Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 59 (1959)

Artikel: Kleine Bemerkung zu einer Funktionalgleichung der Prämienreserve

Autor: Rufener, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966808

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 21.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Kleine Bemerkung zu einer Funktionalgleichung der Prämienreserve

Von Ernst Rufener, Zürich

Zusammenfassung

Für die kontinuierlich definierte Prämienreserve $V(t,x,n)$ einer hinreichend allgemeinen Versicherungsform wird das Bestehen der Relation

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = - \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t=0} \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

gezeigt und in der widerspruchsfreien Herleitung der Reservefunktion für das Jecklinsche Reservemodell auf eine Anwendungsmöglichkeit dieser Funktionalgleichung hingewiesen.

1. Herleitung der Funktionalgleichung

Die kontinuierlich definierte Prämienreserve $V(t,x,n)$, $(0 \leqq t \leqq n$, $0 \leqq x \leqq \omega < \infty$, $0 < n \leqq \infty)$ einer auf die Summe 1 abgeschlossenen allgemeinen Versicherungsform, werde in den Variablen t, x und n hinreichend regulär vorausgesetzt. Die in ihrer Definitionsgleichung

$$V(t,x,n) = A(x+t, n-t) - P(x,n)\, a(x+t, n-t) \tag{1}$$

auftretenden Variablen und Funktionen haben konventionelle Bedeutung, nämlich

t die abgelaufene Versicherungsdauer seit Vertragsabschluss,
x das Eintrittsalter bei Versicherungsbeginn,
n die Versicherungsdauer (Prämienzahlungsdauer),
A die Einmalprämie der betrachteten Versicherungsform (Versicherungssumme 1),
P die bis Vertragsende kontinuierlich zu entrichtende Prämie,
a $[a(x,n) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}]$ der Barwert der kontinuierlichen temporären Leibrente.

Da Missverständnisse ausgeschlossen sind, lassen wir der besseren Lesbarkeit wegen die bei kontinuierlicher Darstellung über die Symbole gesetzten Querstriche weg.

Für die durch (1) definierte Prämienreserve werde nun eine Funktionalgleichung hergeleitet, in welcher die Grössen A und P nicht mehr auftreten und die einen Zusammenhang mit dem durch (t, x, n) bestimmten Deckungskapital der gemischten Versicherung herzustellen vermag. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die beiden Vektoren $\left(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial n}\right)$ und $(1, -1, 1)$ skalar und ersetzen in ihrem Produkt

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial n}\right) a(x+t, n-t) \tag{2}$$

die rechte Seite mittels

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{t=0} = [V_t]_0 = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial n}\right) a(x,n)\,. \tag{3}$$

(3) ist dabei unter Berücksichtigung der sich aus

$$A(x,n) = P(x,n)\, a(x,n)$$

ergebenden Beziehung

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial n} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial n}\right) P(x,n) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial n}\right) a(x,n)$$

der Relation

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{t=0} = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial n} - \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial n}\right) P(x,n)$$

entnommen. Die Prämienreserve der betrachteten allgemeinen Versicherungsform erfüllt somit die Funktionalgleichung

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = -[V_t]_0 \frac{a(x+t, n-t)}{a(x,n)}} \tag{4}$$

Da das Deckungskapital der gemischten Versicherung durch

$$V^*(t,x,n) = 1 - \frac{a(x+t, n-t)}{a(x,n)}$$

bestimmt wird, vermittelt (4) einen Zusammenhang zwischen den

Reserven einer beliebigen Versicherungsform und einer zu gleichen x und n gehörenden gemischten «Ersatzversicherung»:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = -[V_t]_0 [1 - V^*(t,x,n)]. \tag{5}$$

Für eine *gemischte Versicherung* mit Prämienzahlung bis zum Schlussalter gilt insbesondere

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} - \frac{\partial V^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial n} = -[V_t^*]_0 (1 - V^*), \tag{6}$$

eine Relation, welche auf die Komplementärfunktion

$$\Psi(t,x,n) = 1 - V^*(t,x,n)$$

übertragen wird:

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial n} = [\Psi_t]_0 \Psi} \tag{6'}$$

Die hergeleitete Funktionalbeziehung wird zweckmässig zur Bearbeitung von Fragen, die dem Problemkreis «Reserve und Sterblichkeit» angehören, also mit dem Inversionsproblem der Reservetheorie verknüpft sind, herangezogen. Sie stellt für Funktionen in drei Variablen eine notwendige Bedingung dafür dar, dass diese den Verlauf eines Deckungskapitales darzustellen vermögen. Im folgenden benutzen wir (6′) zur Definition einer «widerspruchsfreien» Reservefunktion im erweiterten *Jecklinschen* Reservemodell. Eine in $0 \leqq t \leqq n$, $0 \leqq x \leqq \omega < \infty$, $0 < n \leqq \infty$ gegebene Funktion der Variablen t, x und n wird dabei als widerspruchsfreie Reserve- oder Komplementärfunktion bezeichnet, wenn ein Sterbegesetz angebbar ist, welches vermöge (1) die gegebene Funktion erzeugt. Aus widerspruchsfreien Funktionen $V(t,x,n)$ oder $\Psi(t,x,n)$ lässt sich das erzeugende Sterbegesetz mittels zweier Differentiationen ermitteln [3].

2. Anwendung der Funktionalgleichung zur widerspruchsfreien Definition des Deckungskapitals im erweiterten Jecklinschen Reservemodell

In dem von *Jecklin* und *Strickler* begründeten Modell der φ-Methode [1], [2] wird das Deckungskapital einer bis zum Schlussalter prämienzahlenden gemischten Ersatzversicherung in Funktion von t durch den Bogen einer Hyperbel mit einer vertikalen Asymptote ersetzt.

Wir lösen die Aufgabe, unter den durch die beiden Fixpunkte (0,0) und $(n,1)$ gehenden Hyperbeln diejenigen auszuwählen und analytisch darzustellen, welche sich aus einer erzeugenden Überlebensordnung herleiten lassen. Zur Vereinfachung setzen wir an Stelle der Reserve die Komplementärhyperbel $\Psi(t,x,n)$, von der eine Asymptote als vertikal vorausgesetzt wird.

Um in der allgemeinen Kegelschnittsgleichung

$$F(\xi,\eta) = a\xi^2 + 2b\,\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f = 0\,, \tag{7}$$

in welcher ξ mit t, η mit Ψ zu identifizieren sind, die Koeffizienten zu bestimmen, beachten wir, dass die Punkte (0,1) und $(n,0)$ auf (7) liegen; neben der vertikalen Asymptote $\xi = C(x,n)$, $\left(\frac{1}{m_1} = 0\right)$ kann daher noch der Richtungskoeffizient $m_2 = L(x,n)$ für die andere Asymptote vorgegeben werden.

Nach Normierung von a zu $a = 1$ werden die Koeffizienten von (7) zufolge

$$F(0,1) = 0\,,\quad F(n,0) = 0\,;\quad \frac{1}{m_1} = 0\,,\quad m_2 = L(x,n)\,;$$

$$\frac{\partial F(\xi_0,\eta_0)}{\partial \eta} = 0\,,\quad \xi_0 = C(x,n) > 0$$

durch das lineare System mit von Null verschiedener Determinante $\Delta = n \neq 0$ $(n > 0)$

$$\begin{aligned} c \quad + e + f &= 0 \\ nd \quad + f &= -n^2 \\ c \qquad\quad &= 0 \\ 2b \qquad\quad &= -\frac{1}{L} \\ 2Cb \quad + e \quad &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig zu

$$b = -\frac{1}{2L}\,,\quad c = 0\,,\quad d = \frac{C}{nL} - n\,,\quad e = \frac{C}{L}\,,\quad f = -\frac{C}{L}$$

bestimmt, so dass

$$(7) \qquad L\xi^2 - \xi\eta + \left(\frac{C}{n} - Ln\right)\xi + C\eta - C = 0\,,$$

mithin für die Komplementärhyperbel

$$(t-C)\,\Psi = Lt^2 + \left(\frac{C}{n} - Ln\right)t - C \tag{8}$$

oder die explizite Gleichung

$$\Psi = \frac{Lt^2 + \left(\frac{C}{n} - Ln\right)t - C}{t-C}, \tag{8'}$$

wobei $\Psi = \Psi(t,x,n)$, $C = C(x,n)$ und $L = L(x,n)$, folgt.

$\Psi(t,x,n)$ hat der Funktionalgleichung (6′) zu genügen; durch Einsetzen von (8) in (6′) erhält man

$$t(t-n)\left[\frac{\partial L}{\partial n} - \frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{n}\right)L - \frac{nL^2}{C}\right] =$$

$$= \left(\Psi - 1 + \frac{t}{n}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial x} + 1\right) + \left(\Psi + \frac{t}{n}\right)\frac{\partial C}{\partial n}. \tag{9}$$

Falls

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial C}{\partial n} = 0,$$

d.h.

$$C(x,n) = \gamma - x, \tag{10}$$

ist (9) eine partielle nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $L(x,n)$:

$$-\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial n} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{n}\right)L + \frac{n}{C}L^2.$$

Durch Integration des ihr zugeordneten charakteristischen Systems

$$\dot{x} = -1, \qquad \dot{n} = 1, \qquad \dot{L} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{n}\right)L + \frac{n}{C}L^2$$

gewinnen wir das Liesche Integral

$$L(x,n) = \frac{C}{-n^2 + n\,\Phi(x+n)} = \frac{\gamma - x}{-n^2 + n\,\Phi(x+n)}. \tag{11}$$

Die in (11) eingehende unbestimmte Funktion $\Phi(x+n)$ sei hinreichend regulär; sie lässt sich dadurch bestimmen, dass sich die zu

$$(t-C)\,\Psi = \frac{Ct^2}{n(\Phi - n)} + \left(\frac{C}{n} - \frac{C}{\Phi - n}\right)t - C, \tag{8''}$$

$C = \gamma - x$, $\Phi = \Phi(x+n)$ gehörende erzeugende diskontierte Überlebensordnung $f(x)$ durch zwei verschiedene Formeln ausdrücken lässt.

Stützen wir uns auf die in [3] mitgeteilte Beziehung [1])

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} = \frac{\partial \Omega(x,n)}{\partial n} \quad \text{mit} \quad \Omega(x,n) = -\left[\frac{\partial \Psi(t,x,n)}{\partial t}\right]^{-1}_{t=n},$$

so folgt aus (8″) zunächst

$$\Omega(x,n) = \frac{n(C-n)(\Phi-n)}{C\Phi},$$

hieraus

$$C\frac{\partial \Omega}{\partial n} = C - 2n - n(2C-3n)\frac{1}{\Phi} + n^2(C-n)\frac{\Phi'}{\Phi^2} = C\frac{f(x+n)}{f(x)}, \tag{12}$$

mithin,

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{\Phi(\xi)} \tag{13}$$

gesetzt, für das erzeugende Sterbegesetz

$$f(x) = \frac{f(0)}{\gamma}\left[\gamma - 2x - x(2\gamma - 3x)\,\Delta(x) - x^2(\gamma - x)\,\Delta'(x)\right]. \tag{14}$$

Leitet man jedoch (12) nach n ab und geht zur Grenze $n = 0$ über, so lässt sich die diskontierte Überlebensordnung mittels

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{C}\left[1 + \frac{C}{\Phi(x)}\right] = -2\left[\frac{1}{\gamma - x} + \Delta(x)\right]$$

durch

$$f(x) = \frac{f(0)}{\gamma^2}(\gamma - x)^2\, e^{-2\int_0^x \Delta(\xi)\,d\xi} \tag{15}$$

darstellen. Durch Gleichsetzen von (13) und (14) gewinnt man für $\Delta(x)$ die Bestimmungsgleichung

$$\gamma - 2x - x(2\gamma - 3x)\,\Delta(x) - x^2(\gamma - x)\,\Delta'(x) = \frac{1}{\gamma}(\gamma - x)^2\, e^{-2\int_0^x \Delta(\xi)\,d\xi}, \tag{16}$$

die vermöge der Substitution

$$y(x) = -x^2(\gamma - x)\,\Delta(x) \tag{17}$$

in

$$y' - 2x + \gamma = \frac{1}{\gamma}(\gamma - x)^2\, e^{-2\int_0^x \Delta(\xi)\,d\xi} \tag{18}$$

übergeht.

---

[1]) Formeln 5 und 6.

Das Exponentialintegral wird zwischen (18) und der durch Ableiten daraus hervorgehenden Relation

$$\gamma x^2(y''-2) = 2(\gamma-x)(y-x^2)\, e^{-2\int_0^x \Delta(\xi)\, d\xi}$$

eliminiert. Man erhält für $y(x)$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\gamma-x)\, x^2 y'' + 2(x^2-y)\, y' - 2(\gamma-2x)\, y - 2x^3 = 0\,. \qquad (19)$$

Der Potenzansatz $\qquad y = \lambda x^m$

führt zum partikulären Integral

$$y_0(x) = \tfrac{1}{2} x^2,\ ^{1)}$$

damit zu den Funktionen

$$(17),\ (13) \qquad \Delta(x) = -\frac{1}{2(\gamma-x)}, \qquad \Phi(x) = -2(\gamma-x),$$

$$(11) \qquad L(x,n) = -\frac{1}{n}\,\frac{\gamma-x}{n-2(\gamma-x)},$$

$$(8'') \qquad \Psi(t,x,n) = \frac{n-t}{n}\,\frac{\gamma-x}{\gamma-x-t}\,\frac{2(\gamma-x)-n-t}{2(\gamma-x)-n}$$

und nach (14) oder (15) zur Moivreschen Überlebensordnung

$$f(x) = \frac{f(0)}{\gamma}(\gamma-x)$$

mit Höchstalter γ als erzeugendem Sterbegesetz.

Literaturverzeichnis

(1) *H. Jecklin* und *P. Strickler:* «Eine Variante zur F-Methode der Reserveberechnung», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 54, Heft 1, 1954.

(2) *P. Strickler:* «Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der φ-Methode», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 54, Heft 2, 1954.

(3) *E. Rufener:* «Sterbegesetze mit vorgegebenem Reserveverlauf», Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band IV, Heft 1, 1958.

---

[1]) Falls $m = 2\mu$ aus $(m-2)(m+1) = 0$ und $(\lambda m-1)(\lambda-1) = 0$.

Résumé

L'auteur prouve l'existence de la relation

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = - \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t=0} \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

pour la réserve mathématique $V(t,x,n)$, définie selon la méthode continue, d'une forme d'assurance suffisamment générale; il montre que par l'application de cette équation fonctionnelle, on peut déduire sans contredit la fonction de réserve introduite dans le modèle des courbes de réserves hyperboliques de Jecklin.

Riassunto

Per una forma assicurativa sufficentemente generale, si dimostra che la riserva continua $V(t,x,n)$ ubbidisce alla relazione

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = - \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t=0} \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} .$$

Applicando questa equazione funzionale, si trova una deduzione esente di contradizioni per la rappresentazione della riserva secondo il metodo di Jecklin.

Summary

For the premium reserve $V(t,x,n)$ in continuous representation in respect of a sufficiently general type of assurance, the relation

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial n} = - \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t=0} \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

is shown to hold true; one opportunity to make use of this functional equation consists in a deduction of the hyperbolic reserve function of Jecklin's reserve model which can thus be proved to be free of contradiction.