Methodische Bemerkungen zur Berechnung der Prämien, Deckungskapitalien und Gewinne in der Lebensversicherung[1]

Von Ernst Zwinggi, Basel

Zusammenfassung

Es werden Gleichungen zur Bestimmung der Prämien, Deckungskapitalien und Gewinne der Todesfallversicherung abgeleitet unter der Voraussetzung, dass für die Darstellung des Barwertes der Versicherungsleistungen die kontinuierliche Methode gilt und die Prämien diskontinuierlich (unterjährig) eingehen.

1. Problemstellung

Die Ermittlung der Tarifprämie z. B. der gemischten Versicherung und die dazugehörige Berechnung des Deckungskapitals und Zerlegung der Gewinne in die Komponenten kann nach verschiedenen Konzeptionen erfolgen:

a) Der Darstellung wird durchwegs die diskontinuierliche Methode zugrundegelegt. Dieser Fall bedarf keiner Beschreibung mehr, denn das Vorgehen ist samt der Ermittlung der Gewinne allgemein bekannt.

b) Es wird sowohl für die Erfassung der Belastung durch Versicherungsleistungen und Unkosten als auch für die Berechnung der Entlastung durch Prämien die stetige Zahlung aller Aufwendungen angenommen. Die Voraussetzung der stetigen Prämienzahlung kann für

---

[1]) Die ausführliche Fassung erschien unter dem Titel «Sui metodi che si possono usare per il calcolo dei premi, delle riserve e degli utili nell'assicurazione sulla vita» im Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari (*21*, 1958). Die Arbeit stellt eine Weiterführung der beiden Untersuchungen dar:

a) Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind. Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math., *52*, 1952.

b) Ansätze für die Gewinnermittlung nach der kontinuierlichen Methode. Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math., *57*, 1957.

rein theoretische Überlegungen angemessen und nützlich sein; effektiv vollzieht sich die Prämienzahlung aber jährlich oder unterjährig. Will man die Fiktion einer stetig zahlbaren Prämie aufrechterhalten und das System dennoch praktisch anwenden, so kann man annehmen, es werde die stetig berechnete Prämie z. B. für ein Jahr im Barwert (Zeitrente) vorausbezahlt und im Falle des Ablebens die «nicht verdiente» Prämie einschliesslich Zinsen zurückerstattet. Methodisch sind dadurch keine Elemente der diskontinuierlichen Methode eingeführt worden, insbesondere erfolgt die Deckungskapitalberechnung nach der rein kontinuierlichen Methode. Da für dieses Vorgehen die Grundbeziehungen ebenfalls gegeben worden sind [2], verfolgen wir es nicht weiter.

c) Die dritte Möglichkeit besteht darin, die Ansätze wohl nach der kontinuierlichen Methode zu vollziehen, aber zugleich die nicht stetige Prämienzahlung zu berücksichtigen. Das will heissen, für die Verzinsung und die Auszahlung der Versicherungsleistung gilt der «stetige» Ablauf, die Prämien hingegen sind jährlich oder unterjährig zu entrichten, wobei zwangsläufig für die Auswertung der Ansätze nicht Annahmen getroffen werden dürfen, die sich widersprechen.

Dieser dritten Möglichkeit wollen wir im folgenden nachgehen und der Reihe nach Formeln für die Prämien, Deckungskapitalien und Gewinne aufstellen.

2. Nettoprämie

Es sei die Summe «1» auf den Todes- und Erlebensfall versichert (gemischte Versicherung); die Prämie $P_x^{(m)}$ werde in m Raten bezahlt.

Der Barwert der Belastung ist mit $\delta = \ln(1+i)$, d. h. mit $v = e^{-\delta}$ gleich $\bar{A}_{x\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{x\overline{n}|}$; der Barwert der Prämien beträgt $P_x^{(m)} \ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)}$.

Für $\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)}$ schreiben wir

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t\, l_{x+t}}{l_x} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{v^{\frac{\tau}{m}}\, l_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t}} \right\}. \tag{1}$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit $\dfrac{l_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t}}$, wobei $0 \leqq \tau \leqq m$ ist,

[2]) Vgl. die unter [1]) genannten Arbeiten.

approximieren wir durch

$$\frac{l_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t}} = 1 - \frac{\tau}{m} q_{x+t}; \tag{2}$$

damit wird

$$\mu_{x+t+\frac{\tau}{m}} = \frac{-l'_{x+t+\frac{\tau}{m}}}{l_{x+t+\frac{\tau}{m}}} = \frac{q_{x+t}}{1 - \frac{\tau}{m} q_{x+t}}. \tag{3}$$

Die Annahme eines linearen Abfalls der Zahl der Lebenden innerhalb eines Jahres ist ohne weiteres zulässig. Für die $\{\}$ in (1) erhalten wir mit (2)

$$\{\} = \frac{1}{m}\left[1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}}\right] -$$

$$- q_{x+t}\left[\frac{1}{m^2} v^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{m^2} v^{\frac{2}{m}} + \ldots + \frac{m-1}{m^2} v^{\frac{m-1}{m}}\right], \tag{4}$$

wofür wir setzen

$$\{\} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} - k_{\overline{1|}}^{(m)} v q_{x+t}. \tag{5}$$

Beziehung (1) lautet damit

$$\ddot{a}_{x\overline{n|}}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} \left[\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} - k_{\overline{1|}}^{(m)} v q_{x+t}\right] = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_{x\overline{n|}} - k_{\overline{1|}}^{(m)} {}_{|n}A_x. \tag{6}$$

Es ist $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}}$, also leicht berechenbar. Die Grösse $k_{\overline{1|}}^{(m)}$ können wir folgendermassen umformen. Es sei $v^{\frac{1}{m}} = \tilde{v} = \frac{1}{1+\tilde{i}}$ ein neuer Diskontierungsfaktor; dann folgt aus (4) und (5)

$$k_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1+i}{m^2}\left[\tilde{v} + 2\tilde{v}^2 + \ldots + (m-1)\tilde{v}^{m-1}\right] =$$

$$= \frac{1+i}{m^2} (\tilde{I}a)_{\overline{m-1|}} =$$

$$= \frac{1+i}{m^2} \frac{1}{\tilde{i}} \left[\tilde{\ddot{a}}_{\overline{m-1|}} - (m-1)\tilde{v}^{m-1}\right]. \tag{7}$$

Zur numerischen Berechnung von $\ddot{a}_{x\overline{n|}}^{(m)}$ wird man (6) nicht in der angegebenen Form gebrauchen, sondern neue Kommutationszahlen einführen.

Sei
$$\left.\begin{aligned} D_x^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} D_x - k_{\overline{1|}}^{(m)} C_x, \\ N_x^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} N_x - k_{\overline{1|}}^{(m)} M_x, \\ N_{x\overline{n|}}^{(m)} &= N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

dann wird
$$\ddot{a}_{x\overline{n|}}^{(m)} = \frac{N_{x\overline{n|}}^{(m)}}{D_x}. \tag{9}$$

Bei jährlicher Prämienzahlung ist $m = 1$, somit $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}|_{m=1} = 1$ und $k_{\overline{1|}}^{(m)}|_{m=1} = 0$.

Für die Berechnung von $\bar{a}_{x\overline{n|}}$ hat, gleich wie für die Ermittlung von $\ddot{a}_{x\overline{n|}}^{(m)}$, die Annahme (2) bzw. (3) zu gelten. Es ist

$$\bar{a}_{x\overline{n|}} = \int\limits_0^n \frac{e^{-\delta\zeta}\, l_{x+\zeta}}{l_x}\, d\zeta = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{e^{-\delta t}\, l_{x+t}}{l_x} \int\limits_{\zeta=0}^{1} \frac{e^{-\delta\zeta}\, l_{x+t+\zeta}}{l_{x+t}}\, d\zeta;$$

man könnte darin nun sofort $\dfrac{l_{x+t+\zeta}}{l_{x+t}} = 1 - \zeta\, q_{x+t}$ setzen und auswerten. Zum gleichen Ziele führt die Annahme $m \to \infty$ in (6). Ohne weiteres ist ersichtlich, dass $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}|_{m\to\infty} \to \bar{a}_{\overline{1|}} = \dfrac{1-e^{-\delta}}{\delta}$ wird. Die Grösse $k_{\overline{1|}}^{(m)}$ schreiben wir aus (7) in der Form

$$k_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1+i}{m^2}\,\frac{1}{\tilde{i}} \left[\frac{1-\tilde{v}^{m-1}}{1-\tilde{v}} - (m-1)\,\tilde{v}^{m-1}\right],$$

und weil $\tilde{v} = e^{-\frac{\delta}{m}}$ und $\tilde{i} = e^{\frac{\delta}{m}} - 1$ ist, auch

$$k_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1}{m^2}\,\frac{e^{\delta}}{e^{\frac{\delta}{m}}-1} \left[\frac{1-e^{-\delta}\,e^{\frac{\delta}{m}}}{1-e^{-\frac{\delta}{m}}} - (m-1)\,e^{-\delta}\,e^{\frac{\delta}{m}}\right].$$

Nach Entwicklung von $e^{\frac{\delta}{m}}$ und $e^{-\frac{\delta}{m}}$ in eine Reihe folgt

$$k_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{e^{\delta} - 1 - \dfrac{\delta}{m} - \dots}{\delta^2 + \dfrac{\delta^4}{12m^2} + \dots} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1 + \dfrac{\delta}{m} + \dots}{\delta + \dfrac{\delta^2}{2m} + \dots}.$$

Wird $m \to \infty$, so bleibt

$$k_{\overline{1|}}^{(m)}|_{m\to\infty} \to \bar{k}_{\overline{1|}} = \frac{i-\delta}{\delta^2}. \tag{10}$$

Den Beziehungen (8) entsprechend führen wir ein

$$\left.\begin{aligned} \bar{D}_x &= \bar{a}_{\overline{1|}} D_x - \bar{k}_{\overline{1|}} C_x , \\ \bar{N}_x &= \bar{a}_{\overline{1|}} N_x - \bar{k}_{\overline{1|}} M_x , \\ \bar{N}_{x\overline{n|}} &= \bar{N}_x - \bar{N}_{x+n} , \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und erhalten aus (9)

$$\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n|}}\Big|_{m\to\infty} \to \bar{a}_{x\overline{n|}} = \frac{\bar{N}_{x\overline{n|}}}{D_x} . \tag{12}$$

Damit kann die Nettoprämie $P_x^{(m)}$ aus $\bar{A}_{x\overline{n|}} = 1 - \delta \bar{a}_{x\overline{n|}} = P_x^{(m)} \ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n|}}$ numerisch leicht ermittelt werden.

3. Nettodeckungskapital

Die Ermittlung des Nettodeckungskapitals soll zuerst über die Rekursionsformel auf das Ende einer Prämienzahlungs*periode* erfolgen unter der vorläufigen Annahme, das Deckungskapital sei zu Beginn des Versicherungsjahres bekannt.

Es sei für einen ganzzahligen Wert von τ das erreichte Alter $x + \tau = y$ gesetzt, ferner ${}_{\tau}V_x^{(m)}$ mit $V(0)$ und ${}_{\tau+1}V_x^{(m)}$ mit $V(1)$ bezeichnet. Dann gilt für das Intervall $\tau + \frac{t}{m}$ bis $\tau + \frac{t+1}{m}$ die Rekursion

$$\left[V\left(\frac{t}{m}\right) + \frac{P_x^{(m)}}{m}\right] e^{\frac{\delta}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} e^{\delta\left(\frac{1}{m}-\zeta\right)} \frac{l_{y+\frac{t}{m}+\zeta}\, \mu_{y+\frac{t}{m}+\zeta}}{l_{y+\frac{t}{m}}} d\zeta - \frac{l_{y+\frac{t+1}{m}}}{l_{y+\frac{t}{m}}} V\left(\frac{t+1}{m}\right) = 0 ,$$

und weil die Näherungen (2) und (3) gelten müssen,

$$\left[V\left(\frac{t}{m}\right) + \frac{P_x^{(m)}}{m}\right] e^{\frac{\delta}{m}} - \frac{\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}|}}\, q_y}{1 - \frac{t}{m} q_y} - \frac{1 - \frac{t+1}{m} q_y}{1 - \frac{t}{m} q_y} V\left(\frac{t+1}{m}\right) = 0 , \tag{13}$$

wobei

$$\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}|}} = \int_0^{\frac{1}{m}} e^{\delta\left(\frac{1}{m}-\zeta\right)} d\zeta = \frac{e^{\frac{\delta}{m}} - 1}{\delta} \quad \text{ist.}$$

Beziehung (13) ist eine lineare Differenzengleichung für das Deckungskapital; ihre Lösung hat die Gestalt

$$V\left(\frac{t}{m}\right) = \frac{1}{l_{y+\frac{t}{m}}} \frac{P_x^{(m)}}{m} \sum_{\lambda=0}^{t-1} e^{\frac{\delta(t-\lambda)}{m}} l_{y+\frac{\lambda}{m}} - \frac{\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|} l_y q_y}{l_{y+\frac{t}{m}}} \sum_{\lambda=0}^{t-1} e^{\frac{\delta(t-\lambda-1)}{m}} + \frac{e^{\frac{\delta t}{m}} l_y V(0)}{l_{y+\frac{t}{m}}}. \tag{14}$$

Weil

$$\sum_{\lambda=0}^{t-1} e^{\frac{-\delta(\lambda+1)}{m}} = \tilde{a}_{\overline{t}|}$$

ist, kann (14) nach Einführung der diskontierten Zahlen der Lebenden und Gestorbenen geschrieben werden als

$$V\left(\frac{t}{m}\right) = \frac{1}{D_{y+\frac{t}{m}}} \frac{P_x^{(m)}}{m} \sum_{\lambda=0}^{t-1} D_{y+\frac{\lambda}{m}} - \frac{(1+i)\,\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|}\,\tilde{a}_{\overline{t}|} C_y}{D_{y+\frac{t}{m}}} + \frac{D_y V(0)}{D_{y+\frac{t}{m}}}. \tag{15}$$

Aus (2) lässt sich folgern, dass

$$D_{y+\frac{t}{m}} = v^{\frac{t}{m}} \left[\left(1-\frac{t}{m}\right) D_y + \frac{(1+i)\,t}{m} D_{y+1}\right]$$

gilt, und somit

$$\sum_{\lambda=0}^{t-1} D_{y+\frac{\lambda}{m}} = \left[\sum_{\lambda=0}^{t-1} v^{\frac{\lambda}{m}} \left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\right] D_y + \frac{1+i}{m} \left[\sum_{\lambda=0}^{t-1} \lambda\, v^{\frac{\lambda}{m}}\right] D_{y+1} =$$

$$= \left[\tilde{a}_{\overline{t}|} - \frac{(\tilde{I}a)_{\overline{t-1}|}}{m}\right] D_y + \frac{(1+i)\,(\tilde{I}a)_{\overline{t-1}|}}{m} D_{y+1}. \tag{16}$$

Sofern $t = m$ wird, geht (15) über in

$$V(1) = \frac{1}{D_{y+1}} \frac{P_x^{(m)}}{m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} D_{y+\frac{\lambda}{m}} - \frac{(1+i)\,\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|}\,\tilde{a}_{\overline{m}|} C_y}{D_{y+1}} + \frac{D_y V(0)}{D_{y+1}}. \tag{17}$$

Mit (15) und (17) ist es unter Berücksichtigung von (16) und bei Kenntnis von $V(0)$ verhältnismässig leicht möglich, das Deckungskapital auf das Ende einer Prämienzahlungsperiode und auf das Ende des Versicherungsjahres zu berechnen.

In einem zweiten Schritt haben wir nunmehr das Deckungskapital für ganzzahlige Werte von τ, d. h. die jeweiligen $V(0)$ zu ermitteln. Das kann vorteilhaft aus (17) geschehen.

Wir beachten, dass $\ddot{a}_{\overline{m}|} = m\, a_{\overline{1}|}^{(m)}$, ferner dass $m(1+i)\,\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|}\, a_{\overline{1}|}^{(m)} = \bar{s}_{\overline{1}|}$ ist, und erhalten aus (17) in der ursprünglichen Schreibweise

$$ {}_{t+1}V_x^{(m)} = \frac{e^\delta}{1-q_{x+t}}\, {}_tV_x^{(m)} + \frac{1}{1-q_{x+t}} \left[e^\delta P_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{1}|}^{(m)} - \bar{s}_{\overline{1}|}\, q_{x+t}\right]. \qquad (18) $$

Die Auflösung dieser Differenzengleichung ergibt

$$ {}_tV_x^{(m)} = \frac{1}{l_{x+t}} \left[P_x^{(m)} \sum_{\tau=0}^{t-1} e^{\delta(t-\tau)}\, l_{x+\tau}\, \ddot{a}_{x+\tau:\overline{1}|}^{(m)} - \bar{s}_{\overline{1}|} \sum_{\tau=0}^{t-1} e^{\delta(t-\tau-1)}\, l_{x+\tau}\, q_{x+\tau}\right] + \frac{e^{\delta t}\, l_x\, {}_0V_x^{(m)}}{l_{x+t}} $$

oder auch

$$ {}_tV_x^{(m)} = \frac{1}{D_{x+t}} \left[P_x^{(m)} \sum_{\tau=0}^{t-1} D_{x+\tau}^{(m)} - \bar{s}_{\overline{1}|} \sum_{\tau=0}^{t-1} C_{x+\tau}\right] + \frac{D_x\, {}_0V_x^{(m)}}{D_{x+t}} = $$

$$ = P_x^{(m)} \frac{N_{x\overline{t}|}^{(m)}}{D_{x+t}} - \bar{s}_{\overline{1}|} \frac{M_{x\overline{t}|}}{D_{x+t}} + \frac{D_x\, {}_0V_x^{(m)}}{D_{x+t}}. \qquad (19) $$

Dieser retrospektiven Form für ${}_tV_x^{(m)}$ entspricht die prospektive

$$ {}_tV_x^{(m)} = {}_{|n-t}\bar{A}_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t} - P_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}^{(m)}, \qquad (20) $$

wobei $\quad {}_{|n}\bar{A}_x = \bar{s}_{\overline{1}|}\, {}_{|n}A_x \quad$ ist.

4. Tarifprämie

Die Tarifprämie $\pi_x^{(m)}$ soll unter den folgenden Annahmen dargestellt werden. Die Abschlusskosten α setzen wir proportional dem Kapital; die Inkassokosten β sollen auf der Barprämie erhoben werden und γ ist proportional dem Kapital. Der Gewinnanteil sei für ein Versicherungsjahr τ konstant und betrage den Bruchteil Δ_τ der Tarifprämie.

Der Barwert der Gewinnanteile des Versicherungsjahres τ ist gleich

$$ \frac{D_{x+\tau}}{D_x}\, \Delta_\tau\, \pi_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x+\tau:\overline{1}|}^{(m)} = \frac{\pi_x^{(m)}}{D_x}\, \Delta_\tau\, D_{x+\tau}^{(m)} $$

und somit der Barwert aller Gewinnanteile

$$ \frac{\pi_x^{(m)}}{D_x} \sum_{\tau=0}^{n-1} \Delta_\tau\, D_{x+\tau}^{(m)} = \pi_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)}(\Delta). $$

Damit kann die Äquivalenzgleichung geschrieben werden als

$$\bar{s}_{\overline{1}|}\,{}_{|n}A_x + {}_nE_x + \alpha + \gamma\,\bar{a}_{\overline{xn}|} = (1-\beta)\,\pi_x^{(m)}\left[\ddot{a}_{\overline{xn}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{xn}|}^{(m)}(\varDelta)\right]. \tag{21}$$

Im konkreten Fall lässt sich $\ddot{a}_{\overline{xn}|}^{(m)}(\varDelta)$ leicht durch die Kommutationszahlen ausdrücken.

5. Gewinne

Zur Darstellung der Gewinne oder Verluste aus dem nicht rechnungsmässigen Ablauf der Ereignisse setzen wir zuerst vereinfachend voraus, es gehe die Nettoprämie ein und es werde das Nettodeckungskapital zurückgestellt.

Bei rechnungsmässigem Ablauf der Ereignisse gilt Beziehung (18), die wir unter Verwendung von (6) schreiben als

$$e^{\delta}\,{}_tV_x^{(m)} + P_x^{(m)}\,\ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)} - q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1}|} + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] - {}_{t+1}V_x^{(m)} = 0\,. \tag{22}$$

Erfolgt der Ablauf der Ereignisse nicht rechnungsmässig und bedeutet δ' die Intensität der effektiven Verzinsung (mit $1+i' = e^{\delta'}$) und messe q_x' die effektive Sterblichkeit, so folgt aus (22)

$$e^{\delta'}\,{}_tV_x^{(m)} + P_x^{(m)}\,\ddot{s}_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - q_{x+t}'\left[\bar{s}_{\overline{1}|}' + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] - {}_{t+1}V_x^{(m)} = \text{Gewinn}; \tag{23}$$

die Grössen $\ddot{s}_{\overline{1}|}^{\prime(m)}$, $\bar{s}_{\overline{1}|}'$ und $k_{\overline{1}|}^{\prime(m)}$ sind mit δ' zu berechnen.

Wir bilden (23)—(22) und erhalten

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} = (i'-i)\,{}_tV_x^{(m)} + \left(\ddot{s}_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)}\right)P_x^{(m)} + q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1}|} + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] - \\ - q_{x+t}'\left[\bar{s}_{\overline{1}|}' + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right].\end{aligned} \tag{24}$$

In (24) erklären wir

$$(i'-i)\,{}_tV_x^{(m)} + \left(\ddot{s}_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)}\right)P_x^{(m)} \tag{25}$$

als *Zinsengewinn*, Wert Ende Versicherungsjahr. Der Rest in (24) ist somit gleich dem *Sterblichkeitsgewinn*, ebenfalls Wert Ende Versicherungsjahr, wobei

$$q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1}|} + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] \tag{26}$$

die *Risikoprämie* und

$$q_{x+t}'\left[\bar{s}_{\overline{1}|}' + P_x^{(m)}\,k_{\overline{1}|}^{\prime(m)} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] \tag{27}$$

die *Risikoschadensumme* bedeutet (beide Grössen Wert Ende Versicherungsjahr).

Eine absolute Trennung in Zins- und in Sterblichkeitsgewinne ist nicht möglich, in (27) treten Grössen auf, welche von δ' abhängen; mit andern Worten, die Risikoschadensumme hängt nicht nur von q'_{x+t}, sondern auch vom effektiv erzielten Zinsertrag δ' ab.

Nach dieser Vorbereitung können wir zu einem allgemeinen Fall übergehen; es soll die Tarifprämie $\pi_x^{(m)}$ eingehen und das Nettodeckungskapital ${}_tV_x^{(m)}$ zurückgestellt werden. Zum Zins- und Sterblichkeitsgewinn tritt noch der *Aufschlagsgewinn* hinzu. Wir setzen $\pi_x^{(m)} = P_x^{(m)} + Z_x^{(m)}$, wobei $Z_x^{(m)}$ die Zuschläge α, β und γ sowie den Gewinnzuschlag Δ enthält. Für die Bestreitung der Kosten und der Gewinnausschüttung soll $Z_x'^{(m)}$ benötigt werden.

Die Gewinngleichung lautet – man hat in (23) nur die Glieder mit $Z_x^{(m)}$ und $Z_x'^{(m)}$ hinzuzufügen –

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} = {} & e^{\delta'}\,{}_tV_x^{(m)} + \left[P_x^{(m)} + Z_x^{(m)}\right] \ddot{s}'^{(m)}_{\overline{1|}} - \\ & - q'_{x+t}\left[\bar{s}'_{\overline{1|}} + (\pi_x^{(m)} - Z_x'^{(m)})\, k'^{(m)}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] - {}_{t+1}V_x^{(m)}.\end{aligned} \tag{28}$$

Subtrahiert man davon (22), so folgt

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} = {} & (i' - i)\,{}_tV_x^{(m)} + (\ddot{s}'^{(m)}_{\overline{1|}} - \ddot{s}^{(m)}_{\overline{1|}})\, P_x^{(m)} + q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1|}} + P_x^{(m)} k^{(m)}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] - \\ & - q'_{x+t}\left[\bar{s}'_{\overline{1|}} + (\pi_x^{(m)} - Z_x'^{(m)})\, k'^{(m)}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] + (Z_x^{(m)} - Z_x'^{(m)})\, \ddot{s}'^{(m)}_{\overline{1|}}.\end{aligned} \tag{29}$$

In (29) bezeichnen wir

$$(i' - i)\,{}_tV_x^{(m)} + (\ddot{s}'^{(m)}_{\overline{1|}} - \ddot{s}^{(m)}_{\overline{1|}})\, P_x^{(m)} \tag{30}$$

als *Zinsengewinn,* Wert Ende Versicherungsjahr,

$$(Z_x^{(m)} - Z_x'^{(m)})\, \ddot{s}'^{(m)}_{\overline{1|}} \tag{31}$$

als *Aufschlagsgewinn* [3]), Wert Ende Versicherungsjahr, sodann

$$q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1|}} + P_x^{(m)} k^{(m)}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] \tag{32}$$

als *Risikoprämie* und

$$q'_{x+t}\left[\bar{s}'_{\overline{1|}} + (\pi_x^{(m)} - Z_x'^{(m)})\, k'^{(m)}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x^{(m)}\right] \tag{33}$$

als *Risikoschadensumme* (beide Grössen Wert Ende Versicherungsjahr), somit (32)—(33) als *Sterblichkeitsgewinn.* Gleich wie in (27) ist es in (31) und (33) nicht möglich, die Komponenten des Gewinnes so zu trennen,

[3]) Der *Aufschlags*gewinn ist nicht identisch mit dem *Unkosten*gewinn, denn sowohl in $Z_x^{(m)}$ wie in $Z_x'^{(m)}$ sind neben den Unkosten auch die rechnungsmässigen und die effektiv ausbezahlten Gewinnanteile enthalten.

dass sie sich nicht gegenseitig beeinflussen. Wir haben mit Rücksicht auf die praktische Anwendung die Aufspaltung so vorgenommen, dass alle Glieder, welche q'_{x+t} enthalten, zur Risikoschadensumme zählen.

Vergleichsweise stellen wir die Gewinngleichungen bei *jährlicher* Prämienzahlung einander gegenüber, wenn

a) das von uns beschriebene Verfahren gilt,

b) die Betrachtungsweise rein diskontinuierlich ist.

a) Gemäss (29) ist mit $\bar{s}^{(1)}_{\overline{1|}} = 1 + i$ und $k^{(1)}_{\overline{1|}} = 0$ der

$$\text{Gewinn} = (i' - i)\,({}_tV_x + P_x) + q_{x+t}(\bar{s}_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x) - q'_{x+t}(\bar{s}'_{\overline{1|}} - {}_{t+1}V_x) + \\ + (Z_x - Z'_x)\,(1 + i'). \qquad (34)$$

b) Durchwegs nach dem diskontinuierlichen Verfahren ist der

$$\text{Gewinn} = (i' - i)\,({}_tV_x + P_x) + q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_x) - q'_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_x) + \\ + (Z_x - Z'_x)\,(1 + i'). \qquad (35)$$

Abgesehen vom etwas längeren Weg der Ableitungen führt die von uns beschriebene Konzeption in allen Teilen zu einfachen Formeln, die in der Praxis nicht schwerer anzuwenden sind als die üblichen der rein diskontinuierlichen Betrachtungsweise.

Résumé

Les formules pour déterminer les primes, les réserves et les bénéfices d'une assurance en cas de décès sont établies dans les suppositions suivantes. La valeur actuelle des prestations est fondée sur la méthode continue, tandis que les primes (fractionnées) interviennent dans les formules sous forme discontinue.

Riassunto

L'autore indica, per le assicurazioni miste, le formole per il calcolo dei premi, delle riserve matematiche e degli utili, basandosi sul metodo continuo per determinare il valore attuale delle prestazioni assicurate, mentre i premi (pagabili in rate) sono valutati secondo il metodo discontinuo.

Summary

In this paper formulae for the premiums, reserves and dividends of endowment assurances are derived by using the continuous method for the evaluation of the net value of the death benefit but the discontinuous method for the evaluation of the premiums (payable annually or by instalments).