Quasiarithmetische Mittelbildungen an Verbindungsrenten

Autor(en): **Rufener, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **59 (1959)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966822

Quasiarithmetische Mittelbildungen an Verbindungsrenten

Von E. Rufener, Zürich

Zusammenfassung

Die Ergebnisse der von *H. Jecklin* entwickelten und in den Beiträgen [1], [2] und [3] veröffentlichten Mittelwerttheorie werden auf das Darstellungsproblem der Verbindungsrente angewendet. In Verbindung mit geeigneten, der elementaren Analysis geläufigen Differentialoperationen drängt sich dabei eine quasiarithmetische Mittelung der Eintrittsalter auf. Das Gesetz des gleichmässigen Alterns, sowie *Makehams* Formel erscheinen als natürliche Folge dieser speziellen Mittelwertbildung.

1. Definition und Eigenschaften quasiarithmetischer Mittelwerte [1], [2], [3] *)

a) Als quasiarithmetisch bezeichnen wir den durch

$$\Phi(\omega) = \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu \, \Phi(a_\nu) \tag{1}$$

oder

$$\omega = \Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu \, \Phi(a_\nu)\right\} \tag{1'}$$

bestimmten Mittelwert ω. Im folgenden werde vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} &\Phi(x) \text{ stetig und streng monoton in } \alpha \leqq x \leqq \beta; \\ &\alpha \leqq a_\nu \leqq \beta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m); \\ &k_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \qquad \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen (2) gibt es im abgeschlossenen Intervall $[\alpha, \beta]$ einen *einzigen* Wert ω, für welchen

$$\omega = \Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu \, \Phi(a_\nu)\right\} \quad \text{ist.}$$

*) Die Zahlenangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

ω fällt grösser aus als gewisse a_ν; unter den übrigen a_ν gibt es solche, die grösser als ω sind. Insbesondere ist

$$\text{falls}\quad a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_m: \qquad a_1 \leqq \omega \leqq a_m; \tag{I}$$

$$\text{falls}\quad a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a: \qquad \omega = a; \tag{II}$$

$$\text{für}\quad k_\nu = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \quad \omega = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_m) \text{ eine symmetrische Funktion der } a_\nu; \tag{III}$$

$$\omega = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_m) \text{ in jedem der } m \text{ Argumente } a_\nu \text{ stetige und monoton wachsende Funktion.} \tag{IV}$$

c) Äquivalente Mittel

$$\Phi^* = A\Phi + B, \qquad (A, B \text{ Konstante}, A \neq 0)$$

ist notwendig (und auch hinreichend) dafür, dass für alle $\{a_\nu\}$ und $\{k_\nu\}$

$$\Phi^{-1}\left\{\sum k_\nu \Phi(a_\nu)\right\} = \Phi^{*-1}\left\{\sum k_\nu \Phi^*(a_\nu)\right\}$$

ausfällt [3].

2. Verbindungsrenten mit gleichen Ausscheideordnungen

Der Barwert der lebenslänglichen Verbindungsrente von m Leben auf ersten Tod lässt sich, falls alle Versicherten (Eintrittsalter x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$) dieselbe Absterbeordnung $l(x)$ befolgen, mittels der Funktionen

$$f(x) = e^{-\delta x}\, l(x), \qquad \Phi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = -\mu(x) - \delta \tag{3}$$

durch

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{m} \frac{f(x_\nu + \xi)}{f(x_\nu)}\, d\xi$$

darstellen. $f(x)$ verschwinde im Unendlichen und sei hinreichend regulär.

Für die Barwertfunktion werde zunächst die Darstellungseigenschaft

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \chi\left[\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right] \tag{4}$$

mit $\omega(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) = \zeta$ vorausgesetzt [1]).

---

[1]) $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist im Sinne von *Jecklin* eine M-Funktion.

Wird auf
$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^m f(x_\nu + \xi)\, d\xi = \chi(\omega) \prod_{\nu=1}^m f(x_\nu)$$
die Operation $\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ ausgeübt, folgt
$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{\nu=1}^m \frac{f'(x_\nu)}{f(x_\nu)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial\omega}{\partial\chi_\nu}; \tag{5}$$
aus
$$\int_0^\infty f^m(\omega+\xi)\, d\xi = \chi(\omega) f^m(\omega)$$
schliesst man durch Ableiten nach ω auf
$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = m\frac{f'(\omega)}{f(\omega)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)}. \tag{6}$$
Die Ergebnisse (5) und (6) lassen sich, $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \Phi(\xi)$ gesetzt, zur Relation
$$\boxed{m\,\Phi(\omega) - \sum_{\nu=1}^m \Phi(x_\nu) = \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \left[1 - \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\right]} \tag{7}$$
zusammenfassen, die uns nahelegt, über $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ derart zu verfügen, dass
$$\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = 1, \tag{8}$$
mithin
$$\begin{aligned} \omega - x_j &= \Psi(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{m-1} - x_m) && (9)\\ &= \Omega(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m) \qquad (1 \leqq j \leqq m) \end{aligned}$$
ausfällt[1]). Sind noch Voraussetzungen (2) erfüllt, wird nach Hilfssatz (1b) durch
$$m\,\Phi(\omega) - \sum_{\nu=1}^m \Phi(x_\nu) = 0 \tag{10}$$

---

[1]) Für $\omega^* = \omega - x_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ ist $\sum \frac{\partial\omega^*}{\partial x_\nu} = 0$. Da nach linearer Transformation der Variablen,
$$\begin{aligned} \omega^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= \Psi(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{m-1} - x_m),\\ &= \Omega(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_1 - x_m, x_2 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m), \end{aligned}$$
die Ableitungen $\frac{\partial\Psi}{\partial(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)}$ verschwinden, sind die Funktionen Ψ und Ω von der Variablensumme unabhängig.

ω eindeutig als quasiarithmetischer Mittelwert mit folgenden Eigenschaften definiert:

(I) $\quad 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m: \quad x_1 \leqq \omega \leqq x_m,$

(II) $\quad x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \zeta: \quad \omega = \zeta,$

(III) $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ symmetrisch in $x_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$,

(IV) ω wächst stetig und monoton in $x_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$.

Unter Berücksichtigung von (9) folgt, dass ω der Beziehung

(V) $$\omega + t = \omega(x_1 + t, x_2 + t, \ldots, x_m + t)$$

genügt, welche versicherungstechnisch gedeutet das Gesetz des gleichmässigen Alterns zum Ausdruck bringt.

Um die in (10) enthaltenen, hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzten Funktionen $\Phi(x)$ explizite darzustellen, wird $\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ auf (10) ausgeübt,

$$m\,\Phi'(\omega) \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^{m} \Phi'(x_\nu) = 0,$$

und (8) beachtet:

$$m\,\Phi'(\omega) - \sum_{\nu=1}^{m} \Phi'(x_\nu) = 0. \tag{11}$$

Durch Ableiten von (10) und (11) nach einer beliebigen Altersvariablen x_j,

(10) $$m\,\Phi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \Phi'(x_j),$$

(11) $$m\,\Phi''(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \Phi''(x_j),$$

schliesst man in bekannter Weise auf

$$\frac{\Phi''(\omega)}{\Phi'(\omega)} = \frac{\Phi''(x_j)}{\Phi'(x_j)} = \gamma,$$

woraus
$$\Phi''(x) - \gamma\,\Phi'(x) = 0 \tag{12}$$
oder
$$\mu''(x) - \gamma\,\mu'(x) = 0 \tag{12'}$$
mit den Lösungsfunktionen

$$\Phi(x) = \begin{cases} a - b\,x, \\ a - b\,c^x, \end{cases} \quad \Phi^*(x) = \begin{cases} x, & \gamma = 0 \\ c^x, & \gamma \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

oder

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha + b\,x, \\ \alpha + b\,c^x, \end{cases} \quad l(x) = \begin{cases} k s^x g^{x^2} \text{ (Gauss)}, & \gamma = 0 \\ k s^x g^{c^x} \text{ (Makeham)}, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad \text{folgt.} \tag{13'}$$

Φ und Φ^* sind im Hinblick auf die quasiarithmetische Mittelbildung äquivalent; durch $\Phi^*(x) = x$ wird ω als arithmetischer, durch $\Phi^*(x) = c^x$ als exponentieller Mittelwert bestimmt:

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{1}{m}(x_1 + x_2 + \ldots + x_m), & \gamma = 0, \\[2ex] \dfrac{\log \sum\limits_{\nu=1}^{m} c^{x_\nu} - \log m}{\log c}, \quad c^\omega = \dfrac{1}{m}(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m}), & \gamma \neq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Falls eine der Altersvariablen – etwa x_m – gegen Unendlich strebt, wird auch ω unendlich gross; man erhält aus $c^\omega = \dfrac{1}{m}(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m})$

$$\lim_{x_m \to \infty} (x_m - \omega) = \frac{\log m}{\log c}. \tag{15}$$

Da $\Phi^*(x) = c^x (c > 1)$ konvex steigend, sind in Anwendung der Ungleichung von *Jensen* [3] die Mittelwerte (14) durch

$$\Phi^* \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \right\} < \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \Phi^*(x_\nu),$$

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu < \Phi^{*-1} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \Phi^*(x_\nu) \right\} = \omega$$

miteinander verknüpft; das exponentielle Mittel (sog. Zentralalter) ist grösser als das arithmetische.

3. Verbindungsrenten mit verschiedenen Ausscheideordnungen

Die dargelegten Entwicklungen sind einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig. Befolgen die m versicherten Leben x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) die voneinander verschiedenen, hinreichend regulären und im Unendlichen verschwindenden Absterbegesetze

$$f_\nu(x) = e^{-\delta x}\, l_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

ergibt sich aus dem Ansatz

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{m} \frac{f_\nu(x_\nu+\xi)}{f_\nu(x_\nu)}\, d\xi = \chi[\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)]$$

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{m} f_\nu(x_\nu+\xi)\, d\xi = \chi(\omega) \prod_{\nu=1}^{m} f_\nu(x_\nu)$$

durch Ableiten in Richtung (1, 1, ..., 1)

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f'_\nu(x_\nu)}{f_\nu(x_\nu)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu},$$

anderseits aus

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{m} f_\nu(\omega+\xi)\, d\xi = \chi(\omega) \prod_{\nu=1}^{m} f_\nu(\omega)$$

durch Ableiten nach ω

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f'_\nu(\omega)}{f_\nu(\omega)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)},$$

mithin, $\Phi_\nu(\xi) = \dfrac{f'_\nu(\xi)}{f_\nu(\xi)}$ gesetzt,

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{m} [\Phi_\nu(\omega) - \Phi_\nu(x_\nu)] = \left(1 - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}\right) \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)}} \tag{16}$$

Falls

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 1 \text{ [1]}, \tag{8}$$

resultiert aus (16) die Funktionalgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{m} [\Phi_\nu(\omega) - \Phi_\nu(x_\nu)] = 0, \tag{17}$$

welche sowohl die Funktionen $\Phi_\nu(x)$ als auch die M-Funktion ω bestimmt.

---

[1]) D. h. mit $\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist $\omega + t = \omega(x_1 + t, x_2 + t, \ldots, x_m + t)$.

Da

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}\left[\delta_{\lambda\nu}\,\Phi_\nu'(x_\nu)-\Phi_\nu(\omega)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_\lambda}\right]=\sum_{\nu=1}^{m}\left[\sum_{\lambda=1}^{m}\delta_{\lambda\nu}\,\Phi_\nu'(x_\nu)-\Phi_\nu'(\omega)\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial\omega}{\partial x_\lambda}\right]=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{m}\left[\Phi_\nu'(x_\nu)-\Phi_\nu'(\omega)\right]=0, \qquad (18)$$

erfüllen die Funktionen $\Phi_\lambda(x)$ und $\mu_\lambda(x)$ die speziellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\Phi_\lambda''(x)-\gamma\,\Phi_\lambda'(x)=0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,m) \qquad (19)$$

und

$$\mu_\lambda''(x)-\gamma\,\mu_\lambda'(x)=0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,m) \qquad (19')$$

mit den Lösungen ($\lambda=1,2,\ldots,m$)

$$\Phi_\lambda(x)=\begin{cases}a_\lambda-b_\lambda x,\\ a_\lambda-b_\lambda e^{\gamma x}=a_\lambda-b_\lambda c^x,\end{cases} \qquad \Phi_\lambda^*(x)=\begin{cases}b_\lambda x, & \gamma=0\\ b_\lambda c^x, & \gamma\neq 0\end{cases} \qquad (20)$$

und

$$\mu_\lambda(x)=\begin{cases}\alpha_\lambda+b_\lambda x,\\ \alpha_\lambda+b_\lambda c^x,\end{cases} \qquad l_\lambda(x)=\begin{cases}k\,s_\lambda^x g_\lambda^{x^2}, & \gamma=0\\ k\,s_\lambda^x g_\lambda^{c^x}, & \gamma\neq 0.\end{cases} \qquad (20')$$

Nach (17) gehören zu den Funktionen (20) gewogene arithmetische und exponentielle Mittel:

$$\omega=\begin{cases}\dfrac{\sum b_\nu x_\nu}{\sum b_\nu}, & \gamma=0\\[2ex] \dfrac{\log\dfrac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu}}{\log c}=\dfrac{\log\sum b_\nu c^{x_\nu}-\log\sum b_\nu}{\log c}\ ^{1)}, & \gamma\neq 0.\end{cases} \qquad (21)$$

Die in Abschnitt 2 für ω festgestellten Eigenschaften sind mit Ausnahme von (III) erfüllt. Mit $x_m\to\infty$ strebt auch $\omega\to\infty$ und es folgt für $\gamma\neq 0$ aus (22)

$$\lim_{x_m\to\infty}(x_m-\omega)=\frac{\log\left(\sum\limits_{\nu=1}^{m-1}\dfrac{b_\nu}{b_m}+1\right)}{\log c}=\frac{\log\sum\limits_{\nu=1}^{m}b_\nu-\log b_m}{\log c}.$$

---

[1]) $c^\omega=\dfrac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu}$ (22)

Da für $\varphi(x) = c^x$ $(c > 1)$, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$, ist für positive b_ν

$$\varphi\left(\frac{\sum b_\nu x_\nu}{\sum b_\nu}\right) \leqq \frac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu},$$

mithin

$$\frac{\sum b_\nu x_\nu}{\sum b_\nu} \leqq \varphi^{-1}\left\{\frac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu}\right\} = \omega .$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

4. Eine Verallgemeinerung des Ansatzes (4)

Ist $\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \chi\left[\omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \omega_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right]$

$$(k \leqq m) \qquad (23)$$

mit

$$\omega_\lambda(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) = \zeta \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

dann lassen sich die aus

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^m f(x_\nu + \xi)\, d\xi = \prod_{\nu=1}^m f(x_\nu)\, \chi\left[\omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \omega_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right]$$

und

$$\int_0^\infty \prod_{\lambda=1}^k f(\omega_\lambda + \xi)\, d\xi = \prod_{\lambda=1}^k f(\omega_\lambda)\, \chi\left[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\right]$$

fliessenden Beziehungen

$$-\frac{1}{\chi} = \sum_{\nu=1}^m \frac{f'(x_\nu)}{f(x_\nu)} + \frac{1}{\chi} \sum_{\nu=1}^m \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \chi_\nu} \qquad (24)$$

und

$$-\frac{1}{\chi} = \sum_{\nu=1}^k \frac{f'(\omega_\nu)}{f(\omega_\nu)} + \frac{1}{\chi} \sum_{\nu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \delta_{\lambda\nu} \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{f'(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)} + \frac{1}{\chi} \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} \qquad (25)$$

in die Relation

$$\boxed{\sum_{\lambda=1}^k \frac{f'(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)} - \sum_{\nu=1}^m \frac{f'(x_\nu)}{f(x_\nu)} = \frac{1}{\chi} \sum_{\lambda=1}^k \left[1 - \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_\nu}\right] \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda}} \qquad (26)$$

zusammenfassen, welche für die Funktionen ω_λ die Ansätze

$$\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_\nu} = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k)\ ^{1)} \qquad (27)$$

---

1) D. h. mit $\omega_\lambda = \omega_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
ist auch $\omega_\lambda + t = \omega_\lambda(x_1 + t, x_2 + t, \ldots, x_m + t)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$.

oder

$$\omega_\lambda - x_j = \Psi_\lambda(x_1 - x_2,\, x_2 - x_3,\, \ldots,\, x_{m-1} - x_m)$$
$$= \Omega_\lambda(x_1 - x_m,\, x_2 - x_m,\, \ldots,\, x_{m-1} - x_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k) \quad (28)$$

aufdrängt. Aus

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \Phi(\omega_\lambda) - \sum_{\nu=1}^{m} \Phi(x_\nu) = 0$$

gewinnt man dann durch wiederholtes Ableiten in Richtung $(1, 1, \ldots, 1)$ unter Berücksichtigung von (27)

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \Phi^{(\varrho)}(\omega_\lambda) - \sum_{\lambda=1}^{m} \Phi^{(\varrho)}(x_\nu) = 0 \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, k), \quad (29)$$

woraus durch partielles Ableiten nach irgendeiner Altersvariablen x_j das System

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \Phi^{(\varrho+1)}(\omega_\lambda) \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j} = \Phi^{(\varrho+1)}(x_j) \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, k) \quad (30)$$

erhalten wird, in welchem die partiellen Ableitungen eliminierbar sind:

$$\underset{\substack{\varrho = 0, 1, \ldots, k \\ \lambda = 1, 2, \ldots, k}}{\text{Det.}} \left\| \Phi^{(\varrho+1)}(\omega_\lambda),\, \Phi^{(\varrho+1)}(x_j) \right\| = 0. \quad (31)$$

Da in Determinante (31) die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, erfüllt $\Phi(x)$ die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\Phi^{(k+1)}(x) + \gamma_1 \Phi^{(k)}(x) + \ldots + \gamma_k \Phi'(x) = 0,$$

die als Differentialgleichung von *Quiquet* in die versicherungstechnische Literatur eingegangen ist [4].

Literaturhinweise

[1] *Jecklin, H.:* «Versuch einer Systematik des mathematischen Mittelwertbegriffes». Commentarii Mathematici Helvetici, vol.22, fasc.4 (1949).

[2] *Jecklin, H.:* «Über mathematische Mittelwerte». Elemente der Mathematik, Band III/1 (1948).

[3] *Jecklin, H.:* «Quasiarithmetische Mittelwerte», Elemente der Mathematik, Band IV/5 und 6 (1949).

[4] *Quiquet, A.:* «Représentation algébrique des Tables de survie. Généralisation des lois de Gompertz, de Makeham, etc.» Bulletin de l'Institut des Actuaires français (1893).

Résumé

Les résultats obtenus par H. Jecklin dans le domaine de la théorie des valeurs moyennes, et développés dans les publications [1], [2] et [3], sont appliqués au problème de la représentation des annuités viagères sur plusieurs têtes. Par combinaison avec des méthodes appropriées d'usage courant en calcul différentiel, l'auteur montre que le calcul d'une moyenne quasi-arithmétique des âges d'entrée s'impose. La loi du vieillissement uniforme ainsi que la formule de Makeham apparaissent comme une conséquence naturelle de ce calcul spécial de moyenne.

Riassunto

I risultati di H. Jecklin nel campo della teoria dei valori medi e sviluppati nelle publicazioni [1], [2] e [3] sono applicati al problema della rappresentazione delle annuità vitalizie su varie teste. Questi risultati, combinati con metodi adatti d'uso corrente nel calcolo infinitesimale, impongono, come l'autore dimostra, il calcolo d'una media quasi-aritmetica delle età d'entrata. La legge d'invecchiamento uniforme come pure la formola di Makeham appaiono come conseguenza naturale da questa particolare operazione basata sulle medie quasi-aritmetiche.

Summary

The results obtained by H. Jecklin in his papers [1], [2] and [3] about the theory of means are applied to represent annuities on joint lives. In connection with appropriate methods common in differential calculus a semiarithmetic averaging of the age at entry seems apparent. The law of uniform seniority as well as Makeham's law tend to become the natural consequence of this special averaging process.