Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 59 (1959)

Artikel: Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie

Autor: Nolfi, Padrot

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966809

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie

Von Padrot Nolfi, Zürich

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie die Frage der Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung mit Hilfe der Spieltheorie gelöst werden kann. Das Verfahren findet praktische Anwendung bei den Technischen Grundlagen für Pensionsversicherungen VZ 1960 der Versicherungskasse der Stadt Zürich.

Die Probleme, welche die Aktuarwissenschaft stellt, sind zweifellos nicht weniger eigenartig und komplex als diejenigen anderer Wissensgebiete. Auch für sie gelten die Worte Bellmanns [1] *): The actual world is extremely complicated, and as a matter of fact the more that one studies it the more one is filled with wonder that we have "order of magnitude" explanations of the complicated phenomena that occur... — Tatsächlich ist es merkwürdig, dass es gelingt, über die Realität Aussagen zu machen, die sich als wirksam erweisen, obwohl sie sich auf Grundlagen stützen, die in ihren letzten Konsequenzen irreal erscheinen. So kann mit Vorteil die Gültigkeit von Sterblichkeitsgesetzen postuliert werden; obwohl eine solche Annahme der realen Wirklichkeit nicht gerecht zu werden vermag, lassen sich trotzdem Schlussfolgerungen von weitragender praktischer Bedeutung ziehen. Es gelingt auch, die wirklichen Geschehnisse besser nachzubilden, wenn an Stelle eines absolut verketteten Kausalzusammenhanges stochastische Abhängigkeit postuliert wird. Hierzu besitzt man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine vielseitig ausgebildete Disziplin. Prüft man aber ihre Grundlagen, so stösst man wieder auf erhebliche Schwierigkeiten. Sie bildeten Gegenstand eingehender Erörterungen in den Berichten zum ersten Thema des zwölften internationalen Kongresses für Versicherungsmathematik

*) Die Zahlenangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

im Jahre 1940. Es sei diesbezüglich auf die klare und übersichtliche Berichterstattung durch Jecklin [2] verwiesen.

Warum Spieltheorie?

Wenn wir hier einleitend erneut auf diese erkenntnistheoretischen Auseinandersetzungen und Schwierigkeiten hinweisen, so geschieht das, um der Ansicht entgegenzutreten, die mathematischen Errungenschaften, einschliesslich die Erfolge der modernen mathematischen Statistik, genügen vollauf, um die Probleme der Versicherung zu meistern. – In der Tat wird man sich fragen, warum soll die Versicherungswissenschaft mit einer neuen Lehre wie die Spieltheorie «belastet» werden, gibt es nicht genug mathematische Formeln, um die einfach erscheinenden Aufgaben der Versicherung zu lösen? – Wohl gibt es eine Unmenge von wissenschaftlichen Abhandlungen, aber diese beweisen nicht, dass man am Ziele angelangt ist, sondern eher das Gegenteil, nämlich, dass man sich diesem Ziel sehr mühsam zu nähern sucht. Tatsächlich weist die Versicherungswissenschaft noch viele ungelöste oder nicht in befriedigender Weise gelöste Probleme auf, und es darf erwartet werden, dass ihre Klärung wesentlich zum Fortschritte und weiteren Ausbau dieser volkswirtschaftlich so bedeutungsvollen Wissenschaft beiträgt. Insbesondere ist erfahrungsgemäss anzunehmen, dass durch neue Ideen neue Mittel und Wege aufgedeckt werden, die sich bahnbrechend auswirken.

Die Spieltheorie ist im wesentlichen der Ausfluss einer neuen Idee. Sie bringt eine neue Methode, um gewissen Schwierigkeiten entgegenzutreten, eine andere Art, die Dinge zu beurteilen und vor allem wesentliche Einsichten in das Sosein unserer rätselhaften Umwelt. Nicht umsonst ist das Aufkommen der Spieltheorie mit der Entdeckung der Integral- und Differentialrechnung verglichen worden. Doch ist dieser Vergleich nur bedingt richtig. Die Spieltheorie ist – wie ihr Name besagt – anderer Art als die übrigen mathematischen Disziplinen. Das Wort «Spiel» könnte leicht zu falschen Vorstellungen verleiten, ist aber doch zutreffend, weil es auf eine wesentliche Eigentümlichkeit im Existenzkampf des wirtschaftenden Menschen hinweist. Diese Eigentümlichkeit besteht hauptsächlich im Umstand, dass – ähnlich wie beim Spielen – immer wieder neue Entscheide getroffen werden müssen, von denen der Erfolg unserer Bemühungen stark abhängig ist.

Nun vermag auch die Spieltheorie nicht eine vollendete Darstellung des Versicherungswesens zu bieten, sie liefert «bloss» einen Beitrag, aber doch einen wesentlichen Beitrag. Dieser betrifft – wie angedeutet – den Bereich des freien Entscheides, also eines Gebietes, dem im Wirtschaftsleben und insbesondere auch im Versicherungswesen höchste Bedeutung zukommt. Dabei hat es nicht die Meinung, dass der Bereich des freien Willensentscheides eingeengt werden soll. Es werden vielmehr Richtlinien gegeben, um festzustellen, wie Entscheide – namentlich solche von grosser Tragweite – zu fällen sind. Im Buche von R. Ducan Luce and Honard Raiffa, Games and Decisions [3], heisst es: "The primary topic can be viewed as the problem of individuals reaching decisions when they are in conflict with other individuals and when there is risk involved in the outcomes of their choices." Die so gekennzeichnete Situation ist zweifellos ein Hauptmerkmal der Versicherung. Bei jedem Vertragsabschluss werden durch die Vertragspartner Risiken eingegangen, die sich unter Umständen sehr empfindlich auswirken können. Eine prägnantere Kennzeichnung der Zweckbestimmung der Spieltheorie hat J. D. Williams [4] gegeben: "While there are specific applications today, despite the current limitations of the theory, perhaps its greatest contribution so far has been an intangible one: the general orientation given to people who are faced with overcomplex problems. Even though these problems are not strictly solvable – certainly at the moment and probably for the infinite future – it helps to have a farmework in which to work on them." In diesen Worten liegt der Kern der Sache. Die Spieltheorie ist eine zweckmässige Grundlage, um Entscheidungsfragen vorzuführen und zu beurteilen. Hierin liegt ihre primäre und grundlegende Bedeutung. Sie erlaubt die Probleme zu formulieren. Es ist allgemein so, dass eine gut formulierte Frage bereits wesentlich zu ihrer Beantwortung beiträgt. Insbesondere wird damit die Möglichkeit gegeben, diese in ihrer ganzen Tragweite in Erwägung zu ziehen.

Die Problemstellung

Über die Art und Weise, wie die Spieltheorie in der Versicherung praktische Anwendung finden kann, liegen bereits verschiedene Abhandlungen vor. So hat D. Bierlein [5, 6] in verschiedenen Arbeiten sich mit diesen Fragen eingehend befasst. Instruktiv ist auch die Abhandlung von R. Borges [7].

Nachstehend soll gezeigt werden, wie ein ganz anderes Problem mit dem neu gewonnenen Hilfsmittel der Spieltheorie abgeklärt werden kann. Es handelt sich um die Frage der Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung. Es ist unbestreitbar, dass die ständige Verlängerung der Lebensdauer sich stark auf die Kosten der Rentenversicherung auswirkt und dass ihre Nicht- oder ungenügende Beachtung bei der Prämienkalkulation zu sehr empfindlichen Verlusten geführt hat; andererseits aber wirkt sich eine Berücksichtigung der Sterblichkeitssenkung stark verteuernd aus, was ausserordentlich zu bedauern ist, weil damit der Ankauf von Rentenversicherungen – denen eine besonders hohe soziale Bedeutung zukommt – sehr erschwert wird. – Die Meinungen über die Notwendigkeit der Erfassung dieses Phänomens und über dessen Ausmass gehen denn auch auseinander. Nicht selten hört man die Ansicht, dieser Rückgang werde bald einmal abbrechen; da er nun über ein Jahrhundert angehalten hat, sei anzunehmen, dass demnächst eine Wendung eintrete. Tatsächlich lassen sich verschiedene Argumente dafür anführen, wie auch solche für die gegenteilige Auffassung genannt werden können. Hieraus folgt eine unerquickliche Situation, weil Massnahmen getroffen werden müssen, für die keine zuverlässigen Anhaltspunkte bestehen. Der Aktuar ist gezwungen, einen Entscheid zu fällen, der mit einem grossen Risiko verbunden ist. – Die Überschätzung der Kosten führt – wie dargelegt – zu einer schwer zu rechtfertigenden Verteuerung der Tarife und damit zu einer prohibitiven Auswirkung derselben, während die Unterschätzung direkten Schaden nach sich zieht. Beides muss nach Möglichkeit vermieden werden, und da erscheint es nicht nur naheliegend, sondern auch Pflicht, alle Hilfsmittel heranzuziehen, die Erfolg versprechen, so insbesondere auch die zur Lösung derartiger Fragen besonders geeigneten Methoden der Spieltheorie.

Dieser Weg wurde bei der Aufstellung der Grundlagen VZ 1960 [9] beschritten, die demnächst erscheinen werden. Es handelt sich um neue Grundlagen für die Berechnung der Anwartschaften auf Alters-, Invaliden- und Hinterlassenenrenten für Pensionsversicherungen. Die Einzelheiten der Berechnungen sind dem in den Erläuterungen zur genannten Publikation gemachten Ausführungen zu entnehmen. Hier soll lediglich das grundsätzliche Verfahren, soweit dieses von allgemeinem wissenschaftlichem Interesse ist, dargelegt werden.

Nach der Terminologie der Spieltheorie hat die soeben umschriebene Aufgabe die Struktur eines Zweipersonenspieles, und zwar eines Spieles zwischen dem Aktuar einerseits und der Natur andererseits. Man denkt sich, die Natur vollziehe in diesem Spiel einen bestimmten Zug, der darin besteht, dass sie eine a priori völlig unbekannte Sterblichkeit vorschreibt. Ähnlich wie bei einem Gesellschaftsspiel muss der Mathematiker – noch bevor er die Wahl der Natur kennt – seinerseits ebenfalls einen Zug vollziehen, indem er für seine Vorausberechnungen eine möglichst zuverlässige Sterbetafel wählt. Vermag er das Verhalten der Natur einigermassen zu erraten, so wird es ihm gelingen, gute Grundlagen aufzustellen, andernfalls muss er mit unliebsamen Folgen rechnen. Es handelt sich also um eine strategische Aufgabe. Ohne zu wissen, was in Zukunft geschieht, muss ein möglichst zweckmässiger Entscheid getroffen werden.

Die informatorische Aufgabe

Als erster Schritt empfiehlt die Spieltheorie eine eingehende Auskundschaftung des Gegners, hier der Natur. Der Mitspieler soll nach allen Seiten «ausspioniert» werden, denn jedes Wissen über sein Verhalten kann unter Umständen von grösster Tragweite sein. Beim vorliegenden «Spiel» gehört zu diesem Wissen in erster Linie die Kenntnis des Sterblichkeitsverlaufes und des allgemeinen Trends in den vergangenen Jahren und vor allem in der letzten Zeit. Könnte man gestützt auf solche Kenntnisse annehmen, der Aktuar hätte es gewissermassen mit einem ermüdeten Spielpartner zu tun, der nur noch gewohnheitsmässig weiterspielt, so würde daraus folgen, dass durch eine adäquate Extrapolation des Sterblichkeitsverlaufes auf die Zukunft die beste Strategie gewonnen wird. Solche Verfahren wurden denn auch – ohne auf die Spieltheorie Bezug zu nehmen – in letzter Zeit den Berechnungen weitgehend zugrunde gelegt [8, 11 und 12]. Sie stützen sich indessen auf Annahmen, die, spieltheoretisch gesehen, nicht als die besten erscheinen. – Die Kenntnisse des Verhaltens der Natur sind aber trotzdem, auch wenn man nicht von den erwähnten Voraussetzungen ausgeht, von massgebender Bedeutung, weil sie wertvolle Anhaltspunkte über die Möglichkeiten der künftigen Entwicklung liefern. Da die Natur kein bewusster Gegner ist, die Sterblichkeitsverbesserung jedoch wesentlich durch die Entwicklung der Wissenschaft hervorgerufen wird, kann aus solchen Kenntnissen mit einiger Zuverlässigkeit auf die Grenzen, innerhalb denen sich die «wahre» Entwicklung vollziehen wird, geschlossen werden.

Bei dem Versuch, die säkulare Sterblichkeitsänderung zu erfassen, kann es sich weniger darum handeln, den genauen Verlauf in allen Einzelheiten wiederzugeben, als vielmehr um die Festhaltung der allgemeinen Tendenz, d. h. um die Aufstellung einer kanonischen Formel, welche die charakteristischen Merkmale dieser Erscheinung in einfacher Weise zu erfassen vermag.

Die Einführung der Halbwertzeit

Es ist möglich, dieser Forderung zu entsprechen. Nach der üblichen Bezeichnungsweise soll $q(x, t)$ die Sterblichkeit eines x-Jährigen zur Zeit t wiedergeben. Der Verlauf von $q(x, t)$ bei konstant gehaltenem x weist selbst bei grossen Personengesamtheiten, wie z. B. die Bevölkerung eines Landes, Unregelmässigkeiten auf. Dagegen ist eine gewisse Tendenz, die auf eine anhaltende Abnahme der Sterbeziffern hinweist, unverkennbar, und es ist unsere erste Aufgabe, den allgemeinen Trend dieses Verlaufes durch einen einfachen analytischen Ausdruck zu erfassen. Verschiedene Autoren haben hiefür die Exponentialfunktion benützt. Diese eignet sich deshalb besonders gut, weil sie eine immer schwächer werdende Abnahme der Sterblichkeit vorsieht, also eine Verminderungsweise voraussetzt, die bei konstant wirkenden Kräften zu erwarten ist. Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen zur Zeit t wird somit gegeben durch

$$q(x,t) = q(x,t_0)\, e^{-\lambda_x(t-t_0)}, \qquad t \geqq t_0.$$

Aus dieser Formel folgt nun allerdings, dass das Exponentialgesetz insoweit nicht zutreffend sein kann, als für $t = \infty$, $q(x, \infty) = 0$ wird, was unrealistisch erscheint. Diesem Einwand lässt sich indessen durch den Hinweis begegnen, dass die für die vorliegenden Zwecke erforderlichen Berechnungen sich bloss auf die unmittelbare Zukunft – auf die nächsten 50 bis 100 Jahre – beziehen, also auf eine Zeit, während der das festgestellte unrealistische Verhalten der Funktion noch lange nicht zum Vorschein tritt. – Dafür weist die Exponentialfunktion analytische Eigenschaften auf, die sie für die vorliegenden Zwecke wesentlich geeigneter erscheinen lassen als die für die Bestimmung der «unendlich fernen» Sterblichkeit besser geeignete logistische Funktion. Sie gestattet nämlich – und das erscheint im vorliegenden Fall besonders wünschenswert – ein anschauliches Mass über die Raschheit der Sterblichkeitsverbesserung anzugeben.

Nach dem Vorbild der theoretischen Physik betreffend den Zerfall radioaktiver Stoffe führen wir die *Halbwertzeit* ein. Es ist das die Zeit, die vergeht, bis die Sterbewahrscheinlichkeit eines Alters auf die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes gesunken ist. Formelmässig erhält man dafür den Ausdruck

$$T_x = \frac{\ln 2}{\lambda_x}.$$

Die Halbwertzeit ist unabhängig von der Variablen t, sie richtet sich lediglich nach der Intensität der Sterblichkeitsabnahme λ_x.

Auf Grund eingehender Untersuchungen über den Sterblichkeitsverlauf bei der schweizerischen Wohnbevölkerung und unter Verwendung der vier letzten Sterbetafeln, d. h. unter Berücksichtigung der Sterblichkeitsabnahme in den letzten dreissig Jahren, konnte festgestellt werden, dass die Halbwertzeit mit zunehmendem Alter ansteigt. Grosso modo kann diese Erscheinung

für das männliche Geschlecht durch die Formel $\underline{\underline{T_x = x - 10}}$,
für das weibliche Geschlecht durch die Formel $\underline{\underline{T_y = y - 15}}$
ausgedrückt werden.

Es zeigt sich damit, dass die Halbwertzeit nach den bisherigen Erfahrungen ausserordentlich kurz war. Bei einem 60jährigen Mann sinkt die Sterbenswahrscheinlichkeit nach der aufgestellten Formel innert 50 Jahren auf die Hälfte.

Die Schwankungen während der letzten Jahrzehnte sowie der unregelmässige Verlauf nach dem Lebensalter haben uns bewogen, für die Beurteilung dieser Erscheinung eine weniger scharfe Formel zu wählen und einfach $T_x = x$ zu setzen. Zu diesem Schritt haben uns auch Erfahrungen im Ausland veranlasst. Aus einer Arbeit von G. Wünsche [13] konnten für die durch 5 teilbaren Alter von $x = 25$ bis $x = 100$ die zuletzt festgestellten Sterbeintensitäten der männlichen Bevölkerung der Deutschen Bundesrepublik entnommen und daraus die Halbwertzeit berechnet werden. Es zeigt sich, dass diese länger ist als bei der schweizerischen Bevölkerung. Die Abhängigkeit vom Alter ist jedoch deutlich erkennbar, so dass die Formel $T_x = x$ die Verhältnisse auch hier wenigstens grosso modo einigermassen richtig wiedergibt. Einzig bei den höheren Jahrgängen treten nach der deutschen Statistik grössere Unterschiede auf. So stellt sich die Halbwertzeit nach diesen Beobachtungen für einen 80jährigen auf 117 Jahre, nach schweizerischen dagegen bloss auf 81 Jahre. Dazu ist zu bemerken, dass neuerdings ein bemerkenswerter Rückgang der Sterblichkeit bei den höheren Jahrgängen eingesetzt hat, so dass eine Fortsetzung der Senkung der Sterblichkeit in diesen Altersstufen nach Massgabe der Relation $T_x = x$ durchaus nicht ausgeschlossen erscheint.

Wie bereits angeführt, kann nicht ohne weiteres angenommen werden, die Natur werde nach den gleichen Prinzipien weiter «spielen» wie in der Vergangenheit. Es ist durchaus möglich, dass die Intensität der Sterblichkeitsverminderung bald einmal erheblich nachlässt. Jedenfalls gibt es beachtenswerte Gründe, die für eine solche Auffassung sprechen. Wir haben sie in den oben erwähnten Erläuterungen zu den Grundlagen [9] eingehend in Erwägung gezogen. Namentlich die Betrachtung der Sterblichkeitsursachen, wie sie in der Arbeit von Haldy und Taillens [14] durchgeführt wurde, zeigt deutlich, dass wesentliche Änderungen im Verlauf der Sterblichkeit durchaus nicht auszuschliessen sind.

Einfache spieltheoretische Darstellungen

Das Ergebnis von eingehenden und sorgfältigen Untersuchungen über die säkulare Sterblichkeitsänderung zeigt, dass wohl Mutmassungen angestellt werden können, dass es aber zu gewagt wäre, nur auf Grund solcher Beobachtungen endgültige Schlüsse zu ziehen. Je nach der Stellungnahme, die man zu diesen Dingen bezieht, kann man sowohl ein Anhalten der bisherigen Entwicklung als auch eine langsame oder sogar abrupte Änderung als wahrscheinlich dartun. Jedenfalls besteht kein einigermassen gesichertes Wissen, das einen Entscheid in dieser oder jener Richtung bevorzugen liesse. Man kann jedoch mit einiger Begründetheit sagen, dass der «wahre» Verlauf innert gewissen Grenzen liegt, etwa zwischen den Werten, die sich durch ein Anhalten der Sterblichkeitssenkung und durch einen Stillstand derselben ergeben. Innerhalb dieses Spatiums erscheint es ausgeschlossen, die Lücke der bestehenden Ungewissheit hinsichtlich der zu erwartenden Mortalität zu schliessen, ohne den Dingen Zwang anzutun.

Die «verzweifelte» Situation, in der sich damit der Aktuar befindet, gleicht weitgehend derjenigen eines Schachspielers, der mitten in einer Partie wohl gewisse Anhaltspunkte über die Spieltaktik seines Gegners besitzt, insbesondere auch über die bereits erfolgten Züge orientiert ist, aber über die folgenden Züge nichts Bestimmtes aussagen kann. Wie man sich in einer solchen Lage zu verhalten hat, das lehrt die Spieltheorie, weshalb wir nun diese zu Hilfe nehmen.

Wir gehen zunächst von der Annahme aus, die Natur habe nur zwei Wahlmöglichkeiten, nämlich entweder die Strategie $T_x = x$ oder die Strategie $T_x = \infty$ zu befolgen. Das heisst also, dass entweder ein Anhalten der Sterblichkeitsverbesserung oder dann ein Verbleiben auf dem nunmehr erreichten Niveau zu erwarten ist. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich die Problemstellung auf ein 2×2-Strategienspiel. Für den Ausgang eines solchen Spieles gibt es 4 Möglichkeiten, die wir in den vier Feldern des nachstehenden Quadrates eingetragen haben.

Spieler II (Aktuar)

		1	2
Spieler I (Natur)	1	0	V_2
	2	V_1	0

Die Zahlen 1 bzw. 2 am Rande des Quadrates bezeichnen die von der Natur bzw. vom Aktuar zu wählenden Strategien.

Strategie 1 bedeutet die Wahl einer Sterblichkeit nach der Formel $T_x = \infty$,

Strategie 2 dagegen den Entscheid für $T_x = x$.

Wählen beide Spieler die erste Strategie, dann muss der Versicherer keinen Verlust erleiden, da er das Verhalten der Natur richtig erraten hat. Das gleiche tritt ein, wenn beide Spieler sich für die zweite Strategie entscheiden. In beiden Fällen erleidet der Versicherer keinen Schaden, weshalb im ersten und vierten Feld des Quadrates eine Null erscheint. Anders verhält es sich, wenn der Aktuar einem Irrtum verfällt und z. B. Strategie 1 wählt, also ein Verbleiben der Sterblichkeit auf dem erreichten Niveau voraussetzt, während in Wirklichkeit eine weitere Verbesserung gemäss $T_x = x$ (nach Strategie 2) eintritt. Wegen der damit bedingten Unterschätzung der Kosten erleidet der Versicherer einen Verlust, der mit V_1 bezeichnet wurde. – Es verbleibt nun noch, den vierten Fall zu umschreiben, nämlich die Möglichkeit einer Überschätzung der Kosten durch den Aktuar. Seine Tarife wirken sich in diesem Falle prohibitiv aus. Der Versicherer erleidet eine Geschäftseinbusse, während gleichzeitig auch volkswirtschaftlich ein Verlust eintritt, weil weniger Interessenten sich die Vorteile eines Rentenkaufes sichern. Dieser Verlust wurde mit V_2 bezeichnet.

Durch die gegebene Darstellung wird das Spiel infolge der getroffenen Einschränkungen auf eine elementare Gestalt gebracht. Wir haben absichtlich vorerst diesen Weg über eine vereinfachte Beschreibung gewählt, um grössere Klarheit in den Darlegungen dieser vielleicht noch wenig bekannten Aufmachungen zu gewinnen.

Nach der Optimalmethode der Spieltheorie folgt, dass Spieler 2, d. h. also der Aktuar, unter den gegebenen Umständen am vorsichtigsten verfährt, wenn er eine gemischte Strategie anwendet, d. h. die reinen Strategien im Verhältnis V_2 zu V_1 spielt. Oder was auf dasselbe hinauskommt, es ist für den Aktuar am ratsamsten, eine ausgemittelte Tafel zu wählen, so dass die Kosten als interpolierte Werte zwischen der Periodentafel ($T_x = \infty$) und der Generationentafel ($T_x = x$) erscheinen. Die Interpolation hat dabei im Verhältnis V_2 zu V_1 zu erfolgen. Praktisch ergibt sich damit folgendes Verfahren: Bezeichnet man mit z den Grenzzuschlag, der erforderlich ist, um aus der Einmalprämie einer Versicherung, berechnet auf Grund der Periodensterblichkeit ($T_x = \infty$), diejenige nach der Generationensterblichkeit ($T_x = x$) zu erhalten, so besagt das gewonnene Ergebnis, es sei dieser Zuschlag im Verhältnis V_1 zu V_2 in Rechnung zu stellen oder die Werte nach der Periodensterbetafel mit dem Zuschlag $\bar{z}$ zu versehen, wobei

$$\bar{z} = \frac{V_1 z}{V_1 + V_2}, \qquad \bar{z} = w z \qquad \text{zu setzen ist.}$$

Dieses Ergebnis ist bereits sehr interessant. Die Lösung unseres Problems wird damit auf die Feststellung der Verluste V_1 und V_2 zurückgeführt. Bevor wir dieses Resultat besprechen, soll gezeigt werden, dass die gleiche Formel auch noch unter verallgemeinerten Voraussetzungen zu Recht besteht. In Wirklichkeit haben sowohl der Entschlussfasser als auch die Natur nicht nur die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, sondern zwischen unendlich vielen. Jedem der beiden Spielpartner stehen grundsätzlich unzählig viele Strategien zur Verfügung.

Die Natur kann die Sterblichkeit auf unendlich viele Arten festlegen, andererseits kann auch der Aktuar die Sterbetafel nach unendlich vielen Varianten bestimmen. Im Sinne einer vertretbaren Einschränkung wollen wir jedoch annehmen, für die Wahl können nur Fälle in dem durch $T_x = \infty$ und $T_x = x$ abgegrenzten Spatium in Frage kommen. Grundsätzlich könnte sie auch ausserhalb dieses Intervalles fallen. Solche Möglichkeiten sind jedoch nur bei einem ausgesprochenen anormalen Gang der Dinge zu befürchten, d. h. sie können nur bei aussergewöhnlichen Vorkommnissen eintreten, für die der Aktuar nicht zu Recht verantwortlich gemacht werden kann.

Aus unserem 2×2-Strategienspiel ist durch die vorgenommene Erweiterung ein Spiel mit unendlich vielen Strategien für beide Partner entstanden. Solche Spiele sind in der Literatur schon mehrfach eingehend erörtert worden. Sie haben die Eigentümlichkeit, dass bei ihnen der Hauptsatz der Spieltheorie nicht immer erfüllt ist. Indessen ist dies für eine grosse Kategorie doch der Fall, so dass eine Lösung gefunden werden kann.

Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Darstellung wie folgt. Wir gehen aus von einer bestimmten Versicherungskombination und nehmen an, die Ansprüche des Versicherungsnehmers seien in rechtlicher Hinsicht vertraglich genau festgelegt, so dass die Prämienkalkulation nur noch von der Wahl der übrigen Grundlagen, nach Festsetzung des technischen Zinsfusses, also nur noch von der Sterbetafel abhängt. Einfachheitshalber betrachten wir nur die Einmalprämie und bezeichnen sie mit K. Der Wert von K gibt somit das Ergebnis der Kostenberechnung an, die der Aktuar auf Grund der von ihm gewählten a-priori-Sterbetafel kalkuliert hat. Die effektive Höhe der Kosten wird durch die Natur auf Grund der a-posteriori-Sterbetafel bestimmt, wir bezeichnen sie mit K' und betrachten – wie bereits angedeutet – nur den Einfluss der Sterblichkeit. Das Anliegen des Aktuars ist nun, den Wert K so nahe an das unbekannte K' zu bringen, wie nur möglich, weil, wie dargelegt, ein Auseinanderfallen dieser Werte, d. h. eine ungeschickte Wahl von K, zu Verlusten Anlass gibt. Je grösser die Differenz zwischen K und K' wird, um so grösser wird der Schaden. Zu seiner näheren Kennzeichnung führen wir nach dem Vorgehen der Spieltheorie eine Schadenfunktion ein und bezeichnen sie mit $S(K, K')$. Fällt die Kostenberechnung K mit K' zusammen, so erleidet der Versicherer keinen Verlust, und es ist infolgedessen $S(K, K') = 0$ für $K = K'$. In allen anderen Fällen also, sowohl für $K > K'$ als auch für $K < K'$, ist $S(K, K') > 0$. Die optimale Strategie des Aktuars wird durch den Wert: $S_0 = \min\limits_{K} \max\limits_{K'} S(K, K')$ festgelegt.

Für die Berechnung von S_0 muss jedoch die Schadenfunktion näher determiniert werden. Ein geeigneter einfacher Vorschlag ist folgender Ansatz:

$$S(K, K') = \alpha\,(K' - K) \text{ für } K' > K \quad \text{und}$$
$$S(K, K') = \beta\,(K - K') \text{ für } K' < K.$$

α und β sind dabei zwei positive Konstanten. Durch sie werden die beiden Halbmonotonie-Bedingungen der Funktion $S(K, K')$ erfüllt. Bezeichnet man weiter mit K_1 die Kosten, errechnet nach der Periodensterbetafel ($T_x = \infty$) und diejenigen nach der Generationensterbetafel ($T_x = x$) mit K_2, so erhält man die optimale Strategie

$$S_0 = \min_{K} \max_{K'} S(K, K') \text{ mit } K = \frac{\alpha K_2 + \beta K_1}{\alpha + \beta}.$$

Nach den oben getroffenen Festsetzungen ist nun aber

$$\frac{K_2}{K_1} = 1 + z \quad \text{und} \quad \frac{K}{K_1} = 1 + \bar{z}.$$

Ferner erhält man:

$$S(K_1; K_2) = \alpha(K_2 - K_1) = V_1 \quad \text{und}$$
$$S(K_2; K_1) = \beta(K_2 - K_1) = V_2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte im Ausdruck für K ergibt sich:

$$\bar{z} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\, z \quad \text{bzw.} \quad \bar{z} = wz.$$

Man erhält also für $\bar{z}$ den gleichen Ausdruck wie unter den einschränkenden Voraussetzungen des 2×2-Strategienspieles.

Wie in der Spieltheorie vielfach festgestellt werden kann, tritt der Fall, wonach verschiedene Spieldispositionen zu denselben Ergebnissen führen, d. h. den Spielern dasselbe strategische Verhalten nahelegen, nicht selten auf. Betrachtungen über solche Fälle sind von Kemeny and Thompson [15] angestellt worden. Insbesondere werden unter Hinweis auf das Versicherungsspiel Auszahlungsfunktionen, die keinen Einfluss auf die optimalen Strategien der Spieler nehmen, untersucht. Es folgt daraus, dass eine adäquate Festlegung der Schadenfunktion im allgemeinen Aussicht hat, zu zuverlässigen Ergebnissen zu führen.

Im vorliegenden Fall wird man nach beiden Verfahren auf die Beziehung $\bar{z} = w\,z$ geführt. Diese hat den Vorzug, dass sie einen einfachen Zusammenhang aufzeigt. Die Grösse w hängt nur von V_1 und V_2 ab, also von den Extremwerten der Verluste, die eintreten, wenn der Aktuar und die Natur gerade die beiden äusserst entgegengesetzten Strategien gegeneinander spielen. Während die Berechnung von V_1 keine Schwierigkeiten bietet, kann das hinsichtlich der Bewertung von V_2 nicht gesagt werden. V_1 bedeutet den Schaden, der dem Versicherer durch eine Unterschätzung der Kosten erwächst, und kann in Geldeinheiten ausgedrückt werden, was beim Schaden V_2 nicht unmittelbar der Fall ist. Bei diesem letzten tritt primär sogar ein Gewinn in Erscheinung. Dadurch, dass der Versicherer eine übersetzte Prämie verlangt, werden seine Einnahmen grösser als die Ausgaben, so dass, oberflächlich gesehen, ein Überschuss resultiert. Dies ist indessen nur scheinbar so. Wie bereits dargelegt, entsteht dem Versicherer durch das Ansetzen von prohibitiv wirkenden Tarifen eine Geschäftseinbusse, und dazu tritt gleichzeitig ein volkswirtschaftlicher Schaden, weil die betreffende Versicherungsart nicht die Verbreitung erfährt, die ihr eigentlich zukommen sollte. Es dürfte aber nicht leicht sein, diesen volkswirtschaftlichen Schaden zu bemessen. Jedenfalls ist er zweifellos vorhanden und darf nicht unterschätzt werden. Auf Grund von eingehenden Überlegungen, die hier nicht weiter erörtert werden sollen, gelangt man zum Schlusse, dass V_1 höher zu bewerten ist als V_2, weil der Eintritt von V_1 einen grösseren und empfindlicheren Schaden verursacht und zu Kürzungen der Rentenleistungen an erwerbsunfähige Personen zwingt.

Unsere bisherigen Ergebnisse zeigen, dass durch die Spieltheorie die Aufmerksamkeit des Forschers unmittelbar auf die wesentlichen Grössen, die für die Beurteilung des vorliegenden Problems in Betracht fallen, gelenkt wird. Das ist zweifellos ein beachtenswertes Resultat. Unbefriedigt bleibt jedoch die Tatsache, dass nach dem bisherigen Verfahren unmittelbar keine numerischen Werte gewonnen werden.

Einführung einer Nutzenfunktion

Dieser letzte Mangel kann nun durch Einführung einer geeigneten Nutzenfunktion weitgehend behoben werden.

Wir bezeichnen mit L die Leistungen, die der Versicherer auf Grund der vertraglichen Bestimmungen und nach den von ihm gewählten

Grundlagen verspricht. L bedeutet z. B. eine Altersrente, zahlbar vom 65. Altersjahr an. Sind A die verfügbaren Mittel und ist K die vom Versicherer pro Einheit vorgesehene Einmalprämie, so gilt $L = \frac{A}{K}$. Die tatsächlichen Leistungen, die auf Grund der von der Natur vorgeschriebenen Sterblichkeit gewährt werden können, stellen sich demnach auf $L' = \frac{A}{K'}$. Insbesondere sind $L_1 = \frac{A}{K_1}$ und $L_2 = \frac{A}{K_2}$ die Leistungen, die sich bei Anwendung der Periodensterbetafel ($T_x = \infty$) bzw. der Generationensterbetafel ($T_x = x$) ergeben.

Gestützt auf diese Festlegungen führen wir nun – zunächst in unbestimmter Form – eine Nutzenfunktion $\nu(L)$ ein. $\nu(L)$ soll den Nutzen, der dem Versicherungsnehmer aus dem Kauf einer Rentenversicherung erwächst, angeben. (Eine einlässliche Analyse des Begriffes Nutzen findet man im ersten Teil des Standardwerkes von Neumann und Morgenthal über Spieltheorie [16].) Wir wollen zeigen, wie man mit Hilfe von $\nu(L)$ den Schaden berechnen kann, der aus einer Fehlfinanzierung entsteht. Wir fassen die Verhältnisse bei Personalfürsorgestiftungen ins Auge und nehmen an, dass diese auf Grund ihrer Reglemente die Versicherungsleistungen durch Kürzung oder Erhöhung derselben den verfügbaren Mitteln anpassen.

Müssen die in Aussicht gestellten Altersrenten infolge einer Unterbewertung der Kosten herabgesetzt werden und betragen sie statt L nur L', so erleidet der Versicherungsnehmer eine Einbusse im Nutzen, die durch $S(L, L') = \nu(L) - \nu(L')$ ausgedrückt wird.

Schwieriger gestaltet sich die Abschätzung des Schadens bei einer Überfinanzierung, also bei $L' > L$. In diesem Falle können nachträglich höhere Leistungen gewährt werden, als die Stifterin als angemessen betrachtet hatte. Es muss zumindest von einer unbeabsichtigten Verwendung der verfügbaren Mittel gesprochen werden. Die überschüssigen Mittel wären zweckmässiger anderweitig eingesetzt worden. Ist doch die Aufgabe eines gut geführten Betriebes und, allgemein gesehen, einer Volkswirtschaft, die verfügbaren Einnahmen rationell zu verteilen und sie so zu verwenden, dass der resultierende Nutzen nach den einzelnen Sparten möglichst ausgeglichen wird. Ein solcher Idealzustand kann zwar zugegebenermassen in Wirklichkeit nicht restlos realisiert werden. Das hindert aber nicht – rein fiktiv – von einer solchen idealen Ordnung auszugehen, um daraus die anzustrebenden Verhaltungsmassnahmen kennenzulernen. In dieser Möglichkeit der Deduktion offenbart sich ja der Vorzug der mathematischen Methode. Auf Grund dieser Vorstellung kann für die Schadenfunktion $S(L, L')$ im Falle $L' > L$ folgender Ausdruck gefunden werden. Infolge der durch die Überbewertung der Kosten sich ergebenden Gewinne können dem Versicherten die Leistungen L' ausgerichtet werden, statt bloss die Leistungen L, daraus resultiert zunächst für diesen eine Erhöhung des Nutzens von $\nu(L') - \nu(L)$. Aus den zur Finanzierung der Differenzleistungen $L' - L$ entstandenen überschüssigen Mitteln hätte jedoch im Idealfall durch anderweitige bessere Verwendung ein grösserer Nutzen erzielt werden können, der mit

$$\nu(L) - \nu\{L - (L' - L)\} = \nu(L) - \nu(2L - L')$$

eingeschätzt werden kann. Diese zweite Differenz ist unter der praktisch zutreffenden Voraussetzung, dass $\nu(L)$ eine monoton immer schwächer wachsende Funktion ist, grösser als $\nu(L') - \nu(L)$, so dass der gesuchte Verlust sich aus der Differenz dieser Differenzen mit:

$$S(L, L') = 2\nu(L) - \nu(2L - L') - \nu(L') \qquad \text{ergibt.}$$

Da die Schadenfunktion $S(L, L')$ sowohl für $L > L'$ als auch für $L < L'$ monoton wachsend verläuft, folgt, dass die gesuchte beste Strategie aus der Minimax-Gleichung

$$\nu(L) + \nu(L_2) - \nu(2L - L_1) - \nu(L_1) = 0$$

ermittelt werden kann. Durch Auflösung derselben nach der Unbekannten L erhält man die Lösung der Aufgabe.

Wir haben unsere bisherige Darstellung abstrakt gehalten, um damit auch allgemeingültige Ergebnisse zu gewinnen. Dies war insoweit möglich, als es gelungen ist, eine Minimax-Gleichung für die Bestimmung von L herzuleiten, ohne dass die Nutzenfunktion näher festgelegt werden musste. Bekanntlich bietet die Determinierung der Nutzenfunktion mitunter erhebliche Schwierigkeiten, weil man für ihre Festlegung meistens nur vage Anhaltspunkte besitzt. Wie wir aber bereits ausgeführt haben, dürften plausible Annahmen für eine allgemeine Orientierung – und um eine solche handelt es sich hier – bereits genügen.

Der nächste und letzte Schritt unserer Aufgabe besteht demnach darin, einen möglichst zutreffenden Ansatz für die Festlegung der

Nutzenfunktion zu finden. Wir erinnern daran, dass in einem andern Zusammenhang [10] gezeigt werden konnte, dass die Funktion

$$\nu(L) = \ln\left(1 + \bar{e} \cdot \frac{L}{B}\right)$$

im allgemeinen den Belangen der Versicherung zu genügen vermag. Im aufgeführten Ausdruck bedeutet $e = 1 + \bar{e}$ die Basis der natürlichen Logarithmen und B den Bedarf eines Individuums an Versicherungsschutz. Bei einer Rentenversicherung ist B von der Grössenordnung des notwendigen Aufwandes des Versicherten für den Lebensunterhalt, also auch abhängig vom Lebensstandard, das entspricht der Tatsache, dass der Nutzen grundsätzlich eine individuelle Grösse ist, eine Feststellung, auf die Neumann und Morgenstern mit Nachdruck hingewiesen haben. – Man könnte befürchten, dass durch das Auftreten einer solchen Grösse in unseren Formeln unüberwindliche Schwierigkeiten entstehen. Wie es sich nachfolgend herausstellt, ist das glücklicherweise jedoch nicht der Fall.

Die Ergebnisse

Durch Einsetzen des angeführten Ausdruckes für $\nu(L)$ in die Minimax-Gleichung erhält man für L folgenden Wert:

$$L = \frac{B L_2 + \bar{e} L_1^2}{B + \bar{e}(2 L_1 - L_2)} .$$

Entsprechend unserer Bemerkung über die Bedeutung von B lassen wir diese Grösse noch unbestimmt, machen jedoch die Substitution $B = \lambda L_1$. Beachtet man ferner, dass nach unseren früheren Festsetzungen: $L_1 : L_2 = l + z$ und $L_1 : L = l + \bar{z}$ ist, so erhält man nach einigen Umformungen die einfache Relation

$$\bar{z} = \frac{\gamma z}{\gamma + z}, \qquad \text{wobei} \qquad \gamma = 1 + \frac{\lambda}{\bar{e}} \qquad \text{ist.}$$

Es zeigt sich somit, dass der auf die nach der Periodensterbetafel berechneten Kosten zu erhebende Zuschlag $\bar{z}$ in einfacher Weise vom Grenzzuschlag z und von γ abhängt. Einen noch anschaulicheren Ausdruck erhält man für die zulässige Reduktion von z, also für den Ausdruck

$$r z = z - \bar{z}, \qquad \text{nämlich} \qquad r = \frac{z}{\gamma + z} .$$

Hieraus wird ersichtlich, dass r mit z ansteigt. Praktisch heisst das, dass sich bei einem grossen Unsicherheitsspatium eine grössere Verminderung des Zuschlages rechtfertigen lässt als bei einem kleineren.

Es verbleibt noch die Abhängigkeit von r von der unbestimmt gelassenen Grösse λ erkenntlich zu machen. Aus $B = \lambda L_1$ folgt, dass λ das Verhältnis des Bedarfes zu den Leistungen angibt, die auf Grund der Periodensterbetafel und nach Massgabe der vorhandenen finanziellen Mittel zugesichert werden können. Im allgemeinen erlauben diese Mittel, den Bedarf weitgehend zu decken, so dass λ in der Nähe der Einheit liegt. Ist dagegen der Bedarf sehr klein, so erhält man im Grenzfall (für $\lambda = 0$) die Relation $r = \dfrac{z}{1+z}$. Ist der Bedarf im Verhältnis zu L_1 gross, so wird im Grenzfall (für $\lambda = \infty$) $r = 0$ bzw. $z = \bar{z}$. Dieser letztere Fall dürfte angenähert bei Personalversicherungen vorliegen, die aus finanziellen Gründen nur sehr bescheidene Leistungen ($L_1 \to 0$) vorsehen können. Spieltheoretisch ist in solchen Fällen zu empfehlen, den Grenzzuschlag nur leicht zu kürzen, damit die vorgesehenen bescheidenen Leistungen womöglich ungekürzt ausgerichtet werden können. Auch dieses Resultat erscheint plausibel und bestätigt die Richtigkeit der Darstellung.

Im allgemeinen und im grossen Durchschnitt wird man annehmen können, dass λ zwischen 1 und 2 liegt. Andererseits zeigt es sich, dass der Grenzzuschlag je nach Versicherungskombination etwa bis $z = 0{,}30$, also bis 30 % ansteigen kann. Innerhalb dieses für den praktischen Gebrauch massgebenden Gebietes variiert die zulässige Reduktion r mit λ nur schwach. Dies ist aus der nachstehenden Aufstellung genauer ersichtlich:

	$\bar{z}$	$\bar{z}$	r in Prozenten	
z	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$
0,1	0,094	0,096	6	4
0,2	0,178	0,183	11	8
0,3	0,252	0,263	16	12

Es zeigt sich also, dass die oben eingeführte Nutzenfunktion als strategisch-quasi-invariant bezeichnet werden kann. Dieser Eigenschaft ist es zu verdanken, dass das vorgelegte, auf schwer erfassbarer Grundlage beruhende Problem doch einer Lösung zugeführt werden kann.

Das erhaltene Resultat erlaubt, die nach den Grundsätzen der Spieltheorie erforderlichen Umwandlungszuschläge für den Übergang von den nach der Periodensterbetafel ($T_x = \infty$) berechneten Barwerte zu den strategisch bestmöglichen Werten wenigstens der Grössenordnung nach abzuschätzen. Das genügt, praktisch gesehen, vollkommen, denn bei solchen schwer zu beurteilenden Problemen reichen allgemeine Richtlinien aus, und es wäre unvernünftig, auf eine überspitzte Genauigkeit abstellen zu wollen.

Zum besseren Verständnis sei noch ein Beispiel angeführt:

Der Barwert einer Altersrente, beginnend mit dem 65. Altersjahr, für einen 50jährigen Mann beträgt

nach der Periodensterbetafel VZ 1960 / 3 % Zins. . . . ${}_{n|}\ddot{a}_x = 6{,}061$

nach der Generationensterbetafel ($T_x = x$) dagegen . . ${}_{n|}\ddot{a}_{\underline{x}} = 6{,}749$

Der Grenzzuschlag wird somit. . . . . $z = 0{,}114$

Hieraus ergibt sich für $\lambda = 1$ $\bar{z} = 0{,}106$, effektiv wurde ein Umwandlungszuschlag von 10,5 % in Rechnung gestellt.

Die Festsetzung der Umwandlungszuschläge

Bei der Festsetzung der Tarifansätze nach den neuen Grundlagen VZ 1960 wurde Wert darauf gelegt, ein möglichst übersichtliches Zuschlagssystem zu erhalten, damit sich der Aktuar jeweils über die vorgenommenen Erhöhungen leicht Rechenschaft geben kann. Das hat zur Folge, dass die effektiv eingerechneten Umwandlungszuschläge nicht genau, aber doch weitgehend dem durch die Spieltheorie gegebenen Zuschlagsniveau entspricht. Wie Zwinggi in seinem Lehrbuch der Versicherungsmathematik [17] ausführt, lässt es sich verantworten, «für die Extrapolation der Sterbenswahrscheinlichkeiten den Grad der Genauigkeit herabzumindern, zugunsten einer möglichst einfachen praktischen Handhabung der Ergebnisse; diese Auffassung ist berechtigt, denn das Resultat jeder Vorausberechnung der Sterblichkeit wird in verhältnismässig grossen Bereichen schwanken».

In Übereinstimmung mit dieser Feststellung muss auch die Frage, ob durch das beschriebene Verfahren Gewähr für einen garantiert verlustfreien Geschäftsablauf geboten wird, verneint werden. Ebensowenig wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vermag auch die Spieltheorie die Zukunft nicht aufzudecken, sie vermag aber Verhaltungsregeln an die Hand zu geben, die nach aller Voraussicht auf Grund einer eingehenden bestmöglichst fundierten Analyse anempfohlen werden können. Angesichts der Schwierigkeiten und der Tragweite der Aufgabe sind solche Möglichkeiten beachtenswert.

Literatur

[1] *Bellmann Richard*, Dynamic Programming. Princeton Uni. Press 1957.

[2] *Jecklin Heinrich*, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen. Bd. 41, Heft 1, dieser Mitteilungen.

[3] *Luce and Raiffa*, Games and Decisions. John Wiley & Sons, 1957.

[4] *Williams J. D.*, The complet Strategyst. Mc. Graw-Hill Bock Company, Inc. New York 1954.

[5] *Bierlein D.*, Optimalmethoden für die Summenaproximation in Jecklins F-Methode. Bl. d. D. G. für Vers.-Math. Bd. II, Heft 3.

[6] *Bierlein D.*, Spieltheoretische Modelle für Entscheidungssituationen des Versicherers. Bl. d. D. G. für Vers.-Math. Bd. III, Heft 4.

[7] *Borges R.*, Nicht-cooperative Spiele mit nicht-linearen Auszahlungsfunktionen. Bl. d. D. G. für Vers.-Math. Bd. III, Heft 4.

[8] *Nolfi P.*, Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen, VZ 1950, Versicherungskasse der Stadt Zürich.

[9] *Nolfi P.*, Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen, VZ 1960, Versicherungskasse der Stadt Zürich.

[10] *Nolfi P.*, Zur mathematischen Darstellung des Nutzens in der Versicherung. Bd. 55, Heft 3, dieser Mitteilungen.

[11] *Rueff F.*, Ableitung von Sterbetafeln für die Rentenversicherung und anderer Versicherungen mit Erlebensfallcharakter. Konrad Triltsch Verlag 1955.

[12] *Jekins and Lew*, A New Mortality Basis for Annuities Tasa I, 1949.

[13] *Wünsche G.*, Invaliditätsversicherung und säkulare Sterblichkeitsänderung. XV. Int. Congress of Actuaries, Vol. II.

[14] *Haldy und Taillens*, Limites dans l'évolution de la mortalité. Bd. 56, Heft 1, dieser Mitteilungen.

[15] *Kemeny and Thompson*, The Effect of Psychological Attitudes on the Outcomes of Games. Annals of Mathematics Studies Nr. 39.

[16] *von Neumann and Morgenstern*, Theorie of Games and Economic Behavior. Princeton 1953.

[17] *Zwinggi Ernst*, Versicherungsmathematik. Birkhäuserverlag Basel 1958.

Résumé

L'auteur démontre comment le problème de la mortalité décroissante dans l'assurance de rentes peut être résolu au moyen de la «Théorie des Jeux». La méthode est ensuite appliquée aux «Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen VZ 1960» (Bases techniques pour assurances de pension de la ville de Zurich).

Riassunto

L'autore dimostra come può essere risolto il problema della mortalità decrescente per mezzo della «Teoria dei Giochi». Il metodo è poi applicato alle «Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen VZ 1960» (Basi tecniche per assicurazione pensioni della città di Zurigo).

Summary

The author shows how in annuity assurance the improvement of the mortality can be taken into account by applying the «Theory of Games». The method is applied for the «Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen VZ 1960» (Technical bases for pension plans of the Town of Zurich).