Die Bezeichnungsweise der Bernoullischen Zahlen

Autor(en): **Adrian, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **59 (1959)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966818

Die Bezeichnungsweise der Bernoullischen Zahlen

Von P. Adrian, Zürich

Zusammenfassung

Es wird untersucht, welches die zweckmässigste Bezeichnungsweise für die Bernoullischen Zahlen ist, nachdem in der mathematischen Literatur diesbezüglich keine Einheitlichkeit besteht.

Für die Bernoullischen Zahlen hat sich eine einheitliche Bezeichnungsweise bisher leider noch nicht durchzusetzen vermocht. Zwar wird jetzt von allen Mathematikern der Buchstabe B mit Index verwendet; doch bezeichnet der eine Autor nur die von Null verschiedenen Bernoullischen Zahlen mit fortlaufenden Indizes, während der andere auch die Zahlen vom Wert Null mitnumeriert; der eine bezeichnet die absoluten Zahlen, während der andere das wechselnde Vorzeichen mitnimmt; beim einen endlich erscheint die Skala der Indizes gegenüber dem andern um 1 verschoben. – In der folgenden Übersicht sind die gebräuchlichsten Bezeichnungen zusammengestellt.

Wert	Bezeichnung				
	I	II	III	IV	V
$\frac{1}{2}$				B_1	$-B_1$
$\frac{1}{6}$	A	B_1	B_1	B_2	B_2
0		B_2		B_3	B_3
$-\frac{1}{30}$	B	$-B_3$	$-B_2$	B_4	B_4
0		B_4		B_5	B_5
$\frac{1}{42}$	C	B_5	B_3	B_6	B_6
0		B_6		B_7	B_7
$-\frac{1}{30}$	D	$-B_7$	$-B_4$	B_8	B_8

Spalte I gibt die Bezeichnung der ältesten Autoren (Bernoulli, Euler); die Indizes waren damals noch nicht gebräuchlich.

Die Bezeichnung der Spalte II findet sich z. B. in den Werken von Schlömilch.

Spalte III enthält die Bezeichnung, wie sie Saalschütz in seinen Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen verwendet hat. Sie wurde von der grossen Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und ebenso von Weber und Wellsteins Enzyklopädie der Elementarmathematik übernommen.

In Abweichung von der sonst meist als massgebend geltenden Enzyklopädie haben spätere Kompendien die Bezeichnung der Spalte IV eingeführt, so Pascals Repertorium der höheren Mathematik und das Taschenbuch für Mathematiker und Physiker (B. G. Teubner).

Die Bezeichnung der Spalte V wird verwendet von Nörlund in seinen Vorlesungen über Differenzenrechnung; sie unterscheidet sich von IV nur durch das Vorzeichen von B_1.

Im folgenden soll untersucht werden, welche Bezeichnungsweise für die Bernoullischen Zahlen die zweckmässigste ist. Als die zweckmässigste ist dabei diejenige zu betrachten, die sich bei der Einführung der Benoullischen Zahlen am zwanglosesten ergibt und die die Beziehungen in der elegantesten Form, wenn möglich als symbolische Gleichungen, anzuschreiben gestattet.

Zur Einführung der Bernoullischen Zahlen dient am besten die nachfolgende Herleitung der *Eulerschen Summenformel.*

Es bedeute $F(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $k+1$. Die Variable x bewege sich in dem Intervall von a bis b, welches Intervall in gleiche Stücke von der Grösse h, also $\frac{b-a}{h}$ an Zahl, geteilt werde.

In der Gleichung

$$F(b)-F(a) = F(a+h)-F(a)+F(a+2h)-F(a+h)+\ldots+F(b-h+h)-F(b-h)$$

entwickelt man jede der Differenzen der rechten Seite als Taylorsche Reihe nach steigenden Potenzen von h und fasst die Glieder mit der gleichen Potenz von h zusammen.

In gleicher Weise verfährt man mit $F'(b)-F'(a)$, $F''(b)-F''(a)\ldots$ $F^{(k)}(b)-F^{(k)}(a)$ und erhält dadurch im ganzen ein System von $k+1$

Gleichungen, in welchem rechts die $k+1$ Grössen

$$F^{(i)}(a)+F^{(i)}(a+h)+F^{(i)}(a+2h)+\ldots+F^{(i)}(b-h)$$
$$(i=1,2,3,\ldots,k+1)$$

als Koeffizienten auftreten. Man eliminiert davon die k Koeffizienten mit $i=2,3,\ldots,k+1$, indem man die 2. Gleichung mit $-h\frac{1}{2}$, die $(i+1)$-te mit $h^i\dfrac{B_i}{i!}$ $(i=2,3,\ldots,k)$ multipliziert, die so erweiterten Gleichungen addiert und die B nachträglich so bestimmt, dass in der Additionsgleichung die Faktoren der zu eliminierenden Grössen verschwinden. Die Additionsgleichung nimmt dann die einfache Gestalt an (linke und rechte Seite vertauscht):

$$h[F'(a)+F'(a+h)+F'(a+2h)+\ldots+F'(b-h)]=$$
$$=F(b)-F(a)-\frac{h}{2}[F'(b)-F'(a)]+\frac{h^2B_2}{2!}[F''(b)-F''(a)]+$$
$$+\frac{h^3B_3}{3!}[F'''(b)-F'''(a)]+\ldots+\frac{h^kB_k}{k!}[F^{(k)}(b)-F^{(k)}(a)], \qquad (1)$$

wobei für die B die Rekursionsformel gilt:

$$\frac{1}{(i+1)!}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{i!}+\frac{B_2}{(i-1)!\,2!}+\frac{B_3}{(i-2)!\,3!}+\ldots+\frac{B_i}{1!\,i!}=0$$

oder

$$1-\frac{1}{2}(i+1)+\binom{i+1}{2}B_2+\binom{i+1}{3}B_3+\ldots+\binom{i+1}{i}B_i=0. \qquad (2)$$

Gleichung (2) liefert die Bernoullischen Zahlen von B_2 an in der Schreibweise IV oder V. Der Wert von B_1 ist noch nicht festgesetzt; nach den Gleichungen (1) und (2) würde es naheliegen, $B_1=-\frac{1}{2}$ anzunehmen und diese Gleichungen dementsprechend zu schreiben, womit man sich für die Schreibweise V entschieden hätte. Es soll nun aber gezeigt werden, dass man mit genau dem gleichen Recht auch $B_1=\frac{1}{2}$ setzen könnte.

Stellt man nämlich $y=F'(x)$ als Kurve im Cartesischen Koordinatensystem dar, so bedeutet $F(b)-F(a)$ das von der Kurve begrenzte Flächenstück zwischen den Ordinaten $x=a$ und $x=b$. Die linke Seite der Gleichung (1) stellt ebenfalls einen Flächeninhalt zwischen den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ dar, doch ist die Begrenzung durch die treppenförmige gebrochene Linie (Fig. 1) gegeben.

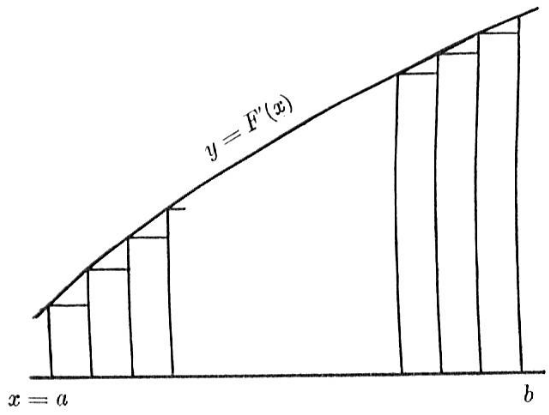

Fig. 1

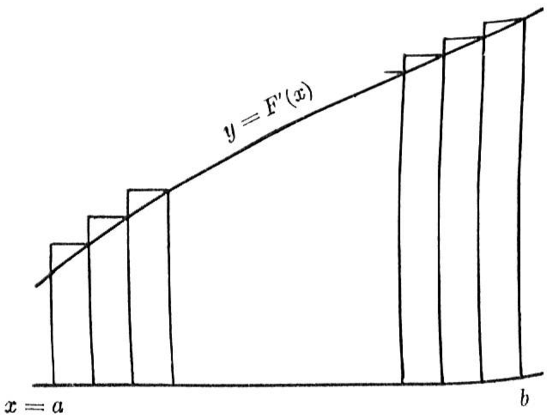

Fig. 2

Dabei liegen die *links*seitigen Endpunkte der horizontalen Strecken der Treppe auf der Kurve, und es ist klar, dass mit gleicher Berechtigung auch die *rechts*seitigen Endpunkte auf die Kurve verlegt werden können (Fig. 2). In der Tat kann man in der Herleitung von Anfang an auf eine Gleichung hinsteuern, deren linke Seite durch den Inhalt der treppenförmigen Fläche der Fig. 2 dargestellt wird; dies geschieht, indem man, ausgehend von der Gleichung

$$F(b) - F(a) = F(a+h) - F(a+h-h) + F(a+2h) - F(a+2h-h) + \\ + \ldots + F(b) - F(b-h)$$

jede der Differenzen der rechten Seite als Taylorsche Reihe nach steigenden Potenzen von h entwickelt (im Gegensatz zur ersten Herleitung haben die Reihen Zeichenwechsel) und wie früher die Glieder mit der gleichen Potenz von h zusammenfasst. Verfährt man dann in gleicher Weise mit $F'(b) - F'(a)$, $F''(b) - F''(a) \ldots F^{(k)}(b) - F^{(k)}(a)$, so erhält man im Ganzen ein System von $k+1$ Gleichungen, in welchem die $k+1$ Grössen

$$F^{(i)}(a+h) + F^{(i)}(a+2h) + \ldots + F^{(i)}(b) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k+1)$$

als Koeffizienten auftreten. Man eliminiert davon die k Koeffizienten mit $i = 2, 3, \ldots, k+1$, indem man die 2. Gleichung mit $h\frac{1}{2}$, die $(i+1)$-te mit $(-1)^i h^i \dfrac{B_i}{i!}$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$ multipliziert, die so erweiterten Gleichungen addiert und die B nachträglich so bestimmt, dass in der

Additionsgleichung die Faktoren der zu eliminierenden Grössen verschwinden. Die Additionsgleichung erscheint dann in der folgenden Gestalt:

$$h[F'(a+h)+F'(a+2h)+\ldots+F'(b-h)+F'(b)] =$$
$$= F(b)-F(a)+\frac{h}{2}[F'(b)-F'(a)]+\frac{h^2 B_2}{2!}[F''(b)-F''(a)]-$$
$$-\frac{h^3 B_3}{3!}[F'''(b)-F'''(a)]+-\ldots+(-1)^k\frac{h^k B_k}{k!}[F^{(k)}(b)-F^{(k)}(a)]. \quad (1a)$$

Als Rekursionsformel für die B erscheint, nach Abspaltung des Faktors $(-1)^i$, wiederum die Gleichung (2). Die rechte Seite von Gleichung (1a) hat, im Gegensatz zu Gleichung (1), Zeichenwechsel; man kann daraus schliessen, dass die B mit ungeradem Index gleich 0 sind.

Die linke Seite von Gleichung (1a) stellt nun wirklich den Inhalt der treppenförmigen Fläche der Fig. 2 dar. Sie ist um $h[F'(b)-F'(a)]$ grösser als die linke Seite der Gleichung (1); dementsprechend ist auf der rechten Seite das Glied mit h positiv, und aus Gleichung (1a) sollte man $B_1 = \frac{1}{2}$ setzen (Schreibweise IV).

Dieser Doppelspurigkeit geht man aus dem Weg, indem man von den Gleichungen (1) und (1a) je für die rechte und die linke Seite das arithmetische Mittel nimmt. Es ergibt sich

$$h[\tfrac{1}{2}F'(a)+F'(a+h)+F'(a+2h)+\ldots+F'(b-h)+\tfrac{1}{2}F'(b)] =$$
$$= F(b)-F(a)+\frac{h^2 B_2}{2!}[F''(b)-F''(a)]+\frac{h^4 B_4}{4!}[F^{\mathrm{IV}}(b)-F^{\mathrm{IV}}(a)]+$$
$$+\ldots+\frac{1+(-1)^k}{2}\,\frac{h^k B_k}{k!}[F^{(k)}(b)-F^{(k)}(a)].$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Inhalt der treppenförmigen Fläche der Fig. 3 dar; die rechte Seite enthält nur noch Glieder mit geraden Potenzen von h, Ableitungen geraden Grades von F und Bernoullische Zahlen mit geradem Index. Da $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$ ist,

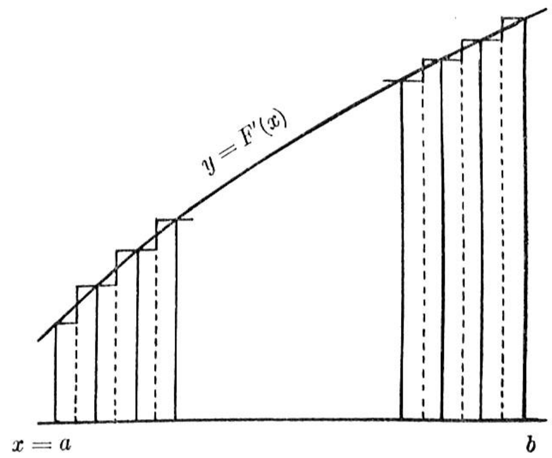

Fig. 3

kann man die Glieder mit diesen Faktoren beifügen und gelangt jetzt notwendig dazu, die Reihe noch durch ein Glied mit B_1 zu ergänzen, wobei $B_1 = 0$ ist, gleich den andern Bernoullischen Zahlen mit ungeradem Index.

Die Eulersche Summenformel lautet dann

$$h[\tfrac{1}{2}F'(a)+F'(a+h)+F'(a+2h)+\ldots+F'(b-h)+\tfrac{1}{2}F'(b)] =$$
$$= F(b)-F(a) \pm \frac{h\,B_1}{1!}[F'(b)-F'(a)] + \frac{h^2 B_2}{2!}[F''(b)-F''(a)] \pm$$
$$\pm \frac{h^3 B_3}{3!}[F'''(b)-F'''(a)] + \pm \ldots + (\pm 1)^k \frac{h^k B_k}{k!}[F^{(k)}(b)-F^{(k)}(a)] \quad \text{(I)}$$

und die Rekursionsformel für die Bernoullischen Zahlen

$$\left.\begin{aligned} 1 \pm \binom{i+1}{1} B_1 + \binom{i+1}{2} B_2 \pm \binom{i+1}{3} B_3 + \pm \ldots + (\pm 1)^i \binom{i+1}{i} B_i &= \frac{i+1}{2} \\ \text{oder symbolisch} \qquad (1 \pm B)^{i+1} - (\pm 1)^{i+1} B^{i+1} &= \frac{i+1}{2}. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Die hier gewählte Bezeichnungsweise der Bernoullischen Zahlen lässt die vorstehenden Formeln in eleganterer Gestalt erscheinen als eine der andern Bezeichnungsweisen.

Setzt man in der Formel (I)

$$F(x) = x^{k+1}, \qquad a = 0, \qquad b = n, \qquad h = 1,$$

so ergibt sich

$$(k+1)\,[\tfrac{1}{2}\,0^k + 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k + \tfrac{1}{2}n^k] =$$
$$= n^{k+1} \pm \binom{k+1}{1} B_1 n^k + \binom{k+1}{2} B_2 n^{k-1} \pm$$
$$\pm \binom{k+1}{3} B_3 n^{k-2} + \pm \ldots + (\pm 1)^k \binom{k+1}{k} B_k n,$$

welche Gleichung die schon von Jakob Bernoulli durch unvollständige Induktion gefundene Formel für die Potenzsummen wiedergibt; setzt man ausserdem noch $n = 1$, so ergibt sich Formel (II), wenn darin k an Stelle von i geschrieben wird.

Wie steht es mit den andern Formeln, in denen Bernoullische Zahlen auftreten?

Vielfach werden die Bernoullischen Zahlen definiert als Koeffizienten der Entwicklung einer transzendenten Funktion, der sogenannten erzeugenden Funktion, in eine Potenzreihe.

So pflegt man unter Verwendung der Schreibweise IV und mit $B_0 = 1$ zu setzen:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} x^k,$$

wobei der Vorzeichenwechsel der Summe nur wegen des Gliedes mit $k = 1$ eingeführt wird.

Nach der hier vorgeschlagenen Schreibweise der Bernoullischen Zahlen hätte man als erzeugende Funktion anzunehmen:

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \mathfrak{Ctg} \frac{x}{2},$$

und die Definitionsgleichung würde lauten:

$$\frac{x}{2} \mathfrak{Ctg} \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{B_k}{k!} x^k. \tag{III}$$

Die Funktion $\frac{x}{2} \mathfrak{Ctg} \frac{x}{2}$ als erzeugende Funktion ist der andern $\frac{x}{e^x - 1}$ vorzuziehen, weil man ihr sofort ansieht, dass die Glieder mit ungeraden Potenzen von x verschwinden, während der Ausdruck $\frac{x}{e^x - 1}$ eine kleine Umformung erfordert, damit ersichtlich wird, dass die Glieder mit ungeraden Potenzen von der 3. an verschwinden.

Es seien noch einige bekannte Sätze über die Bernoullischen Zahlen angeführt, die ebenfalls zeigen, dass die von uns gewählte Bezeichnungsweise die zweckmässigste ist.

Zusammenhang mit der Funktion $\zeta(n) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{1}{\lambda^n}$:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \tag{IV}$$

Zusammenhang mit den Einheitswurzeln (Satz von Kronecker):

$$B_{2n} = \frac{\sum (\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \ldots \pm \varepsilon_{2n})^{2n}}{2^{4n}(2^{2n} - 1)}, \tag{V}$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ die $2n$ Einheitswurzeln sind und die Summation über alle möglichen Kombinationen der Vorzeichen der ε, 2^{2n} an Zahl, zu erstrecken ist.

Zusammenhang mit der Teilbarkeit der Zahlen (Satz von v. Staudt und Clausen):

Die Bernoullische Zahl B_{2n}, vermehrt um sämtliche Stammbrüche, deren Nenner gleichzeitig die um 1 vermehrten Teiler von $2n$ einschliesslich $2n$ und 1 und Primzahlen sind, ergibt eine positive oder negative ganze Zahl. (VI)

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des différents symboles appliqués aux nombres de Bernoulli dans la littérature mathématique et à la recherche de la notation qui parait la plus appropriée.

Riassunto

Questo lavoro è dedicato allo studio dei diversi simboli che nella letteratura matematica rappresentano i numeri di Bernoulli e alla ricerca di una denominazione più adatta.

Summary

The author discusses the different notations used for the numbers of Bernoulli in the mathematical literature and elaborates those symboles which seem most appropriate.