Beitrag zum Problem der sinkenden Übersterblichkeit

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966807

Beitrag zum Problem der sinkenden Übersterblichkeit

Von *H. Jecklin*, Zürich

Die in der Praxis für die technische Behandlung erhöhter Risiken hauptsächlich verwendete Arbeitshypothese ist bekanntlich jene der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit. Ist α der Übersterblichkeitssatz, so ist dann die rechnungsmässige Sterblichkeit des erhöhten Risikos

$$q_x' = (1+\alpha)\, q_x, \tag{I}$$

worin q_x der normale Sterblichkeitssatz. Im übrigen sei auf das Lehrbuch der Versicherungsmathematik von W. Saxer, Bd. 2, verwiesen [1]).

In einer in diesen «Mitteilungen» erschienenen Arbeit von Sachs, Staniszewsky und Röper [2]) wird die Ansicht verfochten, dass die Arbeitshypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit den wirklichen Sterblichkeitsverhältnissen bei den erhöhten Risiken nicht gerecht werden kann. Ausgehend von der Annahme, dass die herkömmliche Auffassung über Wesen und Wirkung der Auslese zutreffend sei, wird gefolgert, dass sich die Gesamtheit der erhöhten Risiken aus einer Mischung von drei Kategorien zusammensetze, nämlich

E_1, Risiken, die während der Selektionsperiode sterben (Todeskandidaten),

E_2, Risiken, deren Übersterblichkeit fallend ist, so dass sie sich bis am Ende der Selektionsperiode renormalisiert haben, und

E_3, Risiken, die während der ganzen Versicherungsdauer eine, wenn auch nicht unbedingt konstante Übersterblichkeit aufweisen.

---

[1]) *W. Saxer*, Versicherungsmathematik, zweiter Teil. (Mit einem Anhang «Grundlagen und Technik der Behandlung erhöhter Risiken in der Lebensversicherung» von *H. Jecklin.*) Springer-Verlag, 1958.

[2]) *W. Sachs, J. Staniszewsky* und *G. Röper:* «Vom Wesen der Auslese.» Mitteilungen VSVM, Bd. 54, 1, 1954.

Die Arbeitshypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit liesse sich also nur mit der Kategorie E_3 einigermassen in Einklang bringen. Das Hauptkontingent der erhöhten Risiken würde jedoch nach den Ausführungen genannter Arbeit von der Kategorie E_2 geliefert, d.h. solchen Risiken, die sich während einer mit zehn Jahren maximierten Selektionsdauer renormalisieren.

Nun liegen jedoch anderseits Untersuchungen vor, welche zum Ergebnis gelangen, dass die Hypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit mit den tatsächlichen Sterblichkeitsverhältnissen der erhöhten Risiken zumindest in den ersten zehn Versicherungsjahren ganz gut verträglich ist [1]). Diese Ergebnisse stehen demnach im Gegensatz zu den Folgerungen der Arbeit von Sachs und Mitarbeiter, sollte sich doch gerade in den zehn ersten Versicherungsjahren zur Hauptsache eine sinkende Tendenz der Übersterblichkeit bemerkbar machen.

Gewiss ist feststehend, dass für gewisse Anomalien eine sinkende Übersterblichkeit typisch ist. Ebenso aber steht fest, dass für andere Erschwerungsgründe das umgekehrte Verhalten der Übersterblichkeit, d.h. ein Ansteigen derselben, festzustellen ist [2]). Auch gibt es Anomalien, welche im Anfangsstadium renormalisierbar oder doch stabilisierbar sind, dagegen nicht mehr, wenn sie das Anfangsstadium überschritten haben. (Gesundheitsdienst!) Auch das Alter einer Person im Moment des Krankheitsbefalles ist für den Verlauf der Krankheit nicht ohne Einfluss. So kann, bei gleichem Erschwerungsgrund, der Verlauf der Übersterblichkeit, abgesehen von allen anderen Ponderabilien, auch eine Funktion des Feststellungsdatums sein.

Der ganze Problemkreis der Auslese ist deshalb sicher komplexer, als man es sich herkömmlicherweise vorstellt. Trotzdem sind wir weit davon entfernt, die Arbeitshypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit lediglich aus Bequemlichkeitsgründen als die einzig

---

[1]) *H.v.Denffer:* «Zur Hypothese der gleichbleibenden Übersterblichkeit bei erhöhten Risiken», Septième conférence internationale concernant l'assurance sur la vie des risques aggravés. Aix-les-Bains 1955. Seite 142ff.

G. Berger: «Zur Frage des Verlaufs der Übersterblichkeit erhöhter Risiken», Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd.3, 1, Seite 57ff.

J.Gugumus und *G.Berger:* «Sterblichkeitsbeobachtung 48/56 am Bestand erhöhter Risiken der Kölnischen Rückversicherungsgesellschaft.» Huitième conférence internationale concernant l'assurance sur la vie des risques aggravés, Helsinki 1958, Seite 183.

[2]) Sub [1]) genannte Publikation von *Gugumus* und *Berger*, Seite 184ff.

richtige zu verteidigen. Sobald die Ergebnisse der statistischen Beobachtung zeigen sollten, dass eine dynamischere Erfassung der Übersterblichkeit angezeigt ist, wird die Praxis folgen müssen, nicht so sehr der Prämienberechnung wegen, als wegen der sich für die mathematischen Reserven ergebenden Konsequenzen. Technische Schwierigkeiten besonderer Art dürften sich dabei kaum ergeben, wie denn der Verfasser schon Gelegenheit hatte zu zeigen, dass die technische Behandlung erhöhter Risiken sehr anpassungsfähig ist [1]).

Um ein weiteres Exempel dieser Art zu statuieren, soll im folgenden die technische Behandlung sinkender Übersterblichkeit, die sich in relativ kurzer Zeit renormalisiert, erläutert werden. Es sei

$$q'_{x+t} = q_{x+t}(1+\alpha_t), \text{ also } \Delta q_{x+t} = q'_{x+t} - q_{x+t} = \alpha_t q_{x+t},$$

wobei $\alpha_t = \alpha^* \cdot f(t)$, $\alpha^* = \text{konst.}$,

$$f(i+1) \leqslant f(t) \text{ mit der Massgabe } f(t) = 1 \text{ für } t = 0,$$

$$f(t) = 0 \text{ für } t \geqslant m \leqslant n-1.$$

Wir betrachten speziell die gemischte Versicherung. Die mit erhöhter Sterblichkeit gerechneten Werte werden durch einen Akzent kenntlich gemacht. Die Sonderprämie $\Delta P_{x:\overline{n}|} = P'_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|}$ ist dann gemäss Formel (A.2.1.3) Bd. 2 des Lehrbuches von Saxer:

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \sum_0^{m-1} {}_tE_x\, v\, \alpha_t\, q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) + R, \tag{II}$$

$$\text{mit } R = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \sum_0^{m-1} {}_tE_x\, v\, \alpha_t\, q_{x+t}({}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} - {}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}).$$

Der im allgemeinen von zu vernachlässigender Grössenordnung Rest R ist positiv, da ${}_tV_{x:\overline{n}|} > V'_{x:\overline{n}|}$, was noch zu zeigen sein wird. Für die approximative Bestimmung von $\Delta P_{x:\overline{n}|}$ hat man daher die Arbeitsformel

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} \sim \frac{\alpha^* v}{N_x - N_{x+n}} \sum_0^{m-1} f(t)\, q_{x+t}\, D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}), \tag{III}$$

[1]) *H. Jecklin:* «Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung», Mitteilungen VSVM, Bd. 53, 1, 1953.

oder auch, wenn wir $\dfrac{q_{x+t}}{p_{x+t}} = b_{x+t}$ setzen,

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} \sim \frac{\alpha^*}{N_x - N_{x+n}} \sum_0^{m-1} t\, f(t)\, b_{x+t}\, D_{x+t}(v - P_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|}). \qquad \text{(IV)}$$

Liegt insbesondere der Fall vor, dass die anfängliche multiplikative Übersterblichkeit α^* in 10 Jahren linear auf Null absinken soll, so ist $f(t) = \dfrac{10-t}{10}$, und wir haben anstelle von (III):

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} \sim \frac{\alpha^*}{10(N_x - N_{x+n})} \sum_0^{9} t\,(10-t)\, C_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}). \qquad \text{(V)}$$

Wegen der Vernachlässigung des positiven Restgliedes R wird die auf solche Art bestimmte Sonderprämie etwas zu klein. Ist $\Delta P^{(1)}_{x:\overline{n}|}$ die Sonderprämie für den anfänglichen Übersterblichkeitssatz $\alpha^* = 1$ (d.h. 100% anfängliche Übersterblichkeit), so gilt bei Anwendung vorstehender Formeln bezüglich eines anfänglichen Übersterblichkeitssatzes $\alpha^* \neq 1$ offenbar

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} = \alpha^* \Delta P^{(1)}_{x:\overline{n}|}. \qquad \text{(VI)}$$

Sei beispielsweise $x = 35$, $n = 20$, $\alpha^* = 4$, so ergibt sich auf Basis von S.M. 1948/53 zu $2\frac{1}{2}\%$ (welche Grundlagen wir auch in der Folge verwenden) eine Extraprämie $\Delta P = 3.06‰$, gegenüber einem genauen Wert von $3{,}14‰$. Der kurze Rechnungsgang für die Approximation ist aus Aufstellung 1 am Schluss der Arbeit ersichtlich. Die Ausrechnung des genauen Wertes der Sonderprämie ist aus Aufstellung 2 ersichtlich. Die Rechnung bedingt scheinbar keinen grösseren Aufwand als jene der Approximation. Der bedeutsame Unterschied liegt aber darin, dass für gegebenes x und n der Übersterblichkeitssatz α^* bei der Approximation gemäss Formel VI beliebig variiert werden kann, während bei genauer Bestimmung jede Änderung von α^* eine vollumfängliche neue Durchrechnung erfordert.

Wir können die Sonderprämie aber auch mit Hilfe der Rentenwerte bestimmen. Für eine Änderung der Sterblichkeit von q_{x+t} auf $q'_{x+t} = q_{x+t} + \Delta q_{x+t}$ gilt in Anwendung der Variationsformeln im Lehrbuch von Saxer, Bd. 1, Seite 145ff.:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = \Delta\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = v \sum_{0}^{n-2} t\; {}_tE_x \, \Delta q_{x+t}\, \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} + R\,, \tag{VII}$$
$$\text{mit } R = v \sum \Delta q_{x+t}\, \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \left({}_tE'_x - {}_tE_x\right).$$

Da ${}_tE'_x < {}_tE_x$, ist hier R negativ, aber von kleinerer Grössenordnung. Wir können in Anwendung von (VII) also schreiben

$$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \Delta\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sim \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v \sum_{0}^{n-2} t\; {}_tE_x \, \Delta q_{x+t}\, \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\,. \tag{VIII}$$

Auf diese Weise wird der approximierte Rentenwert etwas zu klein ausfallen. Verwenden wir wieder die bereits definierten Werte b_{x+t}, so ist

$$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} \sim \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha^*}{D_x} \sum_{0}^{n-2} t\; b_{x+t}\, f(t)\, (N_{x+t+1} - N_{x+n}) = \tag{IX}$$
$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha^*}{D_x} \left(\sum b_{x+t}\, f(t)\, N_{x+t+1} - N_{x+n} \sum b_{x+t}\, f(t)\right).$$

Zufolgedessen hat man für die Sonderprämie

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} = P'_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} \sim \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,, \tag{X}$$

welche Approximation einen etwas zu grossen Wert liefert, da der approximierte Rentenwert $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$ etwas zu klein ist. Für das gleiche Rechenbeispiel wie vorhin erhalten wir $\Delta P = 3{,}22\,^0/_{00}$. Der Rechnungsgang ist aus Aufstellung 3 ersichtlich. Der genaue Wert von ΔP ist, nebenbei bemerkt, in vorliegendem Falle genau das arithmetische Mittel zwischen den beiden approximierten Werten.

Nunmehr ist es auch leicht, festzustellen, welche konstanten und sinkenden Übersterblichkeiten einander rein prämienmässig äquivalent sind. Für den konstanten multiplikativen Übersterblichkeitssatz α gilt bekanntlich (s. z.B. Saxer, 2. Bd. Formel (A.2.1.23)

$$\Delta P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} \sim \alpha \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \right). \tag{XI}$$

Die Frage z.B., welcher Übersterblichkeitssatz $\alpha_t = \alpha_1^* \dfrac{10-t}{10}$ dem konstanten Satz $\alpha = 1$ (d.h. 100 % Übersterblichkeit) prämienmässig äquivalent ist, wird offenbar beantwortet durch die Gleichsetzung von

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{\alpha_1^*}{10(N_x - N_{x+n})} \sum_0^9 t\,(10-t)\, C_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}),$$

woraus

$$\alpha_1^* = \frac{1 - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}}{\frac{1}{10(N_x - N_{x+n})} \sum (10-t)\, C_{x+t}\, \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}. \qquad \text{(XII)}$$

Da die Sonderprämien zu ihren Übersterblichkeitssätzen α^*, resp. α, proportional variieren (s. Formeln VI und XI), ist also der Wert α_1^* in XII direkt das Multiplum von α^* zu α bei gleicher Sonderprämie. Wir haben in folgender Tabelle dieses Multiplum für einige Positionen von x und n ausgerechnet.

x \ n	10	15	20	25	30
30	1.38	1.86	2.54	3.45	4.67
40	1.43	2.04	2.93	4.07	5.49
50	1.42	1.96	2.71		

Bei der gegenwärtig meist gebräuchlichen Arbeitspypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit beträgt die durchschnittliche Übersterblichkeit aller erhöhten Risiken 50–75% (d.h. $\alpha = 0{,}5$ bis 0,75). Unter der Annahme, dass die Einschätzung durchwegs richtig erfolgte, dass aber die wirkliche Übersterblichkeit nicht konstant, sondern in der Mehrzahl der Fälle sinkend und innert zehn Jahren sich renormalisierend sei, müsste bei Versicherungsbeginn im Durchschnitt eine Übersterblichkeit vom etwa dreifachen durchschnittlichen konstanten Ausmass vorliegen. Es scheint nun aber doch kaum denkbar, dass die erhöhten Risiken sozusagen durchwegs bei Versicherungsbeginn eine durchschnittlich 200prozentige Übersterblichkeit haben sollten. Natürlich sind die Verhältniswerte vorstehender Tabelle grundlagenabhängig. Insbesondere müssen sich bei Verwendung einer Selekttafel höhere Werte ergeben als nach der zugehörigen Aggregattafel, was aber die Folgerung noch fragwürdiger erscheinen lässt.

Wenden wir uns nunmehr der Reserveberechnung zu. Die mathematische Reserve kann sehr einfach ermittelt werden nach der Rekursionsformel

$$_{t+1}V'_{x:\overline{n}|} = \frac{_tV'_{x:\overline{n}|} + P'_{x:\overline{n}|} - v\,q'_{x+t}}{v(1 - q'_{x+t})}. \qquad \text{(XIII)}$$

Wir können aber auch, was besonders interessiert, die Differenz gegenüber der Reserve des normalen Risikos $\Delta_tV = {}_tV - {}_tV'$ direkt bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
{}_tV'_{x:\overline{n}|} &= 1 - (d + P'_{x:\overline{n}|})\, \ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|} = \\
&= 1 - (d + P_{x:\overline{n}|} + \Delta P_{x:\overline{n}|})\,(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \Delta\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) = \\
&= 1 - (d + P_{x:\overline{n}|})\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \Delta P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \\
&\qquad\qquad + (d + P'_{x:\overline{n}|})\, \Delta\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \\
&= {}_tV_{x:\overline{n}|} + (d + P'_{x:\overline{n}|})\, \Delta\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \Delta P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\Delta_tV_{x:\overline{n}|} = \Delta P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - (d + P'_{x:\overline{n}|})\, \Delta\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \qquad \text{(XIV)}$$

Dabei ist offenbar

$$\Delta\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{\alpha^*}{D_{x+t}} \sum_{t}^{n-t-k} {}_k b_{x+t+k}\, f(t+k)\, (N_{x+t+k+1} - N_{x+n}).$$

Für die Praxis würde man am besten für die in Betracht fallenden Eintrittsalter eine Tabelle anlegen, wie sie für $f(t) = \frac{10-t}{10}$ auszugsweise als Aufstellung 4 am Schlusse beigefügt ist.

Bei der gemischten Versicherung ist die Reserve des erhöhten Risikos, wie man leicht zeigen kann, gegen Versicherungsende immer kleiner als jene des normalen Risikos. Im übrigen kann man über den Unterschied des Reserveverlaufes des erhöhten Risikos gegenüber jenem des normalen Risikos in gewissen Fällen auf Grund des Zeichenwechselsatzes Aussagen machen (Saxer, Bd. 2, Seite 273). Massgeblich ist das Verhalten der Wertreihe $\Delta q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$. Ist sie monoton fallend, so ist durchgehends ${}_tV'_{x:\overline{n}|} < {}_tV_{x:\overline{n}|}$. Bei der Arbeitshypothese der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit mit $\Delta q_{x+t} = \alpha\, q_{x+t}$ kommt es also auf das Verhalten der Produktenreihe $q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$ an. Der erste Faktor ist steigend, der zweite fallend. Bei kurzer Versicherungsdauer kann der Einfluss des zweiten Faktors so stark überwiegen, dass die Reihe monoton fällt und daher durchgehends ${}_tV' < {}_tV$ ist. Die in der zitierten Abhandlung von Sachs und Mitarbeitern gemachte Aussage, dass man bei prozentual konstanter Mehrsterblichkeit, von den letzten Versicherungsjahren abgesehen, höhere Deckungskapitalien erhalte als bei normaler Sterblichkeit, ist daher in dieser allgemeinen Fassung nicht richtig.

Im Falle der sinkenden Übersterblichkeit mit $\alpha_t = \alpha^* \frac{10 - t}{10}$ jedoch ist $\Delta_t V_{x:\overline{n}|} = {}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_tV'_{x:\overline{n}|}$ durchwegs positiv, d.h. die Reserve des erhöhten Risikos ist durchwegs kleiner als jene des normalen Risikos. Für die Reservepositionen mit $t \geqslant 10$ ist dies klar, da dann der zweite, negative Term in XIV verschwindet. Aber auch für $t \leqslant 10$ ist die Richtigkeit der Behauptung leicht einzusehen, denn für den praktisch in Betracht fallenden Bereich der Sterbetafel ist die Reihe $\Delta q_{x+t} = \alpha_t \cdot q_{x+t}$, $t = 0, 1, \ldots, 9$, monoton fallend. Man sieht es auch aus folgender Überlegung: Betrachten wir die Rentenwerte $\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}$ und $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$.

Für $t = 0$ gilt sicher $\quad \ddot{a}'_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$,

für $t \geqslant 10$ gilt sicher $\quad \ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|} = \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$.

Sei $\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = a < 1$, dann bilden in dem in Betracht fallenden Bereich die Werte $\frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$ eine Reihe, die für $t = 0$ bis $t = 10$ monoton vom Wert a zu 1 ansteigt. Also

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}},$$

$$\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}},$$

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = {}_tV'_{x:\overline{n}|}.$$

Über das Ausmass der Reservedifferenz $\Delta_t V_{x:\overline{n}|}$ geben am besten numerische Beispiele zu Formel XIV Aufschluss, wie solche in Aufstellung 5 angeführt sind. Bei allen drei Beispielen ist $x = 40$. Des weiteren wurde α^* so gewählt, dass prämienmässig Äquivalenz mit einer konstanten Übersterblichkeit von 75 % besteht.

Wie die zahlenmässigen Beispiele von Aufstellung 5 zeigen, sind die Differenzen im Reserveverlauf von nicht zu vernachlässigender Grössenordnung. Wenn nun die Praxis, wie üblich, in der technischen Behandlung bezüglich des Verlaufes der Übersterblichkeit keinen Unterschied macht, so kann sich dies im Einzelfalle, insbesondere was Rückkauf und Reduktion anbelangt, ungünstig für den Versicherer auswirken. Gesamthaft gesehen scheint es uns aber doch wichtig, wenn vorerst versucht wird, über den Anteil der verschiedenen Kategorien an der Gesamtheit der erhöhten Risiken Klarheit zu schaffen, bevor man zu anderen Arbeitshypothesen übergeht, die dem wirklichen Sachverhalt möglicherweise auch nicht entsprechen.

Aufstellung 1

x	t	$a \cdot$ $10-t$	$b \cdot$ C_{x+t}	$c \cdot$ $(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$	$a \cdot b \cdot c$
35	0	10	90	0,96098	864,88
36	1	9	92	0,92100	762,59
37	2	8	95	0,88004	668,83
38	3	7	99	0,83811	580,81
39	4	6	104	0,79515	496,17
40	5	5	108	0,75121	405,65
41	6	4	113	0,70618	319,19
42	7	3	118	0,66005	233,66
43	8	2	125	0,61275	153,19
44	9	1	132	0,56428	74,48
					4559,45

$$\Delta P_{x:\overline{n}|} \sim \frac{\alpha^*}{10\,(N_x - N_{x+n})} \sum_0^9 t\,(10-t)\,C_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}).$$

$$x = 35,\ n = 20,\ \alpha^* = 4. \qquad \Delta P = 4 \cdot \frac{4.559,45}{5.962.074} = 3{,}06\,‰.$$

Aufstellung 2

x	$f(x)$	$f(x)\cdot q_x$	l'_x	D'_x	N'_x
		$^0/_{00}$			
35	5	11,900	97 693	41 165	925 655
36	4,6	11,592	96 530	39 683	884 490
37	4,2	11,256	95 411	38 266	844 807
38	3,8	10,868	94 337	36 913	806 541
39	3,4	10,438	93 312	35 621	769 628
40	3,0	9,900	92 338	34 390	734 007
41	2,6	9,204	91 424	33 219	699 617
42	2,2	8,382	90 583	32 110	666 398
43	1,8	7,434	89 824	31 065	634 288
44	1,4	6,328	89 156	30 082	603 223
45			88 592	29 162	573 141

$l'_{45} = l_{45}$, für $x < 45$ ist $l'_x = \dfrac{l'_{x+1}}{1-f(x)\,q_x}$, $\alpha^* = 4$, $q'_{35} = 5\cdot q_{35}$.

$$\ddot{a}'_{35:\overline{20}|} = \frac{N'_{35}-N_{55}}{D'_{35}} = 14{,}742,\ \ddot{a}_{35:\overline{20}|} = 15{,}455,\ \Delta P = \frac{1}{\ddot{a}'_{35:\overline{20}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{35:\overline{20}|}} =$$
$$= 3{,}14\,^0/_{00}.$$

Aufstellung 3

x	t	$a \cdot$ $10-t$	$b \cdot$ $\frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}$	$c \cdot$ N_{x+t+1}	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot b$
			‰			‰
35	0	10	2,39	876 445	20 947,0	23,90
36	1	9	2,53	838 898	19 101,7	22,77
37	2	8	2,69	802 359	17 266,8	21,52
38	3	7	2,87	766 807	15 405,2	20,09
39	4	6	3,08	732 221	13 531,4	18,48
40	5	5	3,31	698 582	11 561,5	16,55
41	6	4	3,55	665 872	19 455,4	14,20
42	7	3	3,82	634 073	7 266,5	11,46
43	8	2	4,15	603 168	5 006,3	8,30
44	9	1	4,54	573 141	2 602,1	4,54
					122 143,9	161,81

$$\Delta \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{a^*}{10\,D_x}\left(\sum_t \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}(10-t)\,N_{x+t+1} - N_{x+n}\sum_t \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}(10-t)\right).$$

$$x = 35,\ n = 20,\ a^* = 4.$$

$$\Delta \ddot{a}_{35:\overline{20}|} = \frac{4}{335\,770}(122\,143{,}9 - 51\,587{,}4) = 0{,}732.$$

$$\ddot{a}'_{35:\overline{20}|} \sim 15{,}455 - 0{,}732 = 14{,}723. \quad \Delta P = \frac{1}{\ddot{a}'_{35:\overline{20}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{35:\overline{20}|}} = 3{,}22\,‰.$$

Aufstellung 4

$$Z_{x+t} = \frac{1}{10} \sum_k \frac{q_{x+t+k}}{p_{x+t+k}} (10-t-k)\,, \text{ in } {}^0/_{00}\,.$$

x	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$
30	12,33	10,31	8,46	6,78	5,26	3,90	2,70	1,69	0,88	0,31
31	12,87	10,81	8,92	7,18	5,59	4,16	2,89	1,81	0,95	0,33
32	13,50	11,40	9,45	7,63	5,96	4,44	3,09	1,94	1,02	0,36
33	14,25	12,08	10,04	8,13	6,36	4,75	3,31	2,08	1,09	0,38
34	15,15	12,88	10,73	8,71	6,83	5,11	3,57	2,25	1,18	0,42
35	16,19	13,80	11,52	9,37	7,36	5,51	3,85	2,43	1,28	0,45
36	17,37	14,84	12,42	10,12	7,96	5,97	4,19	2,66	1,41	0,50
37	18,66	15,97	13,39	10,93	8,61	6,48	4,57	2,91	1,55	0,55
38	20,18	17,31	14,54	11,89	9,40	7,11	5,03	3,21	1,71	0,61
39	21,86	18,78	15,80	12,96	10,29	7,80	5,53	3,53	1,88	0,67
40	23,80	20,49	17,29	14,23	11,32	8,60	6,11	3,91	2,09	0,75

$$Y_{x+t} = \frac{1}{10} \sum_k \frac{q_{x+t+k}}{p_{x+t+k}} (10-t-k)\, N_{x+t+k+1}\,.$$

x	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$
30	11 681,4	9 499,5	7580,7	5908,5	4457,4	3213,0	2161,3	1314,0	664,1	227,0
31	11 663,0	9 526,5	7645,2	5984,1	4529,2	3275,9	2210,5	1344,0	684,5	230,5
32	11 695,4	9 605,1	7743,6	6078,2	4614,6	3339,4	2256,3	1374,4	700,8	239,7
33	11 799,1	9 727,5	7860,8	6186,8	4701,9	3410,2	2305,9	1405,3	713,7	241,0
34	11 980,8	9 903,7	8019,4	6324,8	4816,4	3497,5	2369,8	1447,7	735,2	253,3
35	12 221,3	10 126,6	8213,9	6488,8	4947,5	3592,9	2433,3	1487,7	758,5	257,9
36	12 502,4	10 380,0	8438,3	6674,7	5093,1	3702,9	2517,6	1547,5	793,6	272,0
37	12 796,4	10 638,1	8659,7	6858,4	5237,7	3819,4	2608,3	1607,1	827,6	283,6
38	13 169,0	10 968,3	8940,0	7088,8	5430,7	3978,7	2724,1	1681,0	865,0	297,8
39	13 562,8	11 307,5	9225,8	7334,7	5641,7	4139,8	2838,8	1750,8	900,0	309,3
40	14 020,3	11 708,0	9577,2	7637,0	5881,8	4322,8	2968,3	1833,8	945,3	326,8

$$\varDelta \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \frac{a^*}{D_{x+t}} (Y_{x+t} - Z_{x+t} \cdot N_{x+n}).$$

Beispiel: $x = 35,\ n = 20,\ a^* = 4.$

$$t = 0,\ \varDelta \ddot{a}_{35:\overline{20|}} = \frac{4}{38.577} (12221{,}3 - 0{,}01619 \cdot 318814{,}6) = 0{,}732.$$

$$t = 5,\ \varDelta \ddot{a}_{40:\overline{15|}} = \frac{4}{33.639} (3592{,}9 - 0{,}00551 \cdot 318814{,}6) = 0{,}218.$$

wogegen für $x = 40,\ n = 15,\ a^* = 4.$

$$t = 0,\ \varDelta \ddot{a}_{40:\overline{15|}} = \frac{4}{33.639} (14020{,}3 - 0{,}02380 \cdot 318814{,}6) = 0{,}765.$$

Aufstellung 5

$$\Delta_t V_{x:\overline{n}|} = \Delta P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \left(d + P'_{x:\overline{n}|}\right) \Delta \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\,.$$

x	n	a^*	$P'_{40:\overline{n}|}$	$\Delta P_{40:\overline{n}|}$
			‰	‰
40	15	1,5	58,93	1,95
40	20	2,2	44,08	2,58
40	25	3,0	36,02	3,26

t	$\Delta\ddot{a}_{40+t:\overline{15-t}|}$	$\Delta_t V_{40:\overline{15}|}$	$\Delta\ddot{a}_{40+t:\overline{20-t}|}$	$\Delta_t V_{40:\overline{20}|}$	$\Delta\ddot{a}_{40+t:\overline{25-t}|}$	$\Delta_t V_{40:\overline{25}|}$
		‰		‰		‰
0	0,287	—	0,572	—	0,946	—
1	0,237	2,89	0,482	4,62	0,804	6,84
2	0,192	5,28	0,397	8,86	0,669	13,22
3	0,150	7,39	0,319	12,59	0,543	19,02
4	0,114	8,97	0,247	15,87	0,425	24,30
5	0,081	10,26	0,182	18,64	0,318	28,89
6	0,054	11,01	0,125	20,82	0,222	32,77
7	0,032	11,31	0,077	22,34	0,139	35,84
8	0,016	11,07	0,040	23,08	0,073	37,84
9	0,005	10,37	0,014	23,02	0,025	38,71
10		9,12		22,10		38,17
11		7,41		20,17		36,07
12		5,65		18,20		33,94
13		3,83		16,17		31,76
14		1,95		14,09		29,54
15				11,94		27,26
16				9,73		24,93
17				7,43		22,53
18				5,05		20,07
19				2,58		17,52
20						14,89
21						12,16
22						9,33
23						6,37
24						3,26