Le problème de la ruine dans la couverture des excédents de sinistres

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Le problème de la ruine dans la couverture des excédents de sinistres

Par Hans Ammeter, Zurich

Résumé

L'auteur traite le problème de ruine que pose une couverture des excédents de sinistres aussi bien pour l'assureur direct que pour le réassureur et analyse également le cas très général de la réassurance des superexcédents de sinistres. Les développements théoriques sont complétés par des exemples numériques de taux de primes de risque théoriques et de chargements de sécurité. Ces exemples montrent notamment que le plein conservé par l'assureur direct peut être choisi de telle manière que la réassurance des excédents de sinistres présente un caractère d'efficacité optimum aussi bien pour l'assureur direct que pour le réassureur. De plus, dans le cas d'une couverture des excédents de sinistres avec réassurance des superexcédents, il existe une certaine quote-part de répartition du risque entre l'assureur direct et les différents réassureurs qui, si elle était choisie, devrait être considérée comme particulièrement dangereuse.

I.

Introduction

La réassurance en excédent de sinistres (désignée en anglais par «Stop Loss Reinsurance») se propose de couvrir la différence entre le montant total des sinistres survenus au sein du portefeuille réassuré et le plein conservé par l'assureur direct en vertu du traité de réassurance. En règle générale le plein de conservation est fixé proportionnellement au montant total P des primes de risque encaissées par l'assureur direct pour le portefeuille réassuré. Si donc S désigne le montant total des sinistres et kP le plein de conservation, l'excédent L à la charge du réassureur est défini comme suit:

$$L \begin{cases} = S - kP & \text{pour } S > kP, \\ = 0 & \text{pour } S \leqq kP. \end{cases}$$

Ce mode de réassurance ne nécessite nullement une analyse individuelle des sinistres ayant provoqué l'excédent de sinistres. Celui-ci peut résulter, soit de quelques sinistres importants, soit d'une accumulation de sinistres ou enfin d'une combinaison de ces deux causes.

Par suite de l'importance de la garantie offerte par la couverture des excédents de sinistres, il importe que des chargements de sécurité appropriés soient inclus dans la prime de réassurance. Le présent mémoire a en particulier pour objet de développer une méthode qui permette de calculer ces chargements de sécurité d'une manière adéquate.

Le principe de la couverture des excédents de sinistres se présente non seulement dans le domaine de la réassurance, mais aussi dans l'étude de divers problèmes parmi lesquels il convient de citer à titre d'exemple:

a) la détermination des bénéfices résultant d'une couverture de risques au cours d'une période d'exploitation, compte tenu du caractère aléatoire des sommes absorbées par les sinistres durant la période envisagée [1] [1];

b) la recherche d'une compensation interne des risques entre les portefeuilles relatifs à des branches d'opérations distinctes, et gérés de manière autonome dans le cadre de l'ensemble des opérations d'un même assureur;

c) la tarification fondée sur l'expérience (désignée en anglais par «Experience Rating») dans les assurances collectives [2] [3].

En principe, la prime nécessaire à la couverture des excédents de sinistres se compose

1° de la prime pure égale à la valeur présumée $E\{L\}$ des excédents de sinistres et

2° du chargement de sécurité $\lambda E\{L\}$, où le facteur λ représente le taux du chargement de sécurité.

Dans ces conditions, la prime $E'\{L\}$ nécessaire à la couverture des excédents de sinistres s'exprime par la formule

$$E'\{L\} = (1+\lambda)\,E\{L\}.$$

Pour ne pas compliquer les formules, des chargements pour frais de gestion ne sont pas introduits.

---

[1]) Les chiffres entre crochets se rapportent à la liste bibliographique à la fin du présent mémoire.

Le calcul du facteur $(1+\lambda)$ repose sur le principe suivant:

Afin d'être en mesure de faire face à ses engagements, le réassureur crée une réserve de compensation dotée d'un montant initial u. Cette réserve est alimentée par les primes $E'\{L\}$ encaissées par le réassureur; elle supporte les excédents de sinistres à la charge du réassureur. Si l'on suppose que le traité de réassurance est renouvelé indéfiniment et que l'étendue de la garantie offerte par le réassureur reste inchangée, le facteur $(1+\lambda)$ devra être calculé de manière que la probabilité d'un épuisement éventuel de la réserve de compensation accumulée soit inférieure à une limite fixée à l'avance, par exemple à $^1/_{100}$.

Un problème analogue s'était déjà posé dans la théorie collective du risque. En l'occurrence, il s'agissait d'étudier le comportement d'une réserve de compensation affectée à la couverture des sinistres et non à celle des excédents de sinistres. De nombreux auteurs, parmi lesquels il convient de citer les mathématiciens suédois F. Lundberg, H. Cramér, S. Täcklind, C. O. Segerdahl, G. Arfwedson, se sont penchés sur le problème de la ruine posé par ce cas particulier de la couverture des risques et ont développé des méthodes approximatives en vue de la détermination pratique de la probabilité de ruine. L'auteur, dans son mémoire [1], a généralisé les résultats obtenus en étudiant, du point de vue du réassureur uniquement, la question de la couverture des excédents de sinistres. Le présent mémoire aborde les mêmes problèmes d'un point de vue plus général et fournit notamment une méthode de calcul pour la probabilité de ruine aussi bien de l'assureur direct que du réassureur. Il analyse en outre le cas général du réassureur qui réassure à son tour les superexcédents de sinistres.

II.

La probabilité de ruine

Le problème de la probabilité de ruine est étroitement lié à la théorie classique des jeux. En effet:

Soit A et B deux joueurs engageant une série illimitée de parties. Le jeu ne prend fin que par la ruine de l'un d'eux. Il est commode de représenter la probabilité pour le joueur A de réaliser un gain y lors de l'une des parties de la série considérée, à l'aide de la fonction de répartition $F(y)$. Au gain y de A correspond nécessairement une perte d'un même montant pour B.

De plus, il est admis que A dispose d'une fortune initiale limitée u et B d'une fortune initiale illimitée. Dans ces conditions, seule la ruine de A est possible.

La probabilité $\psi_1(u)$ pour que le joueur A soit ruiné à l'issue de la première partie, est donnée par

$$\psi_1(u) = F(-u).$$

Si les parties successives de la série envisagée sont supposées stochastiquement indépendantes les unes des autres, les probabilités de ruine du joueur A à l'issue de la 1re, 2me, 3me, ..., νme partie sont données par

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= F(-u) \\
\psi_2(u) &= \int_0^\infty \psi_1(y)\, dF(y-u) \\
\psi_3(u) &= \int_0^\infty \psi_2(y)\, dF(y-u) \\
&\vdots \\
\psi_\nu(u) &= \int_0^\infty \psi_{\nu-1}(y)\, dF(y-u).
\end{aligned}$$

Dès lors, la probabilité de ruine $\psi(u)$ du joueur A à l'issue d'une partie quelconque, est représentée par la série

$$\psi(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(u).$$

Si cette série converge, la probabilité $\psi(u)$ se présente alors comme la solution d'une équation intégrale du type Volterra-Stieltjes, soit:

$$\psi(u) = F(-u) + \int_0^\infty \psi(y)\, dF(y-u). \tag{1}$$

La solution de cette équation intégrale est classique et fournit la probabilité de ruine du joueur A en fonction de sa fortune initiale u. Dans le mémoire [1], l'auteur a démontré que la probabilité de ruine $\psi(u)$ a une limite supérieure et qu'elle peut prendre la forme

$$\psi(u) \leqq e^{-Ru}. \tag{2}$$

Le paramètre R, appelé indice de compensation, est le plus grand nombre satisfaisant à l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ry}\, dF(y) = 1. \tag{3}$$

Un examen plus approfondi montre qu'il n'existe, abstraction faite de la solution triviale $R = 0$, qu'une seule racine réelle R qui remplisse la condition (3). Les formules ci-dessus fournissent une estimation de la probabilité de ruine $\psi(u)$ qui suffira aux besoins du présent mémoire.

III.

La fonction de fréquence du montant total des sinistres

Moyennant certaines hypothèses formulées dans le mémoire [1], la fonction de fréquence du montant total des sinistres survenus au cours d'une période d'exploitation (limitée à une année d'assurance par exemple) est donnée par la formule

$$f(x,t,h) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{t}{t+h}\right)^{r} \left(\frac{h}{t+h}\right)^{h} s^{*r}(x) \tag{4}$$

où

$f(x,t,h)\,dx$ représente la probabilité pour que le montant total des sinistres x soit compris dans l'intervalle $(x, x+dx)$, la variable t désignant le nombre présumé des sinistres au cours de la période d'exploitation considérée;

$s^{*r}(x)\,dx$ représente la probabilité pour que le montant total des indemnités résultant de r sinistres soit compris dans l'intervalle $(x, x+dx)$.

La fonction de fréquence $s^{*r}(x)$ s'obtient par récurrence à l'aide de la formule de composition suivante:

$$s^{*r}(x) = \int_0^x s(z)\, s^{*(r-1)}(x-z)\, dz\,.$$

Il sera commode par la suite de prendre comme unité de calcul la valeur présumée du montant d'un sinistre. En d'autres termes:

$$\int_0^\infty z\, s(z)\, dz = 1\,.$$

Dans ces conditions, la valeur présumée du montant total des sinistres, c'est-à-dire la prime de risque théorique pure nécessaire à la couverture des risques assurés,

$$\int_0^\infty x\, f(x,t,h)\, dx = t$$

coïncide avec le nombre présumé des sinistres.

La fonction de fréquence du type binomial négatif qui intervient dans la formule (4), soit:

$$f(r,t,h) = \binom{h+r-1}{r}\left(\frac{t}{t+h}\right)^r\left(\frac{h}{t+h}\right)^h$$

dépend notamment du nombre présumé t des sinistres et du paramètre de fluctuation h. Ce paramètre tient compte du caractère fluctuant des probabilités de sinistres qui régissent le processus de risque envisagé. De plus, la valeur réciproque du paramètre h représente la variance des fluctuations auxquelles sont soumises les probabilités de sinistres. Le passage à la limite $h \to \infty$ correspond au cas particulier d'un processus stochastique homogène évoluant selon des probabilités de sinistres fixes. Dans ce cas, la distribution binomiale négative se réduit à la distribution de Poisson

$$f(r,t) = \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}.$$

IV.

La prime de risque théorique pure nécessaire à la couverture des excédents de sinistres

1° Couverture usuelle des sinistres sans réassurance des excédents de sinistres

Dans ce cas, la prime de risque théorique est représentée par l'expression

$$E\{0 \leqq x \leqq \infty\} = E\{l_0^\infty\} = \int_0^\infty x\, f(x,t,h)\, dx = t. \tag{5,1}$$

2° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres (point de vue de l'assureur direct)

Soit kt le plein conservé par l'assureur direct. La formule suivante est applicable au calcul de la prime de risque théorique relative au plein conservé par l'assureur direct

$$E\begin{Bmatrix} x;\ 0 \leqq x \leqq kt \\ kt;\ x \geqq kt \end{Bmatrix} = E\{l_0^{kt}\} = \int_0^{kt} x\, f(x,t,h)\, dx + kt \int_{kt}^\infty f(x,t,h)\, dx. \tag{5,2}$$

3° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres (point de vue du réassureur)

Si kt désigne le plein conservé par l'assureur direct, la prime de risque théorique nécessaire au réassureur est donnée par la formule suivante:

$$E\begin{Bmatrix} 0\,; & 0 \leqq x \leqq kt \\ x - kt\,; & kt \leqq x \leqq \infty \end{Bmatrix} = E\{l_{kt}^{\infty}\} = \int_{kt}^{\infty} (x - kt)\, f(x,t,h)\, dx. \qquad (5{,}3)$$

4° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres, les superexcédents de sinistres étant réassurés à leur tour (point de vue du premier réassureur)

Si le réassureur s'engage à verser le montant des sinistres excédant le plein $k_1 t$ de l'assureur direct et qu'il réassure à son tour le montant des sinistres excédant le plein $k_2 t\,(k_2 > k_1)$, le calcul de la prime de risque théorique afférente au premier réassureur peut s'effectuer à l'aide de la formule

$$E\begin{Bmatrix} 0\,; & 0 \leqq x \leqq k_1 t \\ x - k_1 t\,; & k_1 t \leqq x \leqq k_2 t \\ k_2 t - k_1 t\,; & k_2 t \leqq x \leqq \infty \end{Bmatrix} = E\{l_{k_1 t}^{k_2 t}\} = \int_{k_1 t}^{k_2 t} (x - k_1 t)\, f(x,t,h)\, dx + (k_2 t - k_1 t) \int_{k_2 t}^{\infty} f(x,t,h)\, dx. \qquad (5{,}4)$$

L'application numérique des formules (5) fait appel aux méthodes d'approximation établies par F. Esscher. A ce sujet, il convient de consulter le mémoire [5].

V.

Le chargement de sécurité dans la couverture des excédents de sinistres

La théorie de la probabilité de ruine exposée sommairement au chapitre II du présent mémoire, peut être appliquée au calcul du taux du chargement de sécurité.

1° Couverture usuelle des sinistres sans réassurance des excédents de sinistres

Le joueur A disposant d'une fortune initiale limitée u, peut être comparé à un assureur qui affecte à la garantie des opérations une réserve de compensation d'un montant initial u. Le joueur B disposant d'une fortune initiale illimitée, peut être comparé à la collectivité ouverte constituée par les assurés.

Le gain y réalisé par le joueur A (assureur) équivaut à la différence entre la prime de risque théorique multipliée par le facteur $(1+\lambda)$

$$(1+\lambda)\, E\{l_0^\infty\}$$

et le montant total x des sinistres, soit

$$y = (1+\lambda)\, E\{l_0^\infty\} - x\,.$$

En portant cette expression de y dans l'équation (3), on obtient

$$\int_0^\infty e^{-R(1+\lambda)E+Rx} f(x,t,h)\, dx = 1\,.$$

De cette relation on déduit immédiatement l'expression suivante pour le facteur $(1+\lambda)$:

$$(1+\lambda) = \frac{\ln \int_0^\infty e^{Rx} f(x,t,h)\, dx}{R E\{l_0^\infty\}}\,.$$

Selon la valeur (finie ou infinie) attribuée au coefficient de fluctuation h, l'intégrale au numérateur peut se mettre sous l'une des deux formes explicites suivantes:

$$\int_0^\infty e^{Rx} f(x,t,h)\, dx = \begin{cases} \left\{1 - \dfrac{t}{h}\left(\displaystyle\int_0^\infty e^{Rz} s(z)\, dz - 1\right)\right\}^{-h} & \text{pour } h \neq \infty\,, \\[2ex] e^{t\left(\int_0^\infty e^{Rz} s(z)\, dz - 1\right)} & \text{pour } h = \infty\,. \end{cases}$$

Le facteur $(1+\lambda)$ s'obtient finalement à l'aide des relations suivantes:

$$(1+\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left[1 - \dfrac{t}{h}\left(\displaystyle\int_0^\infty e^{Rz} s(z)\, dz - 1\right)\right]^{-h}}{Rt} & \text{pour } h \neq \infty\,, \\[3ex] \dfrac{\displaystyle\int_0^\infty e^{Rz} s(z)\, dz - 1}{R} & \text{pour } h = \infty\,. \end{cases} \tag{6,1}$$

2° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres (point de vue de l'assureur direct)

Dans ce cas, le gain y du joueur A (assureur direct) est représenté par les formules

$$\begin{aligned} y &= (1+\lambda)\, E\{l_0^{kt}\} - x \qquad \text{pour } x \leqq kt\,, \\ &= (1+\lambda)\, E\{l_0^{kt}\} - kt \qquad \text{pour } x > kt\,. \end{aligned}$$

En substituant ces formules dans l'équation (3), on obtient l'expression

$$\int_0^{kt} e^{-R(1+\lambda)E+Rx} f(x,t,h)\, dx + \int_{kt}^{\infty} e^{-R(1+\lambda)E+Rkt} f(x,t,h)\, dx = 1\,,$$

d'où l'on déduit pour le facteur $(1+\lambda)$

$$(1+\lambda) = \frac{\ln\left\{\int_0^{kt} e^{Rx} f(x,t,h)\, dx + e^{Rkt}\int_{kt}^{\infty} f(x,t,h)\, dx\right\}}{R E\{l_0^{kt}\}}\,. \tag{6,2}$$

3° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres (point de vue du réassureur)

Dans ce cas, le gain y du joueur A (réassureur) est défini par les relations

$$\begin{aligned} y &= (1+\lambda)\, E\{l_{kt}^{\infty}\} \qquad \text{pour } x \leqq kt\,, \\ &= (1+\lambda)\, E\{l_{kt}^{\infty}\} - x + kt \qquad \text{pour } x > kt\,. \end{aligned}$$

Par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, on obtient pour le facteur $(1+\lambda)$:

$$(1+\lambda) = \frac{\ln\left\{\int_0^{kt} f(x,t,h)\, dx + \int_{kt}^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\, dx\right\}}{R E\{l_{kt}^{\infty}\}}\,. \tag{6,3}$$

4° Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres, les superexcédents de sinistres étant réassurés à leur tour (point de vue du premier réassureur)

Soit $k_1 t$ le plein de conservation de l'assureur direct et $k_2 t$ celui du premier réassureur. Dans ces conditions, le gain y du joueur A (premier réassureur) est donné par les relations

$$\begin{aligned} y &= (1+\lambda)\, E\left\{l_{k_1 t}^{k_2 t}\right\} && \text{pour } x \leqq k_1 t, \\ &= (1+\lambda)\, E\left\{l_{k_1 t}^{k_2 t}\right\} - x + k_1 t && \text{pour } k_1 t < x \leqq k_2 t, \\ &= (1+\lambda)\, E\left\{l_{k_1 t}^{k_2 t}\right\} - (k_2 - k_1)\, t && \text{pour } x > k_2 t. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient pour le facteur $(1+\lambda)$

$$(1+\lambda) = \frac{\ln\left\{\int\limits_0^{k_1 t} f(x,t,h)\, dx + \int\limits_{k_1 t}^{k_2 t} e^{R(x-k_1 t)} f(x,t,h)\, dx + e^{Rt(k_2-k_1)} \int\limits_{k_2 t}^{\infty} f(x,t,h)\, dx\right\}}{R\, E\left\{l_{k_1 t}^{k_2 t}\right\}}. \tag{6,4}$$

VI.

Applications pratiques

Les exemples numériques ci-après utilisent les méthodes d'approximation d'Esscher qui ont été analysées notamment dans le mémoire [1].

Soit un portefeuille d'assurances caractérisé par les données statistiques suivantes:

nombre présumé des sinistres: $t = 50,$

fonction de fréquence du montant d'un sinistre:

$$s(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\alpha x}\, x^{\alpha-1} \qquad \text{avec } \alpha = \tfrac{1}{9},$$

montant présumé d'un sinistre: $\int\limits_0^\infty x\, s(x)\, dx = 1,$

variance du montant d'un sinistre: $\int\limits_0^\infty (x-1)^2\, s(x)\, dx = 9,$

écart quadratique moyen du montant d'un sinistre: $= 3,$

paramètre de fluctuation: $h = \infty,$

paramètre de compensation: $R = 0{,}01.$

Cette dernière hypothèse correspond à une réserve de compensation égale à environ 500 fois le montant présumé d'un sinistre et à une probabilité de ruine $\psi(500) \sim 0{,}01$ compatible avec le degré de sécurité recherché.

1° Prime de risque théorique pure

a) Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres

Quelques exemples de taux de primes de risque théoriques pour l'assureur direct et pour le réassureur, calculés à l'aide des formules (5), sont indiqués dans le tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1

Taux du plein de conservation k en %	Primes de risque théoriques		
	Assureur direct $E\left\{l_0^{kt}\right\}$	Réassureur $E\left\{l_{kt}^{\infty}\right\}$	Assureur direct et réassureur $E\left\{l_0^{\infty}\right\}$
50	24,35	25,65	50
75	34,19	15,81	50
100	41,08	8,92	50
125	45,48	4,52	50
150	47,88	2,12	50
175	49,06	0,94	50
200	49,60	0,40	50
225	49,84	0,16	50
250	49,93	0,07	50
275	49,97	0,03	50
300	49,99	0,01	50
∞	50,00	—	50

Ce tableau illustre clairement le fonctionnement de la couverture des excédents de sinistres et permet de tirer d'utiles conclusions. Ainsi, par exemple, la fixation du plein de conservation à 125 % du montant total de la prime de risque théorique, oblige l'assureur direct à conserver pour son propre compte plus du 90 % de la prime de risque théorique totale ou, ce qui revient au même, plus du 90 % du montant présumé des sinistres. La prime de risque théorique nécessaire au réassureur pour la couverture des excédents de sinistres, décroît au fur et à mesure que le taux du plein de conservation k augmente, et atteint un montant insignifiant pour $k \geqq 200\,\%$.

b) Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres, les superexcédents de sinistres étant réassurés à leur tour

Le tableau 2 comprend quelques exemples de primes de risque théoriques $E\left\{l_{k_\nu t}^{k_{\nu+1} t}\right\}$ se rapportant à la couverture des excédents de sinistres avec réassurance des superexcédents suivant le système des quote-parts. Les deux cas suivants sont envisagés:

Chaque réassureur prend à sa charge une quote-part de l'excédent des sinistres égale par exemple à 25% du total de la prime de risque théorique (cas α) ou à 50% de cette prime (cas β).

Tableau 2

Quote-parts réassurées en %	Primes de risque théoriques couvrant les excédents de sinistres suivant le système des quote-parts $E\left\{l_{k_\nu t}^{k_{\nu+1} t}\right\}$
cas α)	
(0– 50)	(24,35)
50– 75	9,84
75–100	6,89
100–125	4,40
125–150	2,40
150–175	1,18
175–200	0,54
200–225	0,24
225–250	0,09
250–275	0,04
275–300	0,02
300–∞	0,01
Total	50,00
cas β)	
(0– 50)	(24,35)
50–100	16,73
100–150	6,80
150–200	1,72
200–250	0,33
250–300	0,06
300–∞	0,01
Total	50,00

2° Chargements de sécurité nécessaires à l'assureur direct et au réassureur

a) Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres

Les primes de risque théoriques indiquées dans le tableau 1 doivent être majorées des chargements de sécurité résultant des formules (6). Les résultats obtenus pour les taux du chargement de sécurité figurent dans le tableau 3 suivant.

Tableau 3

Taux du plein de conservation k en %	Taux du chargement de sécurité λ en % Assureur direct	Réassureur	Assureur direct et réassureur
0	0,0	5,3	5,3
50	0,1	9,7	5,0
75	0,6	12,4	4,3
100	1,4	14,0	3,6
125	2,3	16,2	3,6
150	3,4	16,5	4,0
175	4,2	16,1	4,4
200	4,7	15,5	4,8
225	5,0	15,0	5,0
250	5,2	13,6	5,2
275	5,3	12,8	5,3
300	5,3	12,4	5,3
∞	5,3	0,0	5,3

Il résulte du tableau 3 que:

i) pour l'assureur direct, le chargement de sécurité croît avec le plein de conservation d'une manière régulière jusqu'à la valeur maximum de 5,3 % de la prime de risque théorique totale. Cette valeur représente le taux nécessaire lorsque l'assureur direct conserve pour son propre compte la totalité des risques;

ii) pour le réassureur, le chargement de sécurité croît régulièrement depuis la valeur minimum de 5,3 % du montant total de la prime de risque théorique, passe par une valeur maximum de 16,5 % environ et décroît ensuite. Une telle variation du chargement de sécurité est plausible et est due notamment à deux causes qui se compensent partiellement. D'une part, au fur et à mesure que l'assureur direct augmente son plein de conservation, le risque du réassureur devient relativement plus fort. D'autre part, vu l'existence de la réserve de compensation ferme, le risque assumé par le réassureur diminue avec k croissant. Dans ces conditions, il est compréhensible que le taux du chargement de sécurité λ décroisse à partir d'une certaine valeur du taux du plein de conservation;

iii) le chargement moyen de sécurité nécessaire aux deux assureurs (assureur direct et réassureur) tend vers la limite de 5,3 % du montant total de la prime de risque théorique lorsque le taux du plein de conservation prend des valeurs extrêmes. La limite de 5,3 % représente le taux nécessaire si aucune réassurance n'est envisagée. Le taux moyen du chargement de sécurité atteint une valeur minimum d'environ 3,6 % lorsque le plein de conservation varie dans l'intervalle de 100 à 125 % de la prime de risque théorique totale. La fixation du plein de conservation à une valeur comprise dans cet intervalle conduit donc à une réassurance optimum. En fait, une réassurance suppose en quelque sorte l'introduction de deux réserves de compensation distinctes servant à absorber les fluctuations des risques assurés. Dans ces conditions, il est normal que, dans le cas d'une réassurance, le taux moyen du chargement de sécurité soit inférieur à la limite de 5,3 % valable en cas de non-réassurance.

b) Couverture des sinistres avec réassurance des excédents de sinistres, les superexcédents de sinistres étant réassurés à leur tour

Les chargements de sécurité nécessaires viennent s'ajouter aux primes de risque théoriques selon le tableau 2; les taux en sont indiqués dans le tableau 4. La quote-part de l'excédent de sinistres à la charge des réassureurs, a été fixée à

cas α) 25 %
cas β) 50 %

de la prime de risque théorique totale.

Tableau 4

Quote-parts réassurées en %	Taux du chargement de sécurité λ en %
cas α)	
(0– 50)	(0,1)
50– 75	1,1
75–100	2,4
100–125	3,7
125–150	5,2
150–175	5,9
175–200	5,8
200–225	5,6
225–250	5,3
250–275	4,7
275–300	4,1

Quote-parts réassurées en %	Taux du chargement de sécurité λ en %
cas β)	
(0– 50)	(0,1)
50–100	2,7
100–150	6,4
150–200	9,8
200–250	9,7
250–300	8,5

Ce tableau montre que la couverture des excédents de sinistres avec réassurance des superexcédents de sinistres selon le système des quote-parts conduit à des taux du chargement de sécurité λ inférieurs à ceux résultant d'une couverture des excédents de sinistres sans réassurance des superexcédents de sinistres. Pratiquement, le taux du chargement de sécurité λ est proportionnel à l'étendue de la part des excédents de sinistres conservée par les réassureurs respectifs. Finalement, il convient de signaler que pour une certaine quote-part le taux du chargement de sécurité atteint un maximum; le choix de cette quote-part par les réassureurs doit être considéré comme particulièrement dangereux.

En conclusion, la théorie de la probabilité de ruine constitue un instrument efficace en vue de l'analyse des problèmes de risque posés par la couverture des excédents de sinistres sous ses différentes formes et de leurs solutions pratiques.

Liste bibliographique

[1] *Ammeter, H.:* Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol. 57, fasc. 2, Berne 1957.

[2] — A rational experience rating technique for group insurances on the risk premium basis. XV^{me} Congrès international, New York 1957.

[3] — Stop loss cover and experience rating. XVI^{me} Congrès international, Bruxelles 1960.

[4] *Cramér, H.:* Collective risk theory. A survey of the theory from the point of view of the theory of the stochastic processes. Jubilee volume of Försäkringsaktiebolaget Skandia, Stockholm 1955.

[5] *Esscher, F.:* On the probability-function in the collective theory of risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Uppsala 1932.

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht das Ruinproblem für eine Überschadendeckung sowohl vom Standpunkt des Erstversicherers als auch des Rückversicherers und behandelt auch den noch allgemeineren Fall einer Überschadendeckung mit Retrozession der Superexzedenten. Die theoretischen Untersuchungen werden durch numerische Beispiele über die Höhe der theoretischen Risikoprämien und der Sicherheitszuschläge ergänzt. Daraus ergibt sich zum Beispiel, dass bei einer Überschadendeckung der Selbstbehalt des Erstversicherers so gewählt werden kann, dass die Rückversicherung optimal sowohl vom Standpunkt des Erstversicherers als auch des Rückversicherers wird. Im Falle der Überschadendeckung mit Retrozession der Superexzedenten gibt es eine bestimmte Tranche des Selbstbehaltes, die, wenn sie vom Erstversicherer bzw. von den verschiedenen Rückversicherern gewählt wird, als besonders gefährlich betrachtet werden muss.

Summary

The paper deals with the problem of ruin in connection with a Stop Loss cover either from the point of view of the ceding company and the reinsurer. The case of a limited Stop Loss cover is considered too. The theoretical investigations are illustrated by numerical examples for net premiums and security loadings. It is seen that a certain limit of selfretention is optimal either from the point of view of the ceding company and the reinsurer. Furthermore it is shown that there exists a certain layer, a Stop Loss cover of which must be considered as particularly dangerous.

Riassunto

L'autore tratta il problema delle rovine in relazione alla copertura degli eccedenti di sinistri sia per l'assicuratore diretto che per il riassicuratore e analizza ugualmente il caso generale di riassicurazione dei supereccedenti di sinistri. Gli sviluppi teorici sono completati da esempi numerici sui tassi dei premi di rischio teorici e sui sovrappremi di sicurezza. Questi esempi ci mostrano in modo particolare che il pieno conservato dall'assicuratore diretto può essere scelto in modo tale che la riassicurazione degli eccedenti di sinistri presenti un carattere ottimo d'efficacia sia per l'assicuratore diretto che per il riassicuratore. Inoltre, nel caso di una copertura di eccedenti di sinistri con riassicurazione di supereccedenti, esiste una certa quota-parte di distribuzione del rischio tra l'assicuratore diretto ed i diversi riassicuratori che, se fosse scelta, dovrebbe essere considerata particolarmente pericolosa.