

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 59 (1959)

**Artikel:** Quasiarithmetische Mittelbildungen an Verbindungsrenten

**Autor:** Rufener, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966822>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quasiarithmetische Mittelbildungen an Verbindungsrenten

Von E. Rufener, Zürich

## Zusammenfassung

Die Ergebnisse der von H. Jecklin entwickelten und in den Beiträgen [1], [2] und [3] veröffentlichten Mittelwerttheorie werden auf das Darstellungsproblem der Verbindungsrente angewendet. In Verbindung mit geeigneten, der elementaren Analysis geläufigen Differentialoperationen drängt sich dabei eine quasiarithmetische Mittelung der Eintrittsalter auf. Das Gesetz des gleichmässigen Alterns, sowie Makehams Formel erscheinen als natürliche Folge dieser speziellen Mittelwertbildung.

## 1. Definition und Eigenschaften quasiarithmetischer Mittelwerte [1], [2], [3] \*)

a) Als quasiarithmetisch bezeichnen wir den durch

$$\Phi(\omega) = \sum_{v=1}^m k_v \Phi(a_v) \quad (1)$$

oder

$$\omega = \Phi^{-1} \left\{ \sum_{v=1}^m k_v \Phi(a_v) \right\} \quad (1')$$

bestimmten Mittelwert  $\omega$ . Im folgenden werde vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} &\Phi(x) \text{ stetig und streng monoton in } \alpha \leq x \leq \beta; \\ &\alpha \leq a_v \leq \beta \quad (v = 1, 2, \dots, m); \\ &k_v > 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad \sum_{v=1}^m k_v = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

b) *Hilfssatz*. Unter den Voraussetzungen (2) gibt es im abgeschlossenen Intervall  $[\alpha, \beta]$  einen *einzigsten* Wert  $\omega$ , für welchen

$$\omega = \Phi^{-1} \left\{ \sum_{v=1}^m k_v \Phi(a_v) \right\} \quad \text{ist.}$$

---

\*) Die Zahlenangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

$\omega$  fällt grösser aus als gewisse  $a_v$ ; unter den übrigen  $a_v$  gibt es solche, die grösser als  $\omega$  sind. Insbesondere ist

$$\text{falls } a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m: \quad a_1 \leq \omega \leq a_m; \quad (\text{I})$$

$$\text{falls } a_1 = a_2 = \dots = a_m = a: \quad \omega = a; \quad (\text{II})$$

$$\text{für } k_v = 1 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad \omega = \omega(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ \text{eine symmetrische Funktion der } a_v; \quad (\text{III})$$

$$\omega = \omega(a_1, a_2, \dots, a_m) \text{ in jedem der } m \text{ Argumente } a_v \\ \text{stetige und monoton wachsende Funktion.} \quad (\text{IV})$$

c) Äquivalente Mittel

$$\Phi^* = A\Phi + B, \quad (A, B \text{ Konstante, } A \neq 0)$$

ist notwendig (und auch hinreichend) dafür, dass für alle  $\{a_v\}$  und  $\{k_v\}$

$$\Phi^{-1} \left\{ \sum k_v \Phi(a_v) \right\} = \Phi^{*-1} \left\{ \sum k_v \Phi^*(a_v) \right\}$$

ausfällt [3].

## 2. Verbindungsrenten mit gleichen Ausscheideordnungen

Der Barwert der lebenslänglichen Verbindungsrente von  $m$  Leben auf ersten Tod lässt sich, falls alle Versicherten (Eintrittsalter  $x_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, m$ ) dieselbe Absterbeordnung  $l(x)$  befolgen, mittels der Funktionen

$$f(x) = e^{-\delta x} l(x), \quad \Phi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = -\mu(x) - \delta \quad (3)$$

durch

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} = \int_0^\infty \prod_{v=1}^m \frac{f(x_v + \xi)}{f(x_v)} d\xi$$

darstellen.  $f(x)$  verschwinde im Unendlichen und sei hinreichend regulär.

Für die Barwertfunktion werde zunächst die Darstellungseigenschaft

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} = \chi[\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)] \quad (4)$$

mit  $\omega(\zeta, \zeta, \dots, \zeta) = \zeta$  vorausgesetzt <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup>  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ist im Sinne von *Jecklin* eine  $M$ -Funktion.

Wird auf

$$\int_0^\infty \prod_{v=1}^m f(x_v + \xi) d\xi = \chi(\omega) \prod_{v=1}^m f(x_v)$$

die Operation  $\sum_{v=1}^m \frac{\partial}{\partial x_v}$  ausgeübt, folgt

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{v=1}^m \frac{f'(x_v)}{f(x_v)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \sum_{v=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_v}; \quad (5)$$

aus

$$\int_0^\infty f^m(\omega + \xi) d\xi = \chi(\omega) f^m(\omega)$$

schliesst man durch Ableiten nach  $\omega$  auf

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = m \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)}. \quad (6)$$

Die Ergebnisse (5) und (6) lassen sich,  $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \Phi(\xi)$  gesetzt, zur Relation

$$\boxed{m \Phi(\omega) - \sum_{v=1}^m \Phi(x_v) = \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \left[ 1 - \sum_{v=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_v} \right]} \quad (7)$$

zusammenfassen, die uns nahelegt, über  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)$  derart zu verfügen, dass

$$\sum_{v=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_v} = 1, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \omega - x_j &= \Psi(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{m-1} - x_m) \\ &= \Omega(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m) \quad (1 \leq j \leq m) \end{aligned} \quad (9)$$

ausfällt<sup>1)</sup>. Sind noch Voraussetzungen (2) erfüllt, wird nach Hilfssatz (1b) durch

$$m \Phi(\omega) - \sum_{v=1}^m \Phi(x_v) = 0 \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Für  $\omega^* = \omega - x_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) ist  $\sum \frac{\partial \omega^*}{\partial x_v} = 0$ . Da nach linearer Transformation der Variablen,

$$\begin{aligned} \omega^*(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \Psi(x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{m-1} - x_m), \\ &= \Omega(x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m), \end{aligned}$$

die Ableitungen  $\frac{\partial \Psi}{\partial(x_1 + x_2 + \dots + x_m)}$ ,  $\frac{\partial \Omega}{\partial(x_1 + x_2 + \dots + x_m)}$  verschwinden, sind

die Funktionen  $\Psi$  und  $\Omega$  von der Variablensumme unabhängig.

$\omega$  eindeutig als quasiarithmetischer Mittelwert mit folgenden Eigenschaften definiert:

- (I)  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m: \quad x_1 \leq \omega \leq x_m,$
- (II)  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = \zeta: \quad \omega = \zeta,$
- (III)  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)$  symmetrisch in  $x_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ),
- (IV)  $\omega$  wächst stetig und monoton in  $x_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ).

Unter Berücksichtigung von (9) folgt, dass  $\omega$  der Beziehung

$$(V) \quad \omega + t = \omega(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_m + t)$$

genügt, welche versicherungstechnisch gedeutet das Gesetz des gleichmässigen Alterns zum Ausdruck bringt.

Um die in (10) enthaltenen, hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzten Funktionen  $\Phi(x)$  explizite darzustellen, wird  $\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu}$  auf (10) ausgeübt,

$$m \Phi'(\omega) \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^m \Phi'(x_\nu) = 0,$$

und (8) beachtet:

$$m \Phi'(\omega) - \sum_{\nu=1}^m \Phi'(x_\nu) = 0. \quad (11)$$

Durch Ableiten von (10) und (11) nach einer beliebigen Altersvariablen  $x_j$ ,

$$(10) \quad m \Phi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \Phi'(x_j),$$

$$(11) \quad m \Phi''(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \Phi''(x_j),$$

schliesst man in bekannter Weise auf

$$\frac{\Phi''(\omega)}{\Phi'(\omega)} = \frac{\Phi''(x_j)}{\Phi'(x_j)} = \gamma,$$

$$\text{woraus} \quad \Phi''(x) - \gamma \Phi'(x) = 0 \quad (12)$$

$$\text{oder} \quad \mu''(x) - \gamma \mu'(x) = 0 \quad (12')$$

mit den Lösungsfunktionen

$$\Phi(x) = \begin{cases} a - bx, \\ a - bc^x, \end{cases} \quad \Phi^*(x) = \begin{cases} x, & \gamma = 0 \\ c^x, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

oder

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha + bx, \\ \alpha + bc^x, \end{cases} \quad l(x) = \begin{cases} ks^x g^{x^2} \text{ (Gauss),} & \gamma = 0 \\ ks^x g^{c^x} \text{ (Makeham),} & \gamma \neq 0 \end{cases} \text{ folgt.} \quad (13')$$

$\Phi$  und  $\Phi^*$  sind im Hinblick auf die quasiarithmetische Mittelbildung äquivalent; durch  $\Phi^*(x) = x$  wird  $\omega$  als arithmetischer, durch  $\Phi^*(x) = c^x$  als exponentieller Mittelwert bestimmt:

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{m} (x_1 + x_2 + \dots + x_m), & \gamma = 0, \\ \frac{\log \sum_{v=1}^m c^{x_v} - \log m}{\log c}, & c^\omega = \frac{1}{m} (c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_m}), \quad \gamma \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Falls eine der Altersvariablen – etwa  $x_m$  – gegen Unendlich strebt, wird auch  $\omega$  unendlich gross; man erhält aus  $c^\omega = \frac{1}{m} (c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_m})$

$$\lim_{x_m \rightarrow \infty} (x_m - \omega) = \frac{\log m}{\log c}. \quad (15)$$

Da  $\Phi^*(x) = c^x (c > 1)$  konvex steigend, sind in Anwendung der Ungleichung von *Jensen* [3] die Mittelwerte (14) durch

$$\Phi^* \left\{ \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m x_v \right\} < \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \Phi^*(x_v),$$

$$\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m x_v < \Phi^{*-1} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \Phi^*(x_v) \right\} = \omega$$

miteinander verknüpft; das exponentielle Mittel (sog. Zentralalter) ist grösser als das arithmetische.

### 3. Verbindungsrenten mit verschiedenen Ausscheideordnungen

Die dargelegten Entwicklungen sind einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig. Befolgen die  $m$  versicherten Leben  $x_v$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ) die voneinander verschiedenen, hinreichend regulären und im Unendlichen verschwindenden Absterbegesetze

$$f_v(x) = e^{-\delta x} l_v(x) \quad (v = 1, 2, \dots, m),$$

ergibt sich aus dem Ansatz

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} = \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^m \frac{f_\nu(x_\nu + \xi)}{f_\nu(x_\nu)} d\xi = \chi[\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)]$$

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^m f_\nu(x_\nu + \xi) d\xi = \chi(\omega) \prod_{\nu=1}^m f_\nu(x_\nu)$$

durch Ableiten in Richtung  $(1, 1, \dots, 1)$

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{\nu=1}^m \frac{f'_\nu(x_\nu)}{f_\nu(x_\nu)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)} \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu},$$

andererseits aus

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^m f_\nu(\omega + \xi) d\xi = \chi(\omega) \prod_{\nu=1}^m f_\nu(\omega)$$

durch Ableiten nach  $\omega$

$$-\frac{1}{\chi(\omega)} = \sum_{\nu=1}^m \frac{f'_\nu(\omega)}{f_\nu(\omega)} + \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)},$$

mithin,  $\Phi_\nu(\xi) = \frac{f'_\nu(\xi)}{f_\nu(\xi)}$  gesetzt,

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^m [\Phi_\nu(\omega) - \Phi_\nu(x_\nu)] = \left(1 - \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}\right) \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)}} \quad (16)$$

Falls

$$(8) \quad \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 1^{1)},$$

resultiert aus (16) die Funktionalgleichung

$$\sum_{\nu=1}^m [\Phi_\nu(\omega) - \Phi_\nu(x_\nu)] = 0, \quad (17)$$

welche sowohl die Funktionen  $\Phi_\nu(x)$  als auch die  $M$ -Funktion  $\omega$  bestimmt.

---

<sup>1)</sup> D. h. mit  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ist  $\omega + t = \omega(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_m + t)$ .

Da

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\nu=1}^m \left[ \delta_{\lambda\nu} \Phi'_\nu(x_\nu) - \Phi'_\nu(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_\lambda} \right] &= \sum_{\nu=1}^m \left[ \sum_{\lambda=1}^m \delta_{\lambda\nu} \Phi'_\nu(x_\nu) - \Phi'_\nu(\omega) \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\lambda} \right] = \\ &= \sum_{\nu=1}^m [\Phi'_\nu(x_\nu) - \Phi'_\nu(\omega)] = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

erfüllen die Funktionen  $\Phi_\lambda(x)$  und  $\mu_\lambda(x)$  die speziellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\Phi''_\lambda(x) - \gamma \Phi'_\lambda(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m) \quad (19)$$

und

$$\mu''_\lambda(x) - \gamma \mu'_\lambda(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m) \quad (19')$$

mit den Lösungen  $(\lambda = 1, 2, \dots, m)$

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} a_\lambda - b_\lambda x, \\ a_\lambda - b_\lambda e^{\gamma x} = a_\lambda - b_\lambda c^x, \end{cases} \quad \Phi_\lambda^*(x) = \begin{cases} b_\lambda x, & \gamma = 0 \\ b_\lambda c^x, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

und

$$\mu_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha_\lambda + b_\lambda x, \\ \alpha_\lambda + b_\lambda c^x, \end{cases} \quad l_\lambda(x) = \begin{cases} k s_\lambda^x g_\lambda^{x^2}, & \gamma = 0 \\ k s_\lambda^x g_\lambda^{c^x}, & \gamma \neq 0. \end{cases} \quad (20')$$

Nach (17) gehören zu den Funktionen (20) gewogene arithmetische und exponentielle Mittel:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\sum b_\nu x_\nu}{\sum b_\nu}, & \gamma = 0 \\ \frac{\log \frac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu}}{\log c} = \frac{\log \sum b_\nu c^{x_\nu} - \log \sum b_\nu}{\log c} \quad 1), & \gamma \neq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Die in Abschnitt 2 für  $\omega$  festgestellten Eigenschaften sind mit Ausnahme von (III) erfüllt. Mit  $x_m \rightarrow \infty$  strebt auch  $\omega \rightarrow \infty$  und es folgt für  $\gamma \neq 0$  aus (22)

$$\lim_{x_m \rightarrow \infty} (x_m - \omega) = \frac{\log \left( \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{b_\nu}{b_m} + 1 \right)}{\log c} = \frac{\log \sum_{\nu=1}^m b_\nu - \log b_m}{\log c}.$$

$$1) \quad c^\omega = \frac{\sum b_\nu c^{x_\nu}}{\sum b_\nu} \quad (22)$$



Da für  $\varphi(x) = c^x$  ( $c > 1$ ),  $\varphi'(x) > 0$ ,  $\varphi''(x) > 0$ , ist für positive  $b_v$ ,

$$\varphi\left(\frac{\sum b_v x_v}{\sum b_v}\right) \leq \frac{\sum b_v c^{x_v}}{\sum b_v},$$

mithin

$$\frac{\sum b_v x_v}{\sum b_v} \leq \varphi^{-1}\left\{\frac{\sum b_v c^{x_v}}{\sum b_v}\right\} = \omega.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ .

#### 4. Eine Verallgemeinerung des Ansatzes (4)

$$\text{Ist } \bar{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} = \chi[\omega_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \omega_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, \omega_k(x_1, x_2, \dots, x_m)] \\ (k \leq m) \quad (23)$$

mit

$$\omega_\lambda(\zeta, \zeta, \dots, \zeta) = \zeta \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k),$$

dann lassen sich die aus

$$\int_0^\infty \prod_{v=1}^m f(x_v + \xi) d\xi = \prod_{v=1}^m f(x_v) \chi[\omega_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \omega_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, \omega_k(x_1, x_2, \dots, x_m)]$$

und

$$\int_0^\infty \prod_{\lambda=1}^k f(\omega_\lambda + \xi) d\xi = \prod_{\lambda=1}^k f(\omega_\lambda) \chi[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k]$$

fließenden Beziehungen

$$-\frac{1}{\chi} = \sum_{v=1}^m \frac{f'(x_v)}{f(x_v)} + \frac{1}{\chi} \sum_{v=1}^m \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_v} \quad (24)$$

und

$$-\frac{1}{\chi} = \sum_{v=1}^k \frac{f'(\omega_v)}{f(\omega_v)} + \frac{1}{\chi} \sum_{v=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \delta_{\lambda v} \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{f'(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)} + \frac{1}{\chi} \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} \quad (25)$$

in die Relation

$$\left[ \sum_{\lambda=1}^k \frac{f'(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)} - \sum_{v=1}^m \frac{f'(x_v)}{f(x_v)} = \frac{1}{\chi} \sum_{\lambda=1}^k \left[ 1 - \sum_{v=1}^m \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_v} \right] \frac{\partial \chi}{\partial \omega_\lambda} \right] \quad (26)$$

zusammenfassen, welche für die Funktionen  $\omega_\lambda$  die Ansätze

$$\sum_{v=1}^m \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_v} = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad {}^1) \quad (27)$$

<sup>1)</sup> D. h. mit  $\omega_\lambda = \omega_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$

ist auch  $\omega_\lambda + t = \omega_\lambda(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_m + t) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k).$

oder

$$\begin{aligned}\omega_\lambda - x_j &= \Psi_\lambda(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{m-1} - x_m) \\ &= \Omega_\lambda(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (28)\end{aligned}$$

aufdrängt. Aus 
$$\sum_{\lambda=1}^k \Phi(\omega_\lambda) - \sum_{\nu=1}^m \Phi(x_\nu) = 0$$

gewinnt man dann durch wiederholtes Ableiten in Richtung  $(1, 1, \dots, 1)$  unter Berücksichtigung von (27)

$$\sum_{\lambda=1}^k \Phi^{(\varrho)}(\omega_\lambda) - \sum_{\lambda=1}^m \Phi^{(\varrho)}(x_\nu) = 0 \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, k), \quad (29)$$

woraus durch partielles Ableiten nach irgendeiner Altersvariablen  $x_j$  das System

$$\sum_{\lambda=1}^k \Phi^{(\varrho+1)}(\omega_\lambda) \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j} = \Phi^{(\varrho+1)}(x_j) \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (30)$$

erhalten wird, in welchem die partiellen Ableitungen eliminierbar sind:

$$\text{Det. } \left\| \Phi^{(\varrho+1)}(\omega_\lambda), \Phi^{(\varrho+1)}(x_j) \right\| = 0. \quad (31)$$

$\varrho = 0, 1, \dots, k$   
 $\lambda = 1, 2, \dots, k$

Da in Determinante (31) die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, erfüllt  $\Phi(x)$  die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\Phi^{(k+1)}(x) + \gamma_1 \Phi^{(k)}(x) + \dots + \gamma_k \Phi'(x) = 0,$$

die als Differentialgleichung von *Quiquet* in die versicherungstechnische Literatur eingegangen ist [4].

### Literaturhinweise

- [1] *Jecklin, H.*: «Versuch einer Systematik des mathematischen Mittelwertbegriffes». *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.22, fasc.4 (1949).
- [2] *Jecklin, H.*: «Über mathematische Mittelwerte». *Elemente der Mathematik*, Band III/1 (1948).
- [3] *Jecklin, H.*: «Quasiarithmetische Mittelwerte», *Elemente der Mathematik*, Band IV/5 und 6 (1949).
- [4] *Quiquet, A.*: «Représentation algébrique des Tables de survie. Généralisation des lois de Gompertz, de Makeham, etc.» *Bulletin de l'Institut des Actuaire français* (1893).

## Résumé

Les résultats obtenus par H. Jecklin dans le domaine de la théorie des valeurs moyennes, et développés dans les publications [1], [2] et [3], sont appliqués au problème de la représentation des annuités viagères sur plusieurs têtes. Par combinaison avec des méthodes appropriées d'usage courant en calcul différentiel, l'auteur montre que le calcul d'une moyenne quasi-arithmétique des âges d'entrée s'impose. La loi du vieillissement uniforme ainsi que la formule de Makeham apparaissent comme une conséquence naturelle de ce calcul spécial de moyenne.

## Riassunto

I risultati di H. Jecklin nel campo della teoria dei valori medi e sviluppati nelle pubblicazioni [1], [2] e [3] sono applicati al problema della rappresentazione delle annuità vitalizie su varie teste. Questi risultati, combinati con metodi adatti d'uso corrente nel calcolo infinitesimale, impongono, come l'autore dimostra, il calcolo d'una media quasi-aritmetica delle età d'entrata. La legge d'invecchiamento uniforme come pure la formola di Makeham appaiono come conseguenza naturale da questa particolare operazione basata sulle medie quasi-aritmetiche.

## Summary

The results obtained by H. Jecklin in his papers [1], [2] and [3] about the theory of means are applied to represent annuities on joint lives. In connection with appropriate methods common in differential calculus a semiarithmetic averaging of the age at entry seems apparent. The law of uniform seniority as well as Makeham's law tend to become the natural consequence of this special averaging process.