paul:* Lineare Programmierung.

Résumé

Au moyen d'un exemple pour un calcul approximatif des réserves – exemple qui, se basant sur des valeurs maxima et minima, donne un résultat tout à fait valable – il est établi que le «linear programming» est également utilisable dans les calculs actuariels.

Riassunto

A mano di un esempio per un calcolo approssimativo della riserva, dove determinando valori massimi e minimi si può arrivare ad ottenere un risultato fidato, vien dimostrato che la programmazione lineare può essere usata anche per calcoli tecnici assicurativi.

Summary

The paper illustrates the application of linear programming for approximative reserve valuations. The method gives maximal and minimal values for the reserves required, a good estimate of which may be extracted from this interval.