Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 59 (1959)

Artikel: Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Autor: Iff, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966821

Zur Darstellung versicherungstechnischer Werte durch Reihen

Von Paul Iff, Zürich

Zusammenfassung

Es werden Reihen hergeleitet, welche die Operation der partiellen Integration, resp. der partiellen Summation in speziell gelagerten Fällen ersetzen, und auf praktische Anwendungsmöglichkeiten dieser Reihen hingewiesen.

Die partielle Integration bzw. die partielle Summation und die Reihenentwicklung sind des öftern zur Behandlung versicherungstechnischer Probleme und zur Darstellung versicherungstechnischer Werte verwendet worden. Wir erlauben uns deshalb, auf zwei Reihen hinzuweisen, die diese Operationen vorausnehmen und diese Darstellung dann als direkte Anwendung liefern. Wir haben die Reihen im Text mit

(A) (§ 1: Die kontinuierliche Betrachtungsweise) und mit

(B) (§ 2: Die diskontinuierliche Betrachtungsweise)

bezeichnet. Eine Herleitung geht in beiden Fällen voraus.

§ 1 Die kontinuierliche Betrachtungsweise

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung für die partielle Integration

$$\int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \int_x^b f(x)\,dx\,dx + a \int_a^b f(x)\,dx \tag{1a}$$

ergibt sich zunächst deren Verallgemeinerung:

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = n!\left\{\int_a^{b\,(n+1)} + \frac{a}{1!}\int_a^{b\,(n)} + \frac{a^2}{2!}\int_a^{b\,(n-1)} + \ldots + \frac{a^n}{n!}\int_a^{b\,(1)}\right\}. \tag{1b}$$

Wir haben uns dabei im Sinne einer Vereinfachung folgender Schreibweise bedient:

$$\int_a^{b\,r} = \int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b f(x)\,dx^r.$$

Wir werden weiter $\int_a^{b\,(r)} x^n$ für $\int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b x^n f(x)\,dx^r$ setzen.

n ist ganzzahlig vorausgesetzt. Zur Herleitung dieser Verallgemeinerung schicken wir folgende Rechenregel voraus:

$$\underbrace{\int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b}_{(r-n)} x \underbrace{\int_x^b \ldots \int_x^b}_{(n)} = \int_a^{b\,(r+1)} + \underbrace{\int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b}_{(r-n-1)} x \underbrace{\int_x^b \ldots \int_x^b}_{(n+1)}.$$

Damit wird:

$$\int_a^{b\,(r)} x = \int_a^{b\,(r+1)} + \underbrace{\int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b}_{(r-1)} x \int_x^b = \int_a^{b\,(r+1)} + \int_a^{b\,(r+1)} + \underbrace{\int_a^b \int_x^b \ldots \int_x^b}_{(r-2)} x \int_x^b \int_x^b = \ldots.$$

Aus r Schritten resultieren auf diese Weise r Glieder der Form $\int_a^{b\,(r+1)}$ und ein Schlussglied der Form $a \int_a^{b\,(r)}$. Es ist also

$$\int_a^{b\,(r)} x = r \int_a^{b\,(r+1)} + a \int_a^{b\,(r)}.$$

Mit Hilfe dieser Formel verifiziert man leicht die Verallgemeinerung (1b) durch Induktion.

Wir betrachten nun das Integral $\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx$, das nach MacLaurin folgende Darstellung erhält:

$$\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx = f_1(0) \int_a^{b\,(1)} + \frac{f_1'(0)}{1!} \int_a^{b\,(1)} x + \frac{f_1''(0)}{2!} \int_a^{b\,(1)} x^2 + \ldots.$$

Die einzelnen Summenglieder rechts zerlegen wir mit Hilfe der Gleichung (1b):

$$f_1(0) \int_a^{b\,(1)} = f_1(0) \int_a^{b\,(1)}$$

$$\frac{f_1'(0)}{1!} \int_a^{b\,(1)} x = \frac{f_1'(0)}{1!} \int_a^{b\,(2)} + a\,\frac{f_1'(0)}{1!} \int_a^{b\,(1)}$$

$$\frac{f_1''(0)}{2!} \int_a^{b\,(1)} x^2 = \frac{f_1''(0)}{2!} \int_a^{b\,(3)} + a\,\frac{f_1''(0)}{2!} \int_a^{b\,(2)} + a^2\,\frac{f_1''(0)}{2!} \int_a^{b\,(1)}$$

$$\frac{f_1'''(0)}{3!} \int_a^{b\,(1)} x^3 = \frac{f_1'''(0)}{3!} \int_a^{b\,(4)} + a\,\frac{f_1'''(0)}{3!} \int_a^{b\,(3)} + a^2\,\frac{f_1'''(0)}{3!} \int_a^{b\,(2)} + a^3\,\frac{f_1'''(0)}{3!} \int_a^{b\,(1)}$$

. . . .

Wir summieren links und rechts, ordnen rechts nach $\int_a^{b\,(1)}, \int_a^{b\,(2)}, \int_a^{b\,(3)} \ldots$ und erhalten:

$$\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx = \left\{f_1(0) + a\,\frac{f_1'(0)}{1!} + a^2\,\frac{f_1''(0)}{2!} + a^3\,\frac{f_1'''(0)}{3!} + \ldots\right\} \int_a^{b\,(1)} +$$

$$\left\{f_1'(0) + a\,\frac{f_1''(0)}{1!} + a^2\,\frac{f_1'''(0)}{2!} + a^3\,\frac{f_1^{(4)}(0)}{3!} + \ldots\right\} \int_a^{b\,(2)} +$$

$$\left\{f_1''(0) + a\,\frac{f_1'''(0)}{1!} + a^2\,\frac{f_1^{(4)}(0)}{2!} + a^3\,\frac{f_1^{(5)}(0)}{3!} + \ldots\right\} \int_a^{b\,(3)} +$$

. . . . ,

oder:

$$\text{(A)}\quad \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx = f_1(a) \int_a^{b\,(1)} + f_1'(a) \int_a^{b\,(2)} + f_1''(a) \int_a^{b\,(3)} + \ldots + f_1^{(r)}(a) \int_a^{b\,(r+1)} + \ldots,$$

wobei $f_1^{(r)}(a)$ die r-te Ableitung von $f_1(x)$ nach x für $x = a$ bedeutet und dem «Integral» $\int_a^{b\,(r)}$ die früher umschriebene Bedeutung zukommt. $f_2(x)$ ist die zu integrierende Funktion.

Mit $f_2(x) = 1$ wird

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = f_1(a)\,\frac{b-a}{1!} + f_1'(a)\,\frac{(b-a)^2}{2!} + f_1''(a)\,\frac{(b-a)^3}{3!} + \dots,$$

$$\text{weil} \int_a^{b\,(r)} dx = \frac{(b-a)^r}{r!}.$$

Daraus ergibt sich durch Differentiation nach b die Taylorsche Reihe, die wiederum die Mac-Laurinsche Reihe als Spezialfall $a = 0$ enthält.

Die Anwendung

a) Die Definitionsgleichung für das *Moment* $m_x^{(k)}$ lautet:

$$m_x^{(k)} = \int_0^\infty (x+t)^k\,\overline{D}_{x+t}\,dt.$$

Mit $f_1(t) = (x+t)^k$ und $f_2(t) = \overline{D}_{x+t}$ wird nach (A)

$$\overline{m}_x^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}\,x^{k-i}\,\overline{S}_x^{(i)}.$$

Dabei haben wir uns der gebräuchlichen Bezeichnung $\int_0^{\infty\,(i+1)} \overline{D}_{x+t}\,dt = \overline{S}_x^{(i)}$ bedient.

Diese Darstellung finden wir z. B. bei Hermann Gubler: «Über eine allgemeine Methode der Lösung des Zinsfussproblems für verschiedene Versicherungsformen und die Darstellung der darin auftretenden Momente» (MSVM Bd. 56, Heft 1). Die Herleitung ist dort grundsätzlich dieselbe; die fortgesetzte partielle Integration, die von Gubler angewendet wird, ist durch die Gleichung (A) vorweggenommen.

b) Der *Barwert der temporären Leibrente* ist: $\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x}\int_0^n e^{-\delta t}\,l_{x+t}\,dt.$

Mit $f_1(t) = e^{-\delta t}$, $f_2(t) = l_{x+t}$, $a = 0$ und $b = n$ wird nach (A):

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x}\left\{\int_0^{n\,(1)} - \delta \int_0^{n\,(2)} + \delta^2 \int_0^{n\,(3)} - + \dots + (-1)^r\,\delta^r \int_0^{n\,(r+1)} + \dots\right\}.$$

Dabei steht
$$\int_0^{n}{}^{(r)} \text{ für } \underbrace{\int_0^n \int_t^n \cdots \int_t^n}_{(r)} l_{x+t}\, dt^r.$$

Mit $f_1(t) = l_{x+t}$, $f_2(t) = e^{-\delta t}$, $a = 0$ und $b = n$ wird
$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x} \left\{ l_x \int_0^{n}{}^{(1)} + l'_x \int_0^{n}{}^{(2)} + l''_x \int_0^{n}{}^{(3)} + \ldots \right\}.$$

Unter den Integralzeichen steht die Funktion $f_2(t) = e^{-\delta t}$.

Der Barwert $\bar{a}^*_{x:\overline{n|}}$, berechnet zum Zinssatz i^* ergibt sich aus den Kommutationszahlen D_{x+t}, berechnet zum Zinssatz i, aus
$$\bar{a}^*_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x} \int_0^{n}{}^{(1)} e^{-(\delta^*-\delta)t} D_{x+t}\, dt$$
$$= \frac{1}{D_x} \left\{ \int_0^{n}{}^{(1)} D_{x+t}\, dt - (\delta^* - \delta) \int_0^{n}{}^{(2)} D_{x+t}\, dt + (\delta^* - \delta) \int_0^{n}{}^{(3)} D_{x+t}\, dt - + \ldots \right\}$$

oder:
$$\bar{a}^*_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\delta^* - \delta)^k \bar{S}^{(k)}_{x:\overline{n|}}.$$

Diese Formel finden wir in der Literatur insbesondere im Zusammenhang mit dem Zinsfussproblem erwähnt. Wir verweisen z. B. auf: E. Fischer: «Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe» (MSVM Bd. 42, Heft 2) und O. W. Spring: «Analytische Betrachtungen zur Änderung des Rechnungszinsfusses und der Sterbetafel bei Versicherungswerten» (MSVM Bd. 50, Heft 1).

§ 2 Die diskontinuierliche Betrachtungsweise

Die Gleichung (1a) erhält in diskontinuierlicher Betrachtungsweise die Form
$$\sum_a^b x\, f(x) = \sum_{a+1}^b \sum_x^b f(x) + a \sum_a^b f(x),$$

und speziell für $a = 0$:
$$\sum_0^b x\, f(x) = \sum_1^b \sum_x^b f(x).$$

Die Grenzen bei der Doppelsumme müssten korrekterweise vertauscht erscheinen. Wenn wir trotzdem obige Schreibweise beibehalten, so müssen wir uns daran erinnern, dass bei der rechnerischen Auswertung der Anwendungsbeispiele diese Summen schrittweise, ausgehend vom höheren Index in Richtung des niedrigeren Index zu bilden sind. Das gleiche gilt für alle «höheren» Summen $\sum^{(r)}$, die später in unsere Formeln eingehen.

Mit Hilfe dieser Formel berechnen wir schrittweise $\sum\limits_0^b x^k f(x)$, für $k = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$

$$\sum_0^b x\, f(x) = \qquad 1!\,\alpha_1^1 \sum_1^{b}{}^{(2)}$$

$$\sum_0^b x^2 f(x) = \qquad 2!\,\alpha_2^2 \sum_2^{b}{}^{(3)} + 1!\,\alpha_1^2 \sum_1^{b}{}^{(2)}$$

$$\sum_0^b x^3 f(x) = \qquad 3!\,\alpha_3^3 \sum_3^{b}{}^{(4)} + 2!\,\alpha_2^3 \sum_2^{b}{}^{(3)} + 1!\,\alpha_1^3 \sum_1^{b}{}^{(2)}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_0^b x^k f(x) = k!\,\alpha_k^k \sum_k^{b}{}^{(k+1)} + (k-1)!\,\alpha_{k-1}^k \sum_{k-1}^{b}{}^{(k)} \ldots + 3!\,\alpha_3^k \sum_3^{b}{}^{(4)} + 2!\,\alpha_2^k \sum_2^{b}{}^{(3)} + 1!\,\alpha_1^k \sum_1^{b}{}^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dabei haben wir vereinfachend $\sum\limits_r^{b}{}^{(r+1)}$ für $\underbrace{\sum\limits_r^b \sum\limits_x^b \ldots \sum\limits_x^b}_{(r+1)} f(x)$ gesetzt.

Die Faktoren α ergeben sich nach der Rekursionsformel

$$\alpha_k^r = k\,\alpha_k^{r-1} + \alpha_{k-1}^{r-1},$$

aus den Anfangswerten $\alpha_0^r = 0$, $\alpha_1^r = 1$ und $\alpha_k^r = 0$ für alle $r < k$. Sie stellen also das System der Stirlingschen Zahlen zweiter Art dar.

Als Regel für die Durchführung der Berechnung von $\sum\limits_0^b x^k f(x)$ sei noch erwähnt:

$$\sum_r \sum_x \cdots \sum_{x+1} \cdots = \sum_{r+1} \sum_x \cdots \sum_x \cdots.$$

Nach Mac-Laurin wird nun

$$\sum_0^b f_1(x) f_2(x) = f_1(0) \sum_0^{b}{}^{(1)} + \frac{f_1'(0)}{1!} \sum_0^{b}{}^{(1)} x + \frac{f_1''(0)}{2!} \sum_0^{b}{}^{(1)} x^2 + \ldots,$$

wo $\sum\limits_0^{b}{}^{(1)} x^k$ für $\sum\limits_0^{b}{}^{(1)} x^k f_2(x)$ steht.

In diese Reihe führen wir die für $\sum_0^{b}{}^{(1)} x^k f(x)$ ermittelten Werte (mit $f(x) = f_2(x)$) ein und ordnen die Glieder rechts nach $\sum_1{}^{(2)}, \sum_2{}^{(3)}, \sum_3{}^{(4)}, \ldots$. Wir erhalten so die der Reihe (A) entsprechende Form:

$$\sum_0^b f_1(x)\, f_2(x) = f_1(0) \sum_0^b{}^{(1)} + \left\{\alpha_1^1 \frac{f_1'(0)}{1!} + \alpha_1^2 \frac{f_1''(0)}{2!} + \alpha_1^3 \frac{f_1'''(0)}{3!} + \ldots\right\} \sum_1^b{}^{(2)}$$

$$+ 2!\left\{\alpha_2^2 \frac{f_1''(0)}{2!} + \alpha_2^3 \frac{f_1'''(0)}{3!} + \alpha_2^4 \frac{f_1^{(4)}(0)}{4!} + \ldots\right\} \sum_2^b{}^{(3)}$$

$$+ 3!\left\{\alpha_3^3 \frac{f_1'''(0)}{3!} + \alpha_3^4 \frac{f_1^{(4)}(0)}{4!} + \alpha_3^5 \frac{f_1^{(5)}(0)}{5!} + \ldots\right\} \sum_3^b{}^{(4)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

oder

$$\text{(B)} \quad \sum_0^b f_1(x)\, f_2(x) = \sum_{x=0}^{b}{}^{(1)} \left[\sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \frac{f_1^{(x+\varrho)}(0)}{(x+\varrho)!}\, x! \sum_{x_1=x}^{b}{}^{(x+1)} f_2(x_1) \right],$$

wobei wir $\alpha_0^0 \dfrac{f_1^{(0)}(0)}{0!}\, 0! = f_1(0)$ setzen.

Die Bestimmung des Operators $\Delta f_1(x) = \sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_x^{x+\varrho} \dfrac{f_1^{(x+\varrho)}(0)}{(x+\varrho)!}$ wird die jeweilige Aufgabe der Anwendung der Formel (B) sein. In den Anwendungen auf versicherungstechnische Probleme wird die Zeit t als Variable auftreten und wir wiederholen die Formel

$$\sum_0^b f_1(t)\, f_2(t) = \sum_{t=0}^{b}{}^{(1)} \left[\sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \frac{f_1^{(t+\varrho)}(0)}{(t+\varrho)!}\, t! \sum_{t_1=t}^{b}{}^{(t+1)} f_2(t_1) \right],$$

mit dem Operator

$$\Delta f_1(t) = \sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \frac{f_1^{(t+\varrho)}(0)}{(t+\varrho)!}.$$

Wir weisen darauf hin, dass durch die Formel (B) die Summen von $f_2(t)$ mit einem, mit der Ordnungszahl der Summe steigenden Summationsindex in die Rechnung eingehen.

Die Anwendung

a) Zu berechnen sei die *Summe von Potenzen:* $\sum_0^n t^k$, k ganzzahlig.

Wir setzen $f_1(t) = t^k$, $f_2(t) = \frac{t}{t} = 1$ und erhalten mit $\Delta f_1(t) = \alpha_t^k$

$$\sum_0^n t^k = \sum_{t=0}^{n}{}^{(1)} \alpha_t^k \, t! \sum_{t_1=t}^{n}{}^{(t+1)} \frac{t_1}{t_1},$$

$$\text{wo} \sum_{t_1=t}^{n}{}^{(t+1)} \frac{t_1}{t_1} = \binom{n+1}{t_1+1} \text{ und } \alpha_t^k = 0 \text{ für } t > k.$$

b) Die Definitionsgleichung für das *Moment* $m_x^{(k)}$ lautet:

$$m_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} (x+t)^k D_{x+t}.$$

Wir setzen $f_1(t) = (x+t)^k$ und $f_2(t) = D_{x+t}$ und haben

$$f_1(0) = x^k; \quad \Delta f_1(t) = \sum_{\varrho=0}^{k-t} \alpha_t^{t+\varrho} \binom{k}{t+\varrho} x^{k-t-\varrho}.$$

Wir erinnern daran, dass die Summen $\sum^{(r)}$ schrittweise, ausgehend vom höheren Index in Richtung des niedrigeren Index zu bilden sind, so dass wir uns der herkömmlichen Bezeichnungen

$$\sum_{t=0}^{\omega-x}{}^{(1)} D_{x+t} = S_x^{(0)} \ldots \sum_{t=0}^{\omega-x}{}^{(t+1)} D_{x+t} = S_{x+t}^{(t)}$$

bedienen; so wird

$$m_x^{(k)} = x^k S_x^{(0)} + \sum_{t=1}^{k}{}^{(1)} \left[\sum_{\varrho=0}^{k-t}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \binom{k}{t+\varrho} x^{k-t-\varrho} \, t! \, S_{x+t}^{(t)} \right].$$

Diese Formel ist schwerfälliger als diejenige, die Hermann Gubler in seiner bereits erwähnten Arbeit mit Hilfe der Stirlingschen Zahlen hergeleitet hat; ihre praktische Auswertung gestaltet sich aber ebenso einfach. Sie reduziert sich z. B. für $k = 3$ auf die Form

$$m_x^{(3)} = H_1(x) \, S_x^{(0)} + H_2(x) \, S_{x+1}^{(1)} + H_3(x) \, S_{x+2}^{(2)} + H_4(x) \, S_{x+3}^{(3)}.$$

Die Faktoren $H_1(x) = x^3$, $H_2(x) = 3(x^2+x+1) - 2$, $H_3(x) = 3!\,(x+1)$ und $H_4(x) = 3!$, für alle x ermittelt, lassen sich auf jede beliebige Tafel anwenden.

Mit diesem Beispiel und dem Literaturhinweis wollten wir dartun, dass mit der Reihe (B) tatsächlich eine gewisse Vorarbeit geleistet ist.

c) Zu berechnen sei der *Barwert der jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente 1.*

Für diesen Barwert $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, l_{x+t}$ erhalten wir mit

$$f_1(t) = v^t, \quad f_2(t) = l_{x+t} \quad \text{und} \quad \Delta f_1(t) = \sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \frac{(\ln v)^{t+\varrho}}{(t+\varrho)!},$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[\sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \frac{(\ln v)^{t+\varrho}}{(t+\varrho)!} \, t! \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} l_{x+t_1} \right].$$

Es ist nun aber:

$$t! \, \Delta f_1(t) = t! \sum_{\varrho=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+\varrho} \frac{(\ln v)^{t+\varrho}}{(t+\varrho)!} = (v-1)^t,$$

und damit vereinfacht sich die Barwertformel zu

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} l_{x+t_1} \right].$$

Die Behauptung $t! \, \Delta f_1(t) = (v-1)^t$ bestätigen wir am Beispiel wie folgt:

$$(v-1)^t = \sum_{\varrho=0}^{t}{}^{(1)} v^\varrho \, (-1)^{t-\varrho} \binom{t}{t-\varrho}$$

zerlegen wir nach (B) und haben:

$$(v-1)^t = \sum_{\varrho=0}^{t}{}^{(1)} \left[\sum_{s=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_\varrho^{\varrho+s} \frac{(\ln v)^{\varrho+s}}{(\varrho+s)!} \, \varrho! \sum_{\varrho_1=\varrho}^{t}{}^{(\varrho+1)} (-1)^{t-\varrho_1} \binom{t}{t-\varrho_1} \right].$$

Es wäre zu zeigen, dass die Summen $\sum_{\varrho_1=\varrho}^{t}{}^{(\varrho+1)} (-1)^{t-\varrho_1} \binom{t}{t-\varrho_1}$ für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, (t-1)$ verschwinden, so dass rechts lediglich das Glied mit $\sum_{t}^{t}{}^{(t+1)} (-1)^0 \binom{r}{0} = 1$ übrigbleibt. Wir haben uns begnügt, dies rechnerisch an den Beispielen $\varrho = 1, 2, \ldots, 6$ zu bestätigen.

Der Vergleich der vorstehenden Barwertformel mit der Grundformel

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, l_{x+t}$$

führt zu folgender Verallgemeinerung der Darstellung:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (v-\lambda)^t \, l_{x+1}^{(\lambda)},$$

wo

$$l_x^{(\lambda)} = \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} l_{x+t}^{(\lambda-1)}, \quad l_{x+1}^{(\lambda)} = \sum_{t=1}^{n-1}{}^{(2)} l_{x+t}^{(\lambda-1)}, \quad \ldots, \quad \lambda \text{ ganzzahlig.}$$

Sind die diskontierten Zahlen der Lebenden $D^{i^*}_{x+t}$, berechnet nach dem Zinssatz i^* und ihre Summen gegeben, so berechnet sich nach (B) der Leibrentenbarwert $\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|}$ zu:

$$\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D^{i^*}_x} \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(h-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} D^{i^*}_{x+t_1}\right], \quad \text{mit } h = \frac{1+i^*}{1+i} - 1.$$

Das ist die bekannte Formel von James Meikle, die vielfach im Zusammenhang mit dem Zinsfussproblem erwähnt und verwendet wurde. Die Reihe nach Potenzen von $(h-1)$ konvergiert natürlich rascher als die Reihe nach Potenzen von $(v-1)$. Letztere stellt nichts anderes als den Spezialfall $i^* = 0$ dar. Wir verweisen auf die bereits früher erwähnten Arbeiten von E. Fischer und O. W. Spring.

d) Die unter *c)* erwähnte Reihe nach Potenzen von $(v-1)$ drückt den Rentenbarwert unter Umgehung der Kommutationszahlen direkt durch die Zahlen l_x und deren Summen aus. Wir wollen nun die Summe $S^{(r)}_x = \underbrace{\sum \sum \ldots \sum}_{(r+1)} D_x$ entsprechend darstellen. Aus der Potenzreihe nach $(v-1)$ ergibt sich für die r-te Ableitung des Rentenbarwertes nach v:

$$\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = \frac{r!}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[\binom{r+t}{t} (v-1)^t \sum_{t_1=t+r}^{n-1}{}^{(r+t+1)} l_{x+t_1}\right].$$

Andererseits ist

$$\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = \frac{r!}{v^r} \frac{S^{(r)}_{x+r:\overline{n-r}|}}{D_x},$$

so dass wir

$$S^{(r)}_{x:\overline{n}|} = v^x \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[\binom{r+t}{t} (v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(r+t+1)} l_{x+t_1}\right]$$

haben.

Die Beispiele *c)* und *d)* möchten wir lediglich als Anwendungen der allgemeinen Formel (B) aufgefasst sehen. Neues bringen diese nicht. Die Durchführung der Rechnung nach den Reihen in $(v-1)^t$ setzt die Bildung der Summen $\sum^{n-1}{}^{(r)} l_x$ voraus. Es darf allerdings gesagt werden, dass eine in dieser Weise für ein bestimmtes Endalter aufsummierte Tafel der Rechnung nach verschiedenen Zinsfüssen direkt zugänglich ist und die Bildung der Kommutationszahlen nicht verlangt.

e) Die Absterbeordnung sei in der Form des *Makehamschen Gesetzes* gegeben:

$$l_{x+t} = k\, s^{x+t}\, g^{c^{x+t}} \quad \text{mit} \quad \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (s\,v)^t\, g^{c^{x+t}}\, g^{-c^x}.$$

Wir setzen $f_1(t) = g^{c^{x+t}} g^{-c^x}$ und $f_2(t) = (s\,v)^t$ und bilden zunächst die Ableitungen $f_1'(0)$, $f_1''(0)$, ...

$$\begin{aligned}
f_1(0) &= 1\\
f_1'(0) &= \ln g \ln c\, c^x\\
f_1''(0) &= \ln g\,(\ln c)^2\, c^x + \alpha_2^2\,(\ln g)^2\,(\ln c)^2\, c^{2x}\\
f_1'''(0) &= \ln g\,(\ln c)^3\, c^x + \alpha_2^3\,(\ln g)^2\,(\ln c)^3\, c^{2x} + \alpha_3^3\,(\ln g)^3\,(\ln c)^3\, c^{3x}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zu einer praktisch verwendbaren Formel gelangen wir bei Verwendung sämtlicher Summenglieder von $f_1^{(r)}(0)$ nicht. Die neueren Sterbetafeln, die nach Makeham ausgeglichen wurden, weisen für die Konstante $g<1$ Werte auf, die sehr nahe 1 liegen. Dies gilt in besonders hohem Masse für einige moderne Sterbetafeln für Frauen. Dieser Umstand legte es nahe, die Glieder in $(\ln g)^2$, $(\ln g)^3$, ... zu vernachlässigen und sich mit der entsprechenden Annäherung zu begnügen. Wir erhalten dann für den Operator $\Delta f_1(t)$ den Wert

$$\Delta f_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty}{}^{(1)} \alpha_t^{t+i}\, \frac{(\ln c)^{t+i}}{(t+i)!} = \frac{1}{t!}\,(c-1)^t$$

und damit als angenäherten Rentenbarwert:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \sim \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (s\,v)^t - c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (s\,v)^t + c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(c-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} (s\,v)^{t_1}\right].$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(c-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} (s\,v)^{t_1}\right] &= \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (s\,v\,c)^t = \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} (s\,c)^{t_1}\right]\\
&= \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(s\,c-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} v^{t_1}\right] = \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(s\,c\,v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} \frac{t_1}{t_1}\right]
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \sum_{t}^{n-1}{}^{(t+1)} \frac{t}{t} = \binom{n}{t+1}.$$

Entsprechendes gilt für die Glieder in $\sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (s\,v)^t$.

Damit erhalten wir folgende äquivalente Darstellungen für den angenäherten Rentenbarwert:

$$1.\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1-c^x \ln g) \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (sv)^t + c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} (scv)^t,$$

$$2.\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1-c^x \ln g) \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} s^{t_1}\right] + c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(v-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} (sc)^{t_1}\right],$$

$$3.\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1-c^x \ln g) \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(s-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} v^{t_1}\right] + c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(sc-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} v^{t_1}\right],$$

$$4.\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim (1-c^x \ln g) \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(sv-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} \frac{t_1}{t_1}\right] + c^x \ln g \sum_{t=0}^{n-1}{}^{(1)} \left[(scv-1)^t \sum_{t_1=t}^{n-1}{}^{(t+1)} \frac{t_1}{t_1}\right].$$

Die Annäherung der nach diesen Formeln ermittelten Barwerte an die aus den Kommutationszahlen berechneten Werte ist um so grösser, je näher g bei 1 liegt. Wir haben die Abweichungen für 3 Tafeln und für das Feld $20 \leqq x \leqq 50$, $x+n \leqq 60$ und $i = 2\frac{1}{2}\%$, 3% und $3\frac{1}{2}\%$ ermittelt und folgende Limiten festgestellt:

Abweichungen der nach der Näherungsformel ermittelten Barwerte von den aus den Kommutationszahlen berechneten Werten

a) Tafel SM 1939/44:	$s = 0.99900$	*Abweichungen*
	$g = 0.99918$	0—3‰
	$c = 1.08952$	
b) Tafel SF 1939/44:	$s = 0.99854$	*Abweichungen*
	$g = 0.99975$	0—1‰
	$c = 1.11057$	
c) Tafel FG 1948:	$s = 0.998810$	*Abweichungen*
	$g = 0.999896$	0—0,1‰
	$c = 1.116283$	

Mit wachsendem Endalter nehmen die Abweichungen rasch zu; sie bleiben aber bei der Tafel *b)* und in erhöhtem Masse bei der Tafel *c)* auch für $x+n = 70$ noch innerhalb praktisch tragbarer Grenzen. Die Abweichungen sind zudem dem Vorzeichen nach alle gleich. Was für die Annäherung der Rentenbarwerte gilt, trifft a fortiori für die Prämienreserve zu. Die Näherungsformel für den Rentenbarwert liegt denn auch verschiedenen Methoden zur näherungsweisen Berechnung des Deckungskapitals zugrunde. Wir verweisen z. B. auf A. Berger: Die Prinzipien der Lebensversicherungs-Technik, 1. Teil § 22: «Die Näherungsmethoden für die Deckungskapitalberechnung».

Der Näherungsformel

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{1-(sv)^n}{1-sv} + c^x \ln g \frac{1-(scv)^n}{1-scv}$$

entspricht bei kontinuierlicher Betrachtungsweise die Formel

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} \sim (1 - c^x \ln g) \frac{(sv)^n - 1}{\ln(sv)} + c^x \ln g \frac{(scv)^n - 1}{\ln(scv)}.$$

Wir haben für die Tafel FG 1948 einige Barwerte zum Zinssatz 2½% nach beiden Formeln ermittelt und ihr Verhältnis wie folgt bestimmt:

$$\frac{\ddot{a}_{20:\overline{40|}}}{\bar{a}_{20:\overline{40|}}} = 1.0137; \qquad \frac{\ddot{a}_{30:\overline{30|}}}{\bar{a}_{30:\overline{30|}}} = 1.0140;$$

$$\frac{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}{\bar{a}_{40:\overline{20|}}} = 1.0146; \qquad \frac{\ddot{a}_{50:\overline{10|}}}{\bar{a}_{50:\overline{10|}}} = 1.0155.$$

Diese Verhältniszahlen setzen wir dem konstanten Faktor gegenüber, der nach $f(\delta\mu) = \dfrac{\delta+\mu}{1-e^{-(\delta+\mu)}}$ auf Grund eines mittleren μ_x festgesetzt und zur Berechnung des Barwertes der jährlich vorschüssig zahlbaren Rente aus dem entsprechenden Barwert der kontinuierlichen Rente verwendet wird. Wir verweisen auf: «Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen 1948».

Die vorstehenden Näherungsformeln (1) bis (4) ergeben sich als genaue Barwerte zum Sterbegesetz

$$l_{[x]+t} = l_{[x]}\, s^t \left\{1 + c^x \ln g\, (c^t - 1)\right\}.$$

Diese Ordnung ist nach x und t abgestuft. Sie fügt sich der Reihe der Sterbegesetze an, die eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlauben. Wir verweisen in diesem Zusammenhang beispielsweise auf die Arbeit der Herren H. Jecklin und W. Leimbacher: «Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaubt». (MSVM Bd. 53, Heft 2).

Die zugehörige einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit

$$q_x = 1 - s\{1 + c^x \ln g(c-1)\}$$

ist von G. Albers zur Herleitung eines vereinfachten Verfahrens der Lebensversicherung gegen natürliche Prämien verwendet worden (MSVM Bd. 47, Heft 2).

Wir haben dieser Anwendung deshalb so viel Platz eingeräumt, weil unsere Rechnungen gezeigt haben, dass die mitgeteilten Näherungsformeln für den Rentenbarwert für einige heute gebräuchliche Sterbetafeln die nach den Kommutationszahlen ermittelten Werte in einem recht weiten versicherungstechnischen Raume (x, n, i) mit grosser Genauigkeit wiederzugeben vermögen.

Résumé

L'auteur forme des séries qui peuvent remplacer dans certains cas particuliers l'intégration partielle, respectivement la sommation partielle. Il indique également dans quels cas pratiques il est possible d'utiliser ces séries.

Riassunto

Si deduce delle serie che possono sostituirsi, in casi particolari, all'integrazione parziale o alla sommazione parziale rispettivamente, e si dimostra l'utilità pratica di queste serie.

Summary

Series are being formed, replacing in specially placed cases partial integration or partial summation, and thereby these series demonstrate their practical usage.