

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 59 (1959)

**Artikel:** Die beste erwartungstreue lineare Schätzfunktion der Übersterblichkeit

**Autor:** Bühlmann, Hans

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966810>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die beste erwartungstreue lineare Schätzfunktion der Übersterblichkeit

*Von Hans Bühlmann, Zürich*

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Klasse der linearen erwartungstreuen Schätzfunktionen der multiplikativen Übersterblichkeit untersucht. Da sich die wirksamste Funktion als vom gesuchten Parameter abhängig erweist, wird die im Sinne einer Minimaxstrategie beste Funktion zur Schätzung der Übersterblichkeit vorgeschlagen.

## Einleitung

Mit der zunehmenden Bedeutung der Versicherung anormaler Risiken hat das Problem der Bestimmung der Übersterblichkeit für eine Versichertengemeinschaft eine zentrale Stellung im Aufgabenbereich des Versicherungsmathematikers erhalten. Nun gehören ja Sterblichkeitsuntersuchungen ex officio zum eisernen Bestand des Rüstzeuges jedes Aktuars, und man wird sich mit Recht fragen, wieso es denn, nachdem zum Thema der Sterblichkeitsmessung schon zahlreiche Untersuchungen vorliegen, noch notwendig sei, über die Bestimmung der Übersterblichkeit Worte zu verlieren.

Nun treten aber – trotz der prinzipiellen Gleichheit der Problemstellungen für die Bestimmung der Sterblichkeit im Normalen- und im Anormalen-Sektor – technische Verschiedenheiten zutage, welche den Mathematiker zwingen, in der Anormalenstatistik ganz andere Verfahren anzuwenden. Der Hauptgrund, der nach einer neuen Methode verlangt, ist wohl die Kargheit des Beobachtungsmaterials. Sterblichkeitsuntersuchungen im klassischen Sinne stützen sich ja in der Regel auf ein so mächtiges Material, dass es für alle Bedürfnisse der Praxis genügt, die beobachteten Zahlen nach irgendeiner Methode auszugleichen und nachher mit diesen «bereinigten» Werten zu rechnen, als ob sie den wahren Verlauf der Sterblichkeit darstellten. Die Anormalen-

Statistik wird nie eine solche Menge an Beobachtungsmaterial aufweisen können, um so mehr, als – entsprechend dem Prinzip der Einteilung in Gefahrenklassen – das Zahlenmaterial über allzu viele Gruppen aufgeteilt werden muss. Es wird sich deshalb im Anormalen-Sektor immer darum handeln

- a) durch gewisse Hypothesen die Klassen gleicher Risiken mächtiger zu machen,
- b) statistische Methoden anzuwenden, welche auch für kleine Stichproben Gültigkeit haben. Solche Methoden müssen vor allem hinsichtlich ihrer Ungenauigkeit untersucht worden sein, da nur die Kenntnis dieser Ungenauigkeit den Statistiker vor der falschen Schlussfolgerung retten kann.

Die vorliegende Arbeit nimmt im Sinne von Punkt a) die Hypothese der multiplikativen Übersterblichkeit als Ausgangspunkt und entwirft – die Wunschliste unter b) vor Augen haltend – für eine Anormalenklasse mit gleicher Übersterblichkeit eine optimale Methode zur Schätzung dieser Grösse.

### A. Problemstellung

Wir gehen von zwei Grundgesamtheiten von Versicherten aus, die eine bezeichnen wir als die *normale*, die andere als die *anormale*. Die beiden Kollektive werden durch folgende Zahlen charakterisiert:

$$q_x = \text{Sterbewahrscheinlichkeit des normalen } x\text{-jährigen,}$$
$$q'_x = \text{Sterbewahrscheinlichkeit des anormalen } x\text{-jährigen.}$$

Unsere Überlegungen basieren auf den zwei grundlegenden Hypothesen

- I. Die  $q_x$  der normalen Grundgesamtheit sind bekannt.
- II. Die  $q'_x$  haben folgenden funktionellen Zusammenhang mit den  $q_x$ :  $q'_x = \alpha q_x$  für alle  $x$ .

Auf Grund von Hypothese II genügt eine Bestimmung von  $\alpha$  zur Festlegung der  $q'_x$ . Wie soll nun aber der Parameter  $\alpha$  bestimmt werden? Dass dies auf Grund von Beobachtungen zu geschehen hat, mag auf den

ersten Blick als «trivialste aller möglichen» Antworten scheinen. Dennoch ist gerade die Tatsache, dass wir gezwungen sind, auf Grund von Beobachtungen unsere Schlüsse zu ziehen, entscheidend, weist sie doch darauf hin, dass unsere Bestimmung von  $\alpha$  immer eine *Schätzung* – also approximativ – sein wird. Selbstverständlich gibt es aber auch im Bereiche der Schätzungen bessere und schlechtere Approximationen, und es handelt sich für den Statistiker darum, die *beste* Schätzung vorzunehmen. In mathematischer Terminologie ist diejenige Schätzung die beste, welche

- a) erwartungstreu (unbiased),
- b) von kleinster Varianz (most efficient) ist.

Für die Bestimmung der Übersterblichkeit  $\alpha$  werden wir in diesem Sinne die beste unter allen *linearen* Schätzungen angeben.

## B. Das Beobachtungsmaterial

Wir beobachten eine Gesamtheit von anormalen Risiken. Aus der grundlegenden Hypothese II schliessen wir, dass diese Gesamtheit nicht beliebig sein, sondern nur Risiken *gleicher* Übersterblichkeit enthalten darf. In der Praxis spricht man in diesem Falle meistens von einer *Gefahrenklasse*. Die während eines Beobachtungsintervalls (z. B. 1 Jahr) aus dieser Gefahrenklasse gesammelten Resultate bilden dann eine *Stichprobe*, die folgende Zahlen umfasst:

$L_x(x = 1, 2, 3, \dots, \omega) =$  Lebende des Alters  $x$ , welche unter Beobachtung gestanden sind,

$T_x(x = 1, \dots, \omega) =$  Anzahl der im Beobachtungsintervall Gestorbenen vom Alter  $x$ .

$L_x$  und  $T_x$  sind beides Realisationen von gewissen Zufallsvariablen. Die Variationen der  $L_x$  sind verursacht durch alle möglichen Eintritts- oder Austrittsursachen eines Versicherten. Sie können uns also unmöglich über die Mortalität *allein* Auskunft geben, und wir werden sie deshalb im folgenden nicht als Zufallsvariablen, sondern als gegebene Grössen behandeln. Wahrscheinlichkeitstheoretisch bedeutet das, dass wir alle Erwartungswerte, Varianzen, Verteilungsfunktionen als bedingt bezüglich der gegebenen  $L_x$  zu betrachten haben.

Beispielsweise gelten die folgenden Beziehungen

$$W[T_x = k] = \binom{L_x}{k} (1 - \alpha q_x)^{L_x - k} (\alpha q_x)^k, \quad (1)$$

$$E(T_x) = \alpha q_x L_x, \quad (2)$$

$$\text{Var}(T_x) = \alpha q_x (1 - \alpha q_x) L_x. \quad (3)$$

### C. Erwartungstreue lineare Schätzfunktion von $\alpha$

Eine Schätzung  $S(T_1, T_2, \dots, T_\omega)$  ist eine auf den beobachteten Werten  $T_1, T_2, \dots, T_\omega$  definierte Funktion. Sie heisst *linear*, falls

$$S(T_1, T_2, \dots, T_\omega) = \sum_{x=1}^{\omega} a_x T_x$$

und *erwartungstreu*, wenn

$$E S(T_1, \dots, T_\omega) = \alpha.$$

Wir betrachten hier nun die Klasse aller *linearen und gleichzeitig erwartungstreuen* Schätzfunktionen, die notwendigerweise folgende Form haben:

$$S(T_1, T_2, \dots, T_\omega) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} b_x T_x}{\sum_{x=1}^{\omega} b_x q_x L_x}$$

mit der Varianz

$$\text{Var}[S(T_1, \dots, T_\omega)] = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} b_x^2 \alpha q_x (1 - \alpha q_x) L_x}{\left(\sum_{x=1}^{\omega} b_x q_x L_x\right)^2}.$$

Durch Differenzieren und Nullsetzen finden wir, dass die Wahl

$$b_x = \frac{K}{(1 - \alpha q_x)}$$

die Varianz minimalisiert. Die beste Schätzfunktion hat also folgende Form:

$$S(T_1, \dots, T_\omega) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / (1 - \alpha q_x)}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / (1 - \alpha q_x)}. \quad (4)$$

Bei dieser Gelegenheit sei auf die Verwandtschaft der Formel (4) mit der «üblichen Schätzfunktion» (Saxer, 2. Teil, Anhang)

$$S(T_1, T_2, \dots, T_\omega) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x} \quad \text{hingewiesen.} \quad (5)$$

Diese Formel ist – wie man ja sofort sieht – in (4) als Spezialfall (mit  $\alpha = 0$ ) enthalten.

Nun hat aber auch Formel (4) einen grossen Nachteil. Der Wert  $\alpha$ , den wir schätzen wollen, tritt explizit in unserer Formel auf; d. h. um  $\alpha$  am geeignetsten schätzen zu können, sollten wir den wahren Wert von  $\alpha$  zum voraus schon kennen. Glücklicherweise gibt es aber einen Ausweg aus diesem Dilemma. Wir möchten ihn im übernächsten Kapitel aufzeigen.

#### D. Über die Güte der Schätzfunktionen

$$\frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha^* q_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x}$$

Um Unklarheiten zu vermeiden, wollen wir zunächst folgende Bezeichnungen festhalten. Wir bezeichnen mit

$\alpha$  den *wahren* Wert der Übersterblichkeit, der zwar unbekannt ist, dessen Existenz jedoch auf Grund medizinischer Gegebenheiten postuliert wird,

$\alpha^*$  einen *approximativen* Wert der Übersterblichkeit.

Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, ist

$$\frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha q_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha q_x} \quad \text{die beste Schätzfunktion für die Übersterblichkeit.}$$

Da wir aber  $\alpha$  selbstverständlich nicht kennen, wenn wir die Übersterblichkeit schätzen wollen, bleibt uns nichts anderes übrig, als den wahren Parameter  $\alpha$  in der Schätzfunktion durch einen Näherungswert  $\alpha^*$  zu ersetzen. Selbstverständlich hoffen wir bei dieser Ersetzung eine um so bessere Schätzung zu erhalten, je näher  $\alpha^*$  an  $\alpha$  liegt. Diese Vermutung möchten wir nun streng mathematisch beweisen.

Sei

$$S_{\alpha^*} = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha^* q_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x} \quad \text{Es gilt dann folgender}$$

*Satz 1.* Sei  $\alpha_1^* < \alpha_2^* < \alpha$  oder  $\alpha < \alpha_2^* < \alpha_1^*$ , dann ist  $S_{\alpha_2^*}$  eine bessere Schätzfunktion als  $S_{\alpha_1^*}$ .

Dieser Satz ist gleichbedeutend mit folgender Aussage:

*Satz 1'.*  $\text{Var}(S_{\alpha^*})$  ist eine für  $\alpha^* < \alpha$  monoton fallende für  $\alpha^* > \alpha$  monoton steigende Funktion.

Den Beweis führen wir, indem wir die erste Ableitung von

$$\text{Var}(S_{\alpha^*}) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} \alpha q_x (1 - \alpha q_x) L_x / (1 - \alpha^* q_x)^2}{\left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right)^2} \quad \text{untersuchen.}$$

Sie hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} [\text{Var}(S_{\alpha^*})] = & \frac{2 \left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right) \sum_{x=1}^{\omega} \alpha q_x^2 (1 - \alpha q_x) L_x / (1 - \alpha^* q_x)^3}{\left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right)^3} \\ & - \frac{\sum_{x=1}^{\omega} \alpha q_x (1 - \alpha q_x) L_x / (1 - \alpha^* q_x)^2 \cdot 2 \sum_{x=1}^{\omega} q_x^2 L_x / (1 - \alpha^* q_x)^2}{\left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right)^3} \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, wann die erste Ableitung positiv, negativ oder null ist, genügt es offensichtlich, den folgenden Ausdruck zu betrachten:

$$\left( \sum_{x=1}^{\omega} \frac{q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x} \right) \sum_{x=1}^{\omega} \frac{q_x^2 (1 - \alpha q_x) L_x}{(1 - \alpha^* q_x)^3} - \sum_{x=1}^{\omega} \frac{q_x (1 - \alpha q_x) L_x}{(1 - \alpha^* q_x)^2} \sum_{x=1}^{\omega} \frac{q_x^2 L_x}{(1 - \alpha^* q_x)^2},$$

oder in etwas anderer Form:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x} \frac{\sum_{x=1}^{\omega} 1 - \alpha q_x}{1 - \alpha^* q_x} \frac{q_x}{1 - \alpha^* q_x} \frac{q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x} \\ & - \sum_{x=1}^{\omega} \frac{1 - \alpha q_x}{1 - \alpha^* q_x} \frac{q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x} \sum_{x=1}^{\omega} \frac{q_x}{1 - \alpha^* q_x} \frac{q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x}. \quad (6) \end{aligned}$$

Setzt man nun im Ausdruck (6)

$$\frac{q_x L_x}{1 - \alpha^* q_x} = \lambda_x, \quad \frac{1 - \alpha q_x}{1 - \alpha^* q_x} = a_x, \quad \frac{q_x}{1 - \alpha^* q_x} = b_x,$$

so geht er über in

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^{\omega} \lambda_y \sum_{x=1}^{\omega} a_x b_x \lambda_x - \sum_{x=1}^{\omega} a_x \lambda_x \sum_{y=1}^{\omega} b_y \lambda_y &= \sum_{x,y=1}^{\omega} a_x (b_x - b_y) \lambda_x \lambda_y & (6') \\ &= \sum_{x>y} (a_x - a_y) (b_x - b_y) \lambda_x \lambda_y. \end{aligned}$$

Bemerken wir noch, dass für  $x > y$ ,  $b_x - b_y > 0$ , dann finden wir, dass der Ausdruck (6')

- a) positiv ist, falls  $a_x > a_y$  für  $x > y$ ,
- b) null ist, falls  $a_x = a_y$  für alle  $x$  und  $y$ ,
- c) negativ ist, falls  $a_x < a_y$  für  $x > y$ .

Unter der in der Praxis sicher erfüllten Annahme, dass  $q_x$  eine monoton zunehmende Funktion sei, entspricht

- a) dem Fall  $\alpha^* > \alpha$ ,
- b) dem Fall  $\alpha^* = \alpha$ ,
- c) dem Fall  $\alpha^* < \alpha$ .

Da das Vorzeichen von (6') mit demjenigen der ersten Ableitung übereinstimmt, ist somit Satz 1 bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes haben wir nun die Gewissheit, dass wir schon eine «recht gute» Schätzfunktion erhalten, wenn wir in der linken Seite von (5) einen approximativen Wert  $\alpha^*$  für  $\alpha$  einsetzen und dass diese Güte zunimmt je näher  $\alpha^*$  bei  $\alpha$  liegt.

### E. Die beste Schätzfunktion der Form

$$\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha^* q_x \\ &\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \end{aligned}$$

im Sinne einer Minimaxstrategie

Wir haben am Schlusse von Kapitel C darauf hingewiesen, dass es eine Methode gebe, die beste *mögliche* Schätzfunktion  $S_{\alpha_0^*}$  zu bestimmen. Wir werden allerdings sehen, dass die Varianz von  $S_{\alpha_0^*}$  etwas grösser ausfallen wird als das absolute Minimum; hingegen

können wir ja gar nicht erwarten, die untere Grenze für die Varianz mit einer Schätzfunktion zu erreichen, die vom wahren Wert ( $\alpha$ ) der Übersterblichkeit unabhängig ist. Unsere Überlegungen knüpfen an folgendes spieltheoretische Modell an.

Spieler sind die «Natur» und diejenige Person, welche die Übersterblichkeit bestimmen will – nennen wir sie den «Statistiker». Der Statistiker will eine Schätzfunktion der Form

$$S_{\alpha^*} = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha^* q_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x}$$

zur Bestimmung der Übersterblichkeit verwenden. Um seine Formel numerisch zu gebrauchen, muss er aber zunächst einen Wert  $\alpha^*$  wählen. Die Natur andererseits wählt den wahren Wert ( $\alpha$ ) der Übersterblichkeit. Keiner der Spieler weiss, welchen Zug der andere getan hat. Das Resultat des Spieles ist eine mehr oder weniger gute Schätzfunktion. Das Problem für den Statistiker ist nun folgendes: Welchen Wert von  $\alpha^*$  soll ich wählen, damit im schlimmsten Fall (d. h. dann, wenn die Natur für mich am ungünstigsten wählt) die Schätzfunktion optimal ist? Diese Lösung nennen wir dann die Minimaxlösung.

Diese Problemstellung – so einleuchtend sie sein mag – ist natürlich erst sinnvoll für die Praxis, wenn der Statistiker zum vornherein weiss, in welchem Intervall die Natur ihren Wert wählt. Wir wollen annehmen, dass

$$1 < \alpha < \alpha_0 \leq \frac{1}{2 \max_x q_x}. \quad (7)$$

Der Grund, weshalb wir diese obere Grenze wählen, wird sich gleich erweisen.

In praxi dürfte die Annahme  $\alpha \leq \frac{1}{2 \max_x q_x}$  immer erfüllt sein.

Nehmen wir nun an, die Natur habe  $\alpha$  gewählt, der Statistiker  $\alpha^*$ . Die Schätzfunktion  $S_{\alpha^*}$  hat dann folgende Varianz:

$$\text{Var}(S_{\alpha^*}) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} \alpha q_x (1 - \alpha q_x) L_x / (1 - \alpha^* q_x)^2}{\left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right)^2}.$$

Im schlimmsten Fall, d. h. wenn die Natur den ungünstigsten Wert wählt, der Statistiker hingegen an seinem  $\alpha^*$  festhält, finden wir

$$\max_{\alpha} \text{Var}(S_{\alpha^*}) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} \alpha_0 q_x (1 - \alpha_0 q_x) L_x / (1 - \alpha^* q_x)^2}{\left( \sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha^* q_x \right)^2} . \quad (8)$$

Gleichung (8) ist richtig wegen der oberen Grenze in Beziehung (7). Der Statistiker wird nun für  $\alpha^*$  denjenigen Wert einsetzen, welcher (8) minimisiert. Auf Grund von Satz 1 wissen wir, dass  $\alpha_0$  diese Eigenschaft hat, womit wir folgende Lösung gefunden haben:

$$\begin{aligned} \text{Beste Schätzfunktion im Sinne} & \quad \frac{\sum_{x=1}^{\omega} T_x / 1 - \alpha_0 q_x}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha_0 q_x} , \\ \text{der Minimaxstrategie:} & \\ \text{Varianz dieser Schätzfunktion} & \quad \frac{\alpha_0}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha_0 q_x} . \\ \text{im schlimmsten Falle:} & \end{aligned} \quad (9)$$

Es bleibt uns nur noch zu prüfen, ob wir vielleicht mit einer gemischten Strategie (d. h. einem Vorgehen, bei welchem der Statistiker abwechslungsweise verschiedene Werte für  $\alpha^*$  einsetzt) eine Verbesserung für die obere Schranke der Varianz der Schätzfunktion erreichen können. Die Kontrolle, ob eine solche Verbesserung möglich ist, besteht darin, dass wir uns fragen, ob die Natur eine Strategie besitzt, welche ihr garantiert, dass die Varianz der Schätzfunktion mindestens

$$\frac{\alpha_0}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha_0 q_x} \text{ ist.}$$

Bei festem  $\alpha$  und beliebigem  $\alpha^*$  gilt

$$\min_{\alpha^*} [\text{Var}(S_{\alpha^*})] = \frac{\alpha}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha q_x} . \quad (10)$$

Auf Grund der Nebenbedingung (7) finden wir

$$\max_{\alpha} \min_{\alpha^*} [\text{Var}(S_{\alpha^*})] = \frac{\alpha_0}{\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha_0 q_x} . \quad (11)$$

Die Tatsache  $\min_{\alpha^*} \max_{\alpha} [\text{Var } S_{\alpha^*}] = \max_{\alpha} \min_{\alpha^*} [\text{Var } S_{\alpha^*}]$  drückt man in der spieltheoretischen Sprache wie folgt aus:

a) Das Spiel hat einen Sattelpunkt  $\alpha_0$ ,

b) Der Wert des Spieles ist  $\alpha_0$ ,  

$$\sum_{x=1}^{\omega} q_x L_x / 1 - \alpha_0 q_x$$

und es ist aus allgemeinen Sätzen bekannt, dass – falls das Spiel einen Sattelpunkt hat – die Minimaxlösung, wie wir sie unter (9) angegeben haben, die beste ist.

Es bleibt wohl noch darauf hinzuweisen, dass die Spieltheorie an und für sich von der Voraussetzung ausgeht, die beiden Spieler seien daran interessiert, sich gegenseitig möglichst viel Schaden zu verursachen. Ob diese Annahme über die «Bösartigkeit» der Natur zutrifft, ist eine philosophische Frage, deren Beantwortung sicher nicht im Rahmen dieser Arbeit liegt. Wir möchten deshalb das vorliegende Verfahren – sei die Natur nun, wie sie wolle – einfach als dasjenige Prozedere bezeichnen, welches die obere Grenze für die Varianz der Schätzfunktion so klein als möglich macht.

---

### Résumé

L'auteur se propose de rechercher la meilleure des fonctions linéaires pour estimer la surmortalité multiplicative. Etant donné que cette fonction dépend du paramètre cherché, nous choisissons la solution «minimax» comme étant l'estimation la «meilleure possible».

### Riassunto

L'autore si propone di indagare la migliore delle funzioni lineari per stimare la sovramortalità moltiplicativa. Dato che questa funzione dipende dal parametro cercato, si sceglie la soluzione «minimax» come estimatore «ottimo possibile».

### Summary

We consider the class of all linear unbiased estimators of the multiplicative extramortality. Unfortunately the most efficient estimator is depending on the quantity we want to estimate. We therefore select the minimax solution as the «best possible» estimator of the extramortality.