Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 59 (1959)

Artikel: Sur la convergence forte

Autor: Franckx, Edouard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966826

Sur la convergence forte

Par Edouard Franckx, Bruxelles

Résumé

Extension d'un critère classique de Kolmogoroff pour la convergence forte.

Kolmogoroff [1] démontre le théorème suivant:

Si une suite de variables aléatoires indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *satisfait à la condition*

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma_{x_n}^2}{n^2} < +\infty \tag{1}$$

elle satisfait à la loi forte des grands nombres.

Le but de la note est de généraliser cette proposition aux cas de variables uniformément bornées quelconques, dépendantes ou non. Dans le cas général, si s_n est la variable définie par:

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

on a

$$\sigma_{s_n}^2 = \frac{1}{n^2} S \begin{vmatrix} \sigma_{x_1}^2 \, \mu_{x_1 x_2} & \cdots & \mu_{x_1 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{x_1 x_n} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{vmatrix}$$

le signe S désignant la somme des termes de la matrice de covariance.

Nous effectuons une partition de cette matrice, comme il est indiqué au tableau ci-après

$$\left| \begin{array}{c:c} & \mu_{x_1 x_k} \\ \hdashline \mu_{x_1 x_k} & \sigma_{x_k}^2 \end{array} \right|$$

et nous désignons par S_k la somme de tous les éléments qui se trouvent dans la k^e tranche, en sorte que

$$\begin{cases} \sigma^2_{S_n} = \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_k + \ldots + S_n}{n^2}, \\ S_k = 2\mu_{x_1 x_k} + \ldots + 2\mu_{x_{k-1} x_k} + \sigma^2_{x_k}. \end{cases}$$

Le théorème que nous démontrons ci-après s'énonce comme suit:

Si une suite de variables aléatoires uniformément bornées satisfait à la condition

$$\sum_1^\infty \frac{S_n}{n^2} < +\infty \tag{2}$$

elle satisfait à la loi forte des grands nombres.

Remarquons que si les variables sont indépendantes on a $\mu_{x_i x_j} = 0$

$$S_n = \sigma^2_{x_n}$$

en sorte que nous retrouvons l'énoncé de Kolmogoroff.

a) La condition [2] entraîne

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma^2_{S_n}}{n} < +\infty$$

car

$$S_n = n^2\sigma^2_{S_n} - (n-1)^2\sigma^2_{S_{n-1}}, \quad \frac{S_n}{n^2} = \sigma^2_{S_n} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma^2_{S_{n-1}},$$

et la convergence de [1] entraîne la convergence de

$$\sum_1^\infty \sigma^2_{S_n}\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right]$$

ou celle de

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma^2_{S_n}}{n} \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}$$

et par suite

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma^2_{S_n}}{n} < +\infty.$$

b) D'après un lemme de Dvoretzky [2] si $a_n \geqq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et si

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n} < +\infty$$

il existe une sous-suite d'indices $\{n_i\}$ telle que

$$\lim \frac{n_{i+1}}{n_i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} < +\infty .$$

Si nous appliquons le lemme nous concluons qu'il existe une sous-suite $\{n_i\}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{n_i}^2 < +\infty$$

et par Tchebycheff

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{prob.} \{|S_{n_i} - m_{S_{n_i}}| \geqq \varepsilon\} < +\infty$$

et par Borel-Cantelli

$$\text{prob.} \{\underset{n_i > N_{\varepsilon\eta}}{U} |S_{n_i} - m_{S_{n_i}}| \geqq \varepsilon\} < \eta .$$

c) Dans une note antérieure [3] nous avons démontré que l'existence d'une sous-suite $\{n_i\}$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{n_{i+1}}{n_i} = 1 \\ \text{prob.} \{\underset{n_i > N_{\varepsilon\eta}}{U} |S_{n_i} - m_{S_{n_i}}| \geqq \varepsilon\} < \eta \end{cases}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour la loi forte, c'est-à-dire pour que $\varepsilon > 0$, $n > 0$ il existe $N_{\varepsilon\eta}$ tel que pour $n > N_{\varepsilon\eta}$

$$\text{prob.} \{\underset{n > N_{\varepsilon\eta}}{U} |S_n - m_{S_n}| \geqq \varepsilon\} < \eta .$$

Le théorème est ainsi démontré.

Bibliographie

[1] *Kolmogoroff:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer Berlin 1933.

[2] *Dvoretzky:* On the strong stability of a sequence of events. Annals of Math. Statistics 1949.

[3] *Franckx:* La loi forte des grands nombres des variables uniformément bornées. Trabajos de Estadistica 1958.

Zusammenfassung

Es wird eine Verallgemeinerung gegeben für ein bekanntes Kriterium von Kolmogoroff betreffend die starke Konvergenz einer Folge unabhängiger Zufallsvariablen.

Summary

For the almost sure convergence of a sequence of independent random variables a generalisation of the well known Kolmogoroff criterion is given.

Riassunto

Si dà un'estenzione del criterio classico di Kolmogoroff per la convergenza forte d'una sequenza di variabili stocastiche.