Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 59 (1959)

Artikel: Remarques sur le calcul des primes pour rentes de survie

Autor: Chuard, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966813

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Remarques sur le calcul des primes pour rentes de survie

Par Philippe Chuard, Pully (VD)

Résumé

Les caractéristiques de la rente de survie rendent nécessaire, pour les besoins de la pratique, l'emploi de conventions simplifiant le calcul des primes. Ces conventions sont au nombre de trois dans le tarif d'assurances de groupes en vigueur en Suisse depuis 1953, ainsi que dans les tarifs d'assurances individuelles qui l'ont pris pour base. Dans son étude, l'auteur cherche à déterminer les limites d'application de ces règles approximatives en examinant les erreurs résultant de leur emploi.

1. Généralités

Pour calculer certains tarifs d'assurances sur la vie et les disposer de manière que leur utilisation soit simple, il arrive que la formule de la prime ne suffise pas. En effet on peut avoir parfois besoin d'hypothèses simplificatrices pour tenir compte de conditions complexes dues, spécialement dans les assurances sur plusieurs têtes, au choix des bases techniques ou aux âges des divers assurés. La *rente de survie* en est un exemple typique.

Sous forme d'*assurances individuelles*, les rentes de survie ne se sont développées en Suisse qu'à une date relativement récente. Il n'est donc pas étonnant qu'on ait adopté pour elles, en général, les *conventions simplificatrices* actuellement utilisées pour les *assurances de groupes*, dont les rentes de survie sont, depuis longtemps déjà, un élément important.

Or les rentes de survie des assurances de groupes offrent, par rapport à celles des assurances individuelles, les particularités d'un plus grand schématisme dans le choix de leurs caractéristiques, d'une masse plus importante de ce genre de combinaison et d'une proportion plus élevée de rentes complémentaires par rapport aux rentes indépendantes.

Les différences de primes dues à l'emploi de règles approximatives peuvent ainsi se compenser plus facilement, aussi bien pour le preneur que pour l'assureur. On peut donc se demander s'il est justifié de reprendre, pour les rentes de survie individuelles, les conventions simplificatrices adoptées en assurance de groupes. L'étude qui va suivre cherche à répondre à cette question en examinant les erreurs causées aux primes des rentes de survie par l'emploi de ces conventions.

Pour commencer, précisons quelques notions fondamentales. Dans une rente de survie, le décès de l'*assuré* déclenche le paiement de prestations au *bénéficiaire* qui lui survit. Définissant une assurance *en cas de vie* par le fait qu'on augmente la valeur de sa prime si l'on diminue les probabilités annuelles de décès, et une assurance *en cas de décès*, par la propriété inverse, on constate que la rente de survie *indépendante* est une assurance en cas de vie, par rapport au bénéficiaire, et une assurance en cas de décès, par rapport à l'assuré. Nous dirons que la rente de survie est *complémentaire*, si elle présente le caractère d'une assurance en cas de vie également par rapport à l'assuré, du fait qu'elle est combinée à une rente différée sur la tête de l'assuré.

Les conventions simplificatrices dont nous allons examiner les effets sont les trois suivantes:

1° la prime d'une rente de survie, pour une différence quelconque entre l'âge de l'assuré et celui du bénéficiaire, s'obtient en multipliant, par un facteur dépendant uniquement de ces deux âges, la prime calculée pour une différence fixe entre l'âge de l'assuré et un âge fictif du bénéficiaire;

2° la prime de la rente de survie indépendante est égale à la prime de la rente de survie complémentaire correspondante, multipliée par un facteur constant;

3° dans la combinaison d'une rente de survie et d'une rente différée, l'assuré étant le même, la limite de la rente de survie complémentaire est égale au produit de la prestation annuelle de la rente différée par un facteur constant.

2. Méthode; bases techniques

Les fonctions qui interviennent lorsqu'on examine les erreurs dues aux conventions simplificatrices adoptées pour les rentes de survie sont de nature complexe et leur étude se fait avantageusement par la méthode de la variation des paramètres. Il est alors important de bien choisir les bases techniques au moyen desquelles on calcule les valeurs numériques qui sont nécessaires.

Nous admettons que l'assuré est un homme (x) et que le bénéficiaire est une femme (y). Selon que la rente de survie est indépendante ou complémentaire, les taux de mortalité, pour (x), doivent être pris dans une table d'assurés ou de rentiers. Pour (y), dans tous les cas, les taux de mortalité proviennent d'une table de rentiers. Comme nous examinons avant tout le cas des assurances individuelles, nous avons choisi SM 1939/44 [1]) comme table d'assurés et MR 1950/FR 1946 [2]) comme table de rentiers. Le taux technique d'intérêt est de 2,5 %.

Le calcul de la prime d'une rente de survie *complémentaire* ne présente pas de difficulté. En effet, on dispose des nombres de commutation pour deux têtes (x) et (y) d'âges égaux. En outre, l'âge central du groupe (x) (y) se détermine facilement car les deux tables MR 1950 et FR 1946 sont ajustées selon la méthode de Makeham avec la même valeur pour la constante c.

Pour les rentes de survie *indépendantes*, il faut avoir les nombres de commutation sur deux têtes calculés avec la mortalité SM 1939/44 pour (x) et FR 1946 pour (y) *(tableau I)*, ainsi que les valeurs du complément d'âge ε *(tableau II)* permettant d'obtenir l'âge central d'un groupe (x) (y). Ce complément a été calculé, pour des âges x et y multiples de 10, au moyen de la rente $\ddot{a}_{xy}$ (sans sélection). Les valeurs intermédiaires ont été obtenues par sous-tabulation au moyen d'une parabole de degré $n-1$ passant par les n points donnés; cette opération se fait simplement, avec une machine à additionner à $n-1$ compteurs [3]).

Les tarifs actuels de rentes de survie individuelles étant fréquemment calculés avec les tables de mortalité des assurances de groupes, nous avons fait quelques exemples comparatifs avec TG 1953 comme table d'assurés et RMG/RFG 1953 [4]) comme table de rentiers. Pour cela nous n'avons considéré que le cas où les âges x et y sont égaux et nous avons établi les nombres de commutation sur deux têtes correspondant à ce cas.

---

[1]) [2]) [3]) [4]) voir [1] [2] [3] [4] dans la liste des références, page 117.

3. Facteur pour différence d'âges

Désignons, pour les rentes de survie, la prime par $\Phi_{x|y}$, sans préciser le genre de rente ni le mode de paiement des primes, et fixons les bases techniques: mortalité, taux d'intérêt et chargements. Le facteur F pour différence d'âges est défini par

$$F = \frac{\Phi_{x|y}}{\Phi_{x|y_0}}, \qquad \text{où } y_0 = x - \Delta_0, \tag{1}$$

Δ_0 étant une différence d'âges fixe pour laquelle la prime Φ se calcule aisément.

Les variables dont dépend le facteur F sont les mêmes que celles dont est fonction la prime Φ, c'est-à-dire:

a) l'âge x de l'assuré,

b) l'âge y du bénéficiaire (ou la différence d'âges $\Delta = x - y$),

c) le genre de rente,

d) le mode de paiement des primes,

e) la durée n qui caractérise le genre de rente et le mode de paiement des primes.

Avec les tables de 1953 pour assurances de groupes, les primes des rentes de survie *complémentaires* se calculent avec un facteur F ne dépendant que de x et Δ. Cela revient à employer d'une manière générale les valeurs de F établies pour les rentes de survie immédiates à prime unique. Cette règle a été reprise pour les assurances individuelles de rentes de survie auxquelles sont appliquées les mêmes tables de mortalité qu'aux assurances de groupes.

Utilisée pour les rentes de survie immédiates, cette règle reste-t-elle valable pour d'autres genres de rentes de survie? quelle erreur commet-on en négligeant l'influence du mode de paiement des primes? voilà les questions que nous allons examiner. Pour cela, nous calculons différentes valeurs du facteur F, défini par (1), en posant, ce qui ne restreint pas la généralité des développements,

$$\Delta_0 = 0, \qquad \text{d'où } y_0 = x.$$

En outre, nous n'envisageons que le cas dans lequel les primes Φ sont pures, l'influence des chargements sur le facteur F étant négligeable, et nous laissons de côté le remariage des veuves.

Les résultats numériques obtenus en faisant varier la différence d'âges $\varDelta$ de -30 à $+40$ pour des âges x et y dont la moyenne est 40 ans *(tableau III)* montrent d'emblée que les valeurs du facteur F pour la prime unique de la rente de survie immédiate, calculées avec les tables de mortalité pour rentes individuelles, sont très voisines du rapport

$$\frac{f(x,\varDelta)}{f(x,0)}$$

des facteurs valables pour le tarif d'assurances de groupes de 1953. Il en résulte que les conclusions d'une étude du facteur F basée sur la mortalité MR 1950/FR 1946 peuvent être étendues au cas des rentes de survie calculées avec RMG/RFG 1953.

Généraliser l'emploi des valeurs du facteur pour différence d'âges, obtenues pour la rente de survie immédiate à prime unique, c'est remplacer, dans les autres cas, un facteur exact F par un facteur approximatif F^*. L'erreur relative qui en résulte, par rapport à la prime exacte, est donnée par la formule

$$e_F = \frac{F^* - F}{F}. \tag{2}$$

Si la différence d'âges $\varDelta = x - y$ est nulle, l'erreur e_F l'est également car les facteurs F^* et F sont alors tous deux égaux à 1.

Pour étudier la variation de l'erreur e_F, nous considérons les quatre combinaisons suivantes, caractérisées par la formule de leur prime unique pure:

rente de survie immédiate $\quad a_{x|y} = a_y - a_{xy}$,

rente de survie temporaire $\quad a_{x|y:\overline{n|}} = a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}$,

rente de survie différée $\quad {}_{n|}a_{x|y} = {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{xy}$,

rente de survie assurée temporairement $\quad a_{x|y(n)} = a_{x|y} - {}_nE_{xy}\, a_{x+n|y+n}$.

Outre le paiement unique, nous envisageons le paiement annuel des primes, défini par

$${}_nP(a) = \frac{a}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}.$$

Nous admettons que le cadre fixé par les applications pratiques courantes est limité par les valeurs

25 et 60 pour l'âge x,
10 et 30 pour la durée n,
50 et 70 pour l'âge terme $x+n$.

Enfin nous faisons varier la différence d'âges Δ de -30 à $+40$, l'âge moyen $\frac{x+y}{2}$ étant égal à 40.

Le *tableau IV* montre la variation de l'erreur e_F, définie par (2). Il permet d'observer que, pour la rente de survie immédiate à primes annuelles, la valeur absolue de l'erreur e_F est en général inférieure à la limite de 5% qu'on peut considérer comme admissible; des dépassements peuvent être constatés si la différence d'âges est négative et grande en valeur absolue, et si la durée du paiement des primes est longue; pour les autres genres de rentes de survie, l'erreur e_F atteint des valeurs inadmissibles.

Ainsi donc, l'erreur que l'on commet dans les rentes de survie immédiates, en appliquant aux primes annuelles les facteurs F établis pour les primes uniques est, dans la plupart des cas, admissible. Mais il n'est pas possible d'étendre l'emploi de ces facteurs à d'autres genres de rentes de survie.

4. Facteur pour rente indépendante

La prime unique ou annuelle d'une rente de survie de genre quelconque étant désignée, comme précédemment, par Φ, l'expression

$$G = \frac{\Phi(A)}{\Phi(R)} \tag{3}$$

définit le facteur G pour rente indépendante. Les symboles $\Phi(A)$ et $\Phi(R)$ indiquent que l'on emploie pour (x) une table de mortalité d'*A*ssurés ou de *R*entiers, selon que la rente de survie est indépendante ou complémentaire.

Les bases techniques (mortalité, taux de l'intérêt, chargements) étant fixées, le facteur G dépend des mêmes variables que F, défini par (1).

Dans le tarif de groupes de 1953, et dans les assurances individuelles qui l'ont pris pour base, le facteur pour rente indépendante est considéré comme constant. Cela revient à remplacer le facteur exact G par une valeur approximative G^* et conduit à l'erreur relative

$$e_G = \frac{G^* - G}{G}. \tag{4}$$

Calculons, au moyen de (3), une série de valeurs numériques du facteur G, comme nous l'avons fait dans le cas du facteur F, c'est-à-dire en faisant abstraction des chargements et du remariage des veuves, en envisageant quatre genres de rentes de survie, à prime unique ou à primes annuelles, et en gardant les mêmes limites pour x, n et $x+n$; considérons en outre que $y = x$. On peut alors déterminer, pour chaque genre de rente de survie, un facteur moyen approximatif G^* tel que la plus petite erreur négative et la plus grande erreur positive aient des valeurs absolues voisines. On a ainsi

$G^* = 1{,}5$ pour la rente de survie immédiate,

$G^* = 1{,}7$ pour les rentes de survie temporaire et assurée temporairement,

$G^* = 1{,}4$ pour la rente de survie différée.

Il est alors possible de calculer, avec la formule (4), l'erreur e_G dont le *tableau V*, qui contient les valeurs obtenues, indique la variation. Si l'on convient que la limite de l'erreur admissible est de + ou — 5 %, on constate que l'erreur e_G peut dépasser le double de cette limite, pour la rente de survie assurée temporairement, et le triple, pour la rente de survie temporaire. On obtient des erreurs plus importantes encore si, au lieu d'utiliser le facteur approximatif adapté au genre de rente, on généralise l'emploi de celui qui a été déterminé pour la rente de survie immédiate. En effet, lorsque l'on remplace le facteur approximatif G_1^*, conduisant à l'erreur e_{G_1}, par G_2^*, l'erreur est donnée par

$$e_{G_2} = \frac{G_2^*}{G_1^*}(1+e_{G_1}) - 1 .$$

Si la différence d'âges Δ n'est pas nulle mais varie, comme dans l'étude du facteur F, de —30 à +40, l'âge moyen $\frac{x+y}{2}$ étant égal à 40, l'erreur e_G, pour la rente de survie immédiate, dépasse la limite admise, lorsque la valeur absolue de Δ est grande, comme le montre le *tableau VI*; pour la rente de survie assurée temporairement, l'erreur e_G reste dans le cadre des valeurs obtenues pour $\Delta = 0$.

On constate donc qu'il est possible, pour la rente de survie immédiate et en particulier si la différence d'âges n'a pas une valeur absolue élevée, d'adopter une constante comme valeur approximative de G sans qu'il en résulte des erreurs importantes. Pour d'autres genres de rentes de survie, ce procédé ne peut, en général, pas être appliqué, et à plus forte raison si l'on garde la même valeur approximative de G que pour la rente de survie immédiate.

Si, pour le cas $\Delta = 0$, l'on fait une étude analogue avec les tables de 1953 pour assurances de groupes, on constate, chose curieuse, qu'avec le facteur prescrit de 1,25 les erreurs e_G sont toutes négatives *(tableau VII)*. En prenant un facteur approximatif plus élevé, par exemple 1,4, on obtiendrait une compensation entre erreurs positives et erreurs négatives et on réduirait la moyenne de leurs valeurs absolues.

Remarquons enfin que si l'on connaît, pour une prime déterminée d'une rente de survie, les deux erreurs e_F et e_G dues à l'emploi de facteurs approximatifs F^* et G^*, l'erreur totale est donnée par

$$e_{F,G} = (1 + e_F)\,(1 + e_G) - 1\,.$$

5. Facteur pour limite de rente complémentaire

La combinaison, à prime unique ou à primes annuelles, d'une rente de survie dont la prestation annuelle est h, et d'une rente différée, dont la prestation annuelle est 1, peut être représentée par

$$h\,\Phi + \Psi$$

en désignant par Φ, comme précédemment, la prime d'une rente de survie et par Ψ, la prime de la rente différée.

Si h est suffisamment petit, la combinaison est en cas de vie par rapport à l'assuré commun (x) de Φ et Ψ et la rente de survie est dite complémentaire. Lorsque ces conditions sont remplies, la limite supérieure de h est donnée par le facteur H défini par

$$H = \frac{\Psi(R) - \Psi(A)}{\Phi(A) - \Phi(R)}\,, \tag{5}$$

(R) ou (A) indiquant l'emploi d'une table de *R*entiers ou d'*A*ssurés pour (x).

L'intérêt pratique des facteurs G et H, définis par (3) et (5), tient à ce qu'ils permettent d'éviter l'emploi d'une table d'assurés pour Φ et Ψ. En effet, si $h > H$, la prime $h\,\Phi(A) + \Psi(A)$

peut être remplacée par

$$[(h - H)\,G + H]\,\Phi(R) + \Psi(R)\,.$$

L'erreur relative e_H occasionnée à la prime en remplaçant la valeur exacte H par la valeur approximative H^* du facteur pour limite de rente complémentaire est une fonction de la proportion h entre la prestation annuelle de la rente de survie et celle de la rente différée. Elle dépend en outre des montants relatifs de H et H^*.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Si } H^* < H, & \\
e_H = 0 & \text{lorsque } h \leqq H^*, \\
e_H = \dfrac{(h - H^*)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{h\,\Phi(R) + \Psi(R)} & \text{lorsque } H^* \leqq h \leqq H, \\
e_H = \dfrac{(H - H^*)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{h\,\Phi(A) + \Psi(A)} & \text{lorsque } H \leqq h; \\
\text{si } H^* > H, & \\
e_H = 0 & \text{lorsque } h \leqq H, \\
e_H = -\dfrac{(h - H)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{h\,\Phi(A) + \Psi(A)} & \text{lorsque } H \leqq h \leqq H^*, \\
e_H = -\dfrac{(H^* - H)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{h\,\Phi(A) + \Psi(A)} & \text{lorsque } H^* \leqq h.
\end{array}\right\} \quad (6)$$

La variation de l'erreur e_H en fonction de la proportion h comprend donc trois parties dont les deux dernières sont des branches d'hyperboles équilatères.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Si } H^* < H, \text{ pour la valeur particulière } h_0 = H, \\
\qquad \text{l'erreur } e_H \text{ atteint un maximum} \\
\qquad\qquad e_H(h_0) = \dfrac{(H - H^*)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{H\,\Phi(R) + \Psi(R)}; \\
\text{si } H^* > H, \text{ pour la valeur particulière } h_0 = H^*, \\
\qquad \text{l'erreur } e_H \text{ atteint un minimum} \\
\qquad\qquad e_H(h_0) = -\dfrac{(H^* - H)\,[\Phi(A) - \Phi(R)]}{H^*\,\Phi(A) + \Psi(A)}.
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Si l'on calcule, comme cela a été fait précédemment pour F et G, une série de valeurs numériques du facteur H pour limite de rente complémentaire, on peut déterminer, pour chaque genre de rente de survie, une valeur approximative H^* telle que le plus petit montant négatif et le plus grand montant positif de l'erreur extrême $e_H(h_0)$ aient des valeurs absolues voisines.

Etant entendu que les deux primes, Φ pour la rente de survie et Ψ pour la rente différée, ont le même mode de paiement, unique ou annuel, et dépendent de la même durée n, on obtient, par exemple, pour la différence d'âges $\Delta = 0$,

$H^* = 0{,}85$ pour la rente de survie immédiate,
$H^* = 1$ pour la rente de survie assurée temporairement.

Le *tableau VIII* montre que, pour la rente de survie immédiate, la valeur absolue de l'erreur extrême $e_H(h_0)$ reste en général inférieure à la limite de 5%, considérée comme admissible. Pour la rente de survie assurée temporairement, l'erreur dépasse, dans certains cas, le double de la limite; il est en outre évident que des erreurs plus fortes seraient obtenues en employant un facteur approximatif non adapté au genre de rente de survie. Si l'on fait varier la différence d'âges Δ de -30 à $+40$, l'erreur extrême $e_H(h_0)$, pour la rente de survie immédiate *(tableau IX)* peut dépasser le double de la limite admissible de 5%, lorsque la différence d'âges Δ est négative et grande en valeur absolue.

L'emploi d'une constante comme valeur approximative du facteur H pour limite de rente complémentaire conduit donc, pour la rente de survie immédiate, sauf si la différence d'âges Δ est négative et grande en valeur absolue, à des erreurs $e_H(h_0)$ que l'on peut considérer comme admissibles. Il n'est cependant pas possible d'étendre l'emploi de cette valeur approximative à d'autres genres de rentes de survie.

Une étude analogue, faite avec les tables de 1953 pour assurances de groupes montre *(tableau X)* que le facteur prescrit de 0,75 conduit, pour la rente de survie immédiate et $\Delta = 0$, à des erreurs $e_H(h_0)$ que l'on peut considérer, selon les critères précédents, comme admissibles.

L'emploi des valeurs approximatives

G^* du facteur G pour rente indépendante et
H^* du facteur H pour limite de rente complémentaire

conduit à l'erreur $e_{G,H}$.

Si $H^* < H$,

$$e_{G,H} = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad h \leqq H^*,$$

$$e_{G,H} = \frac{G^*-1}{G-1} e_H \qquad \text{lorsque} \quad H^* \leqq h \leqq H,$$

$$e_{G,H} = \frac{G^*-1}{G-1} e_H + \frac{(h-H)\,(G^*-G)\,\Phi(R)}{h\,\Phi(A)+\Psi(A)} \qquad \text{lorsque} \quad H \leqq h;$$

si $H^* > H$,

$$e_{G,H} = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad h \leqq H,$$

$$e_{G,H} = e_H \qquad \text{lorsque} \quad H \leqq h \leqq H^*,$$

$$e_{G,H} = \frac{G^*-1}{G-1} e_H + \frac{(h-H)\,(G^*-G)\,\Phi(R)}{h\,\Phi(A)+\Psi(A)} \qquad \text{lorsque} \quad H^* \leqq h;$$

l'erreur e_H est donnée par les relations (6).

La variation de $e_{G,H}$ en fonction de h comprend trois parties dont les deux dernières sont des branches d'hyperboles équilatères. Si h tend vers l'infini, l'erreur $e_{G,H}$ tend vers l'erreur e_G, donnée par la formule (4), et non vers 0, comme c'est le cas pour e_H.

A l'erreur extrême $e_H(h_0)$, définie par (7), correspond,

$$\text{si } H^* < H, \quad \text{pour } h_0 = H, \quad e_{G,H}(h_0) = \frac{G^*-1}{G-1} e_H(h_0),$$

$$\text{si } H^* > H, \quad \text{pour } h_0 = H^*, \quad e_{G,H}(h_0) = e_H(h_0).$$

On constate que les erreurs $e_H(h_0)$ et $e_{G,H}(h_0)$ ne diffèrent que par leurs valeurs positives, et en outre, pour les exemples choisis, dans une faible mesure; une étude particulière de $e_{G,H}(h_0)$ n'est donc pas nécessaire.

6. Conclusion

Les développements qui précèdent, et les valeurs numériques qui les illustrent, montrent les conséquences des conventions simplificatrices adoptées pour les facteurs F, G et H, sur l'exactitude des primes pour rentes de survie immédiates. On a pu voir que l'erreur qui en résulte peut quelquefois dépasser une limite de 5% que nous avons considérée comme admissible, soit à cause d'une différence d'âges Δ élevée en valeur absolue, soit à cause du choix de la constante comme montant approximatif du facteur. Il ressort en outre clairement que l'emploi des valeurs approximatives F^*, G^* et H^*, adaptées à la rente de survie immédiate, ne peut pas être étendu à d'autres genres de rentes de survie; l'exemple suivant en donne l'illustration.

Admettons qu'un homme de 30 ans désire assurer une rente de survie en faveur de sa mère, qui est à sa charge et qui a 25 ans de plus que lui. Déterminons des primes uniques pures d'une part en utilisant les tables et les conventions valables pour le tarif d'assurances de groupes de 1953 et d'autre part en faisant un calcul exact avec les tables de mortalité SM 1939/44, MR 1950 et FR 1946. Pour la rente de survie immédiate et complémentaire, les deux séries de tables de mortalité conduisent, par hasard, exactement à la même prime. Si la rente de survie est assurée temporairement pendant 10 ans et indépendante, la prime approximative est inférieure au quart de la prime exacte.

Si donc, pour les rentes de survie, on sort du cadre des rentes immédiates, on doit calculer les primes exactement, en renonçant aux conventions simplificatrices. Les *tableaux I et II* peuvent alors rendre service. Quant aux chargements, il est possible de reprendre, par exemple, ceux qui sont adoptés pour les rentes individuelles calculées avec MR 1950 et FR 1946.

Tableau I

Nombres de commutation SM 1939/44 — FR 1946 2,5 %

x,y	$D_{x[y]}$	D_{xy}	N_{xy}	x,y	$D_{x[y]}$	D_{xy}	N_{xy}
20		53 185,4	1 390 232,3	60	13 363,5	13 421,8	144 270,1
21		51 628,4	1 337 046,9	61	12 615,7	12 676,6	130 848,3
22		50 104,0	1 285 418,5	62	11 873,0	11 936,2	118 171,7
23		48 618,5	1 235 314,5	63	11 136,3	11 201,8	106 235,5
24		47 177,3	1 186 696,0	64	10 407,2	10 474,8	95 033,7
25		45 784,5	1 139 518,7	65	9 685,77	9 755,34	84 558,86
26		44 439,3	1 093 734,2	66	8 972,46	9 043,82	74 803,52
27		43 140,4	1 049 294,9	67	8 269,00	8 341,72	65 759,70
28		41 886,6	1 006 154,5	68	7 578,12	7 651,86	57 417,98
29		40 676,7	964 267,9	69	6 902,05	6 976,48	49 766,12
30	39 478,5	39 506,5	923 591,2	70	6 243,08	6 317,75	42 789,64
31	38 346,9	38 372,9	884 084,7	71	5 603,37	5 677,61	36 471,89
32	37 248,9	37 273,3	845 711,8	72	4 986,53	5 059,85	30 794,28
33	36 181,4	36 204,8	808 438,5	73	4 396,79	4 468,46	25 734,43
34	35 142,5	35 165,2	772 233,7	74	3 837,36	3 906,77	21 265,97
35	34 130,7	34 152,9	737 068,5	75	3 311,01	3 377,56	17 359,20
36	33 142,8	33 165,0	702 915,6	76	2 820,40	2 883,39	13 981,64
37	32 178,6	32 200,6	669 750,6	77	2 368,27	2 427,00	11 098,25
38	31 235,7	31 258,5	637 550,0	78	1 957,49	2 011,42	8 671,25
39	30 313,1	30 336,1	606 291,5	79	1 590,08	1 638,83	6 659,83
40	29 408,8	29 432,5	575 955,4	80	1 267,36	1 310,60	5 021,00
41	28 519,9	28 544,4	546 522,9	81	989,499	1 027,06	3 710,40
42	27 644,8	27 670,2	517 978,5	82	755,477	787,420	2 683,344
43	26 781,6	26 808,3	490 308,3	83	563,070	589,585	1 895,924
44	25 929,5	25 957,2	463 500,0	84	408,826	430,294	1 306,339
45	25 087,4	25 116,2	437 542,8	85	288,649	305,959	876,045
46	24 255,0	24 285,3	412 426,6	86		210,600	570,086
47	23 433,0	23 464,6	388 141,3	87		140,550	359,486
48	22 620,7	22 653,9	364 676,7	88		90,552 9	218,935 8
49	21 818,4	21 852,9	342 022,8	89		56,153 0	128,382 9
50	21 023,8	21 060,4	320 169,9	90		33,382 4	72,229 9
51	20 236,6	20 274,7	299 109,5	91		18,964 9	38,847 5
52	19 455,4	19 495,7	278 834,8	92		10,243 7	19,882 6
53	18 680,3	18 722,5	259 339,1	93		5,234 31	9,638 87
54	17 911,0	17 955,1	240 616,6	94		2,519 48	4,404 56
55	17 145,7	17 192,2	222 661,5	95		1,133 96	1,885 08
56	16 383,8	16 432,4	205 469,3	96		0,473 711	0,751 120
57	15 624,3	15 675,5	189 036,9	97		0,184 044	0,277 409
58	14 867,6	14 921,2	173 361,4	98		0,065 099	0,093 365
59	14 113,9	14 170,1	158 440,2	99		0,020 685	0,028 266
60	13 363,5	13 421,8	144 270,1	100		0,005 645	0,007 581

$N_{x[y]} = D_{x[y]} + N_{x+1:y+1}$

Complément

Détermination de l'âge central pour les valeurs actuarielles sur deux

L'âge central s'obtient en ajoutant le

$x > y$

$x-y$ \ y	20	30	40	50	60	70	80
1	0,82	0,75	0,74	0,72	0,69	0,73	0,68
2	1,65	1,52	1,49	1,45	1,40	1,46	1,37
3	2,49	2,30	2,25	2,20	2,14	2,20	2,06
4	3,34	3,10	3,03	2,97	2,90	2,96	2,76
5	4,20	3,91	3,83	3,76	3,69	3,72	3,47
6	5,07	4,73	4,64	4,56	4,49	4,49	4,18
7	5,94	5,56	5,46	5,38	5,31	5,26	4,90
8	6,82	6,41	6,29	6,21	6,14	6,04	5,63
9	7,71	7,26	7,13	7,05	6,99	6,83	6,36
10	8,60	8,13	7,99	7,91	7,84	7,63	7,10
11	9,50	9,00	8,86	8,78	8,70	8,43	7,85
12	10,40	9,89	9,73	9,65	9,57	9,24	8,60
13	11,31	10,78	10,62	10,54	10,45	10,05	9,36
14	12,22	11,68	11,51	11,43	11,33	10,87	10,13
15	13,14	12,59	12,42	12,34	12,22	11,69	10,91
16	14,06	13,50	13,33	13,25	13,10	12,52	11,69
17	14,98	14,42	14,25	14,16	13,99	13,35	12,47
18	15,91	15,34	15,17	15,08	14,88	14,18	13,27
19	16,84	16,27	16,10	16,01	15,76	15,02	14,07
20	17,77	17,21	17,04	16,94	16,65	15,86	14,88
21	18,70	18,15	17,98	17,87	17,53	16,70	
22	19,64	19,09	18,93	18,81	18,42	17,55	
23	20,58	20,04	19,88	19,74	19,30	18,39	
24	21,52	20,99	20,83	20,68	20,17	19,24	
25	22,46	21,95	21,79	21,62	21,05	20,09	
26	23,41	22,91	22,75	22,56	21,92	20,94	
27	24,35	23,87	23,71	23,49	22,79	21,79	
28	25,30	24,83	24,67	24,42	23,65	22,63	
29	26,25	25,79	25,64	25,35	24,52	23,48	
30	27,20	26,76	26,60	26,28	25,38	24,33	
31	28,15	27,73	27,56	27,20	26,24		
32	29,11	28,70	28,53	28,12	27,10		
33	30,06	29,67	29,49	29,03	27,97		
34	31,02	30,64	30,45	29,94	28,83		
35	31,98	31,62	31,40	30,84	29,70		
36	32,95	32,59	32,36	31,73	30,57		
37	33,91	33,57	33,31	32,61	31,45		
38	34,88	34,55	34,26	33,48	32,33		
39	35,85	35,53	35,20	34,35	33,22		
40	36,83	36,51	36,14	35,20	34,12		

d'âge ε *Tableau II*

têtes, calculées avec les bases SM 1939/44, pour (x), et FR 1946, pour (y) complément ε à l'âge de la personne la plus jeune

$y > x$

$y-x$ \ x	20	30	40	50	60	70	80
1	0,18	0,28	0,27	0,28	0,30	0,31	0,35
2	0,41	0,59	0,57	0,59	0,63	0,66	0,74
3	0,68	0,92	0,90	0,93	0,98	1,02	1,15
4	1,00	1,28	1,26	1,30	1,37	1,42	1,59
5	1,36	1,67	1,64	1,70	1,78	1,84	2,07
6	1,77	2,09	2,06	2,13	2,23	2,29	2,57
7	2,21	2,53	2,50	2,59	2,70	2,77	3,10
8	2,69	2,99	2,97	3,07	3,19	3,27	3,67
9	3,20	3,48	3,47	3,58	3,71	3,80	4,26
10	3,75	4,00	3,99	4,12	4,26	4,36	4,88
11	4,33	4,54	4,54	4,68	4,83	4,94	5,53
12	4,94	5,10	5,11	5,27	5,43	5,56	6,21
13	5,58	5,69	5,71	5,88	6,05	6,20	6,93
14	6,24	6,30	6,33	6,52	6,70	6,86	7,67
15	6,93	6,93	6,97	7,17	7,36	7,55	8,44
16	7,64	7,59	7,64	7,86	8,05	8,27	9,24
17	8,38	8,26	8,33	8,56	8,77	9,02	10,07
18	9,13	8,96	9,04	9,28	9,50	9,79	10,93
19	9,90	9,67	9,77	10,03	10,25	10,59	11,82
20	10,68	10,41	10,52	10,79	11,03	11,42	12,74
21	11,48	11,17	11,29	11,57	11,83	12,27	
22	12,29	11,94	12,08	12,38	12,64	13,15	
23	13,11	12,74	12,89	13,20	13,47	14,06	
24	13,93	13,55	13,72	14,04	14,33	15,00	
25	14,77	14,38	14,57	14,89	15,20	15,96	
26	15,61	15,23	15,43	15,76	16,08	16,94	
27	16,45	16,09	16,31	16,65	16,99	17,96	
28	17,29	16,97	17,20	17,55	17,91	19,00	
29	18,13	17,87	18,11	18,47	18,85	20,07	
30	18,97	18,78	19,04	19,40	19,80	21,16	

Tableau III

Valeur du facteur F
pour différence d'âges, employée comme valeur approximative.

Assurances individuelles $F(a_{[x]\,|\,[y]})$ MR 1950/FR 1946 2,5%

Assurances de groupes $\dfrac{f(x,\Delta)}{f(x,0)}$ RMG/RFG 1953 2,5%

x	y	Δ	Assurances individuelles	Assurances de groupes
25	55	−30	0,193	0,210
30	50	−20	0,326	0,341
35	45	−10	0,575	0,579
40	40	0	1,000	1,000
45	35	10	1,599	1,585
50	30	20	2,304	2,294
55	25	30	3,051	3,113
60	20	40	3,855	4,060

Tableau IV

Erreur relative e_F due à l'emploi de $F(a_{[x]\,|\,[y]})$
comme valeur approximative du facteur F pour différence d'âges.

Assurances individuelles MR 1950/FR 1946 2,5%

				Rente de survie						
				imméd.	temporaire		différée		assur. tempor.	
n	x	y	à pr. / Δ	annuelle	unique	annuelle	unique	annuelle	unique	annuelle
10	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0
	45	35	10	0,006	0,593	0,599	−0,021	−0,015	0,335	0,341
	50	30	20	0,013	1,320	1,346	−0,043	−0,030	0,611	0,633
	55	25	30	0,024	2,178	2,256	−0,075	−0,053	0,797	0,840
	60	20	40	0,041	2,922	3,084	−0,123	−0,087	0,824	0,900
20	30	50	−20	−0,038	−0,658	−0,671	0,320	0,268	−0,483	−0,504
	35	45	−10	−0,019	−0,409	−0,419	0,121	0,099	−0,274	−0,288
	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0
	45	35	10	0,018	0,545	0,572	−0,093	−0,073	0,254	0,276
	50	30	20	0,040	1,145	1,230	−0,192	−0,159	0,404	0,460
30	25	55	−30	−0,142	−0,719	−0,760	3,021	2,446	−0,488	−0,560
	30	50	−20	−0,084	−0,606	−0,640	1,131	0,952	−0,385	−0,437
	35	45	−10	−0,040	−0,370	−0,395	0,379	0,322	−0,206	−0,236
	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau V

Erreur relative e_G due à l'emploi
de la valeur approximative G^* du facteur G pour rente indépendante.

Assurances individuelles (x) A SM 1939/44 2,5% R MR 1950 2,5%
(y) FR 1946 2,5%

		Rente de survie immédiate		temporaire		différée		assurée tempor.	
G^*		1,5		1,7		1,4		1,7	
n	x,y \ à pr.	unique	annuelle	unique	annuelle	unique	annuelle	unique	annuelle
10	40	0,016	0,006	0,004	-0,007	-0,046	-0,055	0,011	0,001
	45	0,009	-0,007	-0,084	-0,101	-0,045	-0,060	-0,059	-0,074
	50	0,012	-0,014	-0,113	-0,136	-0,033	-0,057	-0,083	-0,106
	55	0,020	-0,020	-0,119	-0,154	-0,012	-0,051	-0,078	-0,114
	60	0,034	-0,027	-0,094	-0,147	0,021	-0,038	-0,043	-0,099
20	30	0,032	0,020	0,124	0,115	-0,032	-0,043	0,108	0,096
	35	0,026	0,010	0,076	0,059	-0,030	-0,045	0,052	0,035
	40	0,016	-0,011	0,000	-0,027	-0,022	-0,047	-0,004	-0,030
	45	0,009	-0,032	-0,043	-0,082	-0,001	-0,043	-0,024	-0,064
	50	0,012	-0,050	-0,041	-0,100	0,035	-0,028	-0,004	-0,065
30	25	0,045	0,028	0,156	0,139	-0,018	-0,034	0,118	0,102
	30	0,032	0,009	0,086	0,063	-0,011	-0,032	0,061	0,038
	35	0,026	-0,007	0,046	0,014	0,010	-0,023	0,039	0,005
	40	0,016	-0,035	0,014	-0,036	0,045	-0,006	0,033	-0,017

Tableau VI

Assurances individuelles

				Rente de survie immédiate		assurée tempor.	
G^*				1,5		1,7	
n	x	y	Δ \ à pr.	unique	annuelle	unique	annuelle
10	40	40	0	0,016	0,006	0,011	0,001
	45	35	10	0,092	0,075	-0,060	-0,074
	50	30	20	0,167	0,139	-0,083	-0,105
	55	25	30	0,223	0,177	-0,104	-0,137
	60	20	40	0,271	0,197	-0,071	-0,125
20	30	50	− 20	-0,043	-0,055	0,112	0,096
	35	45	− 10	-0,039	-0,055	0,046	0,028
	40	40	0	0,016	-0,011	-0,004	-0,030
	45	35	10	0,092	0,047	-0,022	-0,062
	50	30	20	0,167	0,096	0,004	-0,058
30	25	55	− 30	-0,075	-0,093	0,053	0,032
	30	50	− 20	-0,043	-0,065	0,082	0,056
	35	45	− 10	-0,039	-0,070	0,040	0,005
	40	40	0	0,016	-0,035	0,033	-0,017

Tableau VII Assurances de groupes
(x) A TG 1953 2,5%
R RMG 1953 2,5%
(y) RFG 1953 2,5%

		Rente de survie immédiate	
G^*		1,25	
n	x,y \ à pr.	unique	annuelle
10	40	-0,107	-0,115
	45	-0,100	-0,113
	50	-0,089	-0,110
	55	-0,069	-0,099
	60	-0,038	-0,080
20	30	-0,128	-0,140
	35	-0,114	-0,127
	40	-0,107	-0,130
	45	-0,100	-0,134
	50	-0,089	-0,134
30	25	-0,152	-0,173
	30	-0,128	-0,148
	35	-0,114	-0,141
	40	-0,107	-0,146

Erreur relative $e_H(h_0)$, indiquée pour le maximum de sa valeur absolue, due à l'emploi de la valeur approximative H^* du facteur H pour limite de rente complémentaire.

Assurances individuelles (x) A SM 1939/44 2,5%
R MR 1950 2,5%
(y) FR 1946 2,5%

Tableau VIII

		Rente viagère différée et rente de survie immédiate		assurée tempor.	
H^*		0,85		1	
n	à pr. x,y	unique	annuelle	unique	annuelle
10	40	0,045	0,037	0,104	0,098
	45	0,051	0,038	0,112	0,101
	50	0,057	0,036	0,112	0,094
	55	0,062	0,027	0,102	0,070
	60	0,062	0,006	0,079	0,022
20	30	0,041	0,031	0,089	0,082
	35	0,045	0,031	0,092	0,081
	40	0,046	0,021	0,083	0,061
	45	0,040	-0,004	0,055	0,011
	50	0,024	-0,048	0,003	-0,071
30	25	0,037	0,021	0,075	0,063
	30	0,035	0,012	0,062	0,042
	35	0,024	-0,013	0,027	-0,011
	40	-0,009	-0,068	-0,042	-0,100

Tableau IX

				Rente viagère différée et rente de survie immédiate	
H^*				0,85	
n	x	y	à pr. Δ	unique	annuelle
10	40	40	0	0,045	0,037
	45	35	10	0,029	0,014
	50	30	20	0,017	-0,007
	55	25	30	0,005	-0,034
	60	20	40	-0,005	-0,064
20	30	50	-20	0,095	0,086
	35	45	-10	0,079	0,065
	40	40	0	0,046	0,021
	45	35	10	0,005	-0,038
	50	30	20	-0,030	-0,091
30	25	55	-30	0,126	0,112
	30	50	-20	0,121	0,102
	35	45	-10	0,080	0,046
	40	40	0	-0,009	-0,068

Tableau X

Assurances de groupes

(x) A TG 1953 2,5%
R RMG 1953 2,5%
(y) RFG 1953 2,5%

		Rente viagère différée et rente de survie immédiate	
H^*		0,75	
n	à pr. x,y	unique	annuelle
10	40	0,042	0,036
	45	0,047	0,036
	50	0,051	0,034
	55	0,053	0,026
	60	0,052	0,012
20	30	0,039	0,027
	35	0,042	0,029
	40	0,044	0,021
	45	0,039	0,002
	50	0,022	-0,037
30	25	0,029	0,008
	30	0,031	0,008
	35	0,021	-0,015
	40	-0,007	-0,057

Liste des références

[1] Tables de mortalité de la population suisse 1931/41 et 1939/44, Nombres de commutation et primes pures, Bureau fédéral de statistique, Berne, 1948.

[2] Technischer Aufbau der gemeinsamen Rententarife, 10. Mai 1950.

[3] Dr. *Lothar Schrutka:* Leitfaden der Interpolation, Wien, Springer-Verlag, 1945; Nrn. 77 und 61.

[4] Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen 1953.

Zusammenfassung

Die Eigenheiten der Überlebensrente erfordern in der Praxis die Anwendung von Methoden, welche die Prämienberechnung vereinfachen. Der in der Schweiz seit 1953 angewandte Gruppenversicherungstarif sowie Einzelversicherungstarife, die sich auf ihn stützen, verwenden drei solche Methoden. In seiner Abhandlung untersucht der Verfasser die Fehler, welche sich aus der Anwendung der Näherungsmethoden ergeben, und versucht ihren Anwendungsbereich abzugrenzen.

Riassunto

Le proprietà caratteristiche della rendita di sopravvivenza chiedono l'applicazione di certi metodi approssimativi facilitando il calcolo pratico dei premi. Alle tariffe collettive introdotte in Isvizzera nell'anno 1953, come pure alle tariffe dell'assicurazione individuale basate sulle stesse tariffe, si applicano tre metodi differenti. L'autore, nel suo articolo, valutando le divergenze risultanti dall'applicazione dei metodi approssimativi, cerca di fissare i limiti entro i quali possono essere adoperati.

Summary

In practice, the peculiarities of the survivorship annuity make it necessary to use simplified methods in calculating the premiums. Three such methods have been used for the Swiss group insurance tariff in force since 1953 as well as for the individual annuity tariffs which have been based on the former one. In the present paper the author has analysed the errors due to the application of these approximate methods and has endeavoured to determine the limits of their applicability.